บทที่ 2

แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

การวิเคราะห์ความผันผวนของกองทุนรวมที่ลงทุนในต่างประเทศได้ทำการรวบรวมแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อใช้เป็นแนวทางในการศึกษา ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้

2.1 แนวคิดและทฤษฎีเกี่ยวกับอัตราผลตอบแทน

อัตราผลตอบแทน หมายถึง ผลตอบแทนจากการลงทุนประเภทต่างๆ ที่ผู้ลงทุนจะได้รับในหนึ่งงวดของการลงทุน มักแสดงในรูปร้อยละ และมักกำหนดเป็นช่วงเวลาที่ต้องการวัดผลตอบแทนซึ่งวิธีการคำนวณผลตอบแทนใช้สูตรดังนี้

$$R_{it} = \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{ti-1}}\right) \times 100 \qquad (2.1)$$

โดยที่ R_{it} คือ อัตราผลตอบแทนรายวันของกองทุนรวมที่ทำการศึกษา

p_{it} คือ ราคาหลักทรัพย์ของหลักทรัพย์ที่ i ณ เวลา t

p_{it-1} คือ ราคาหลักทรัพย์ของหลักทรัพย์ที่ i ณ เวลา t-1

2.2 ความผันผวนแปรตามเวลา (Time-varying Volatility)

ความเสี่ยงของตลาดเป็นอีกหนึ่งเรื่องหลักของความไม่แน่นอนสำหรับทุกๆสถาบันการเงินที่ถือสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง โดยทั่วไปความเสี่ยงของตลาดจะหมายถึงความเป็นไปได้ที่มูลค่าของการลงทุนจะลดลงโดยขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงปัจจัยของตลาด ตัวอย่างของปัจจัยตลาดคือการเปลี่ยนแปลงด้านราคาหลักทรัพย์ ดัชนีหลักทรัพย์ การเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ย อัตราแลกเปลี่ยน เป็นต้น ความเสี่ยงของตลาดมีอิทธิพลต่อมูลค่าของสถาบันการเงิน การเปลี่ยนแปลงของสถานการณ์ที่ไม่ได้คาดการณ์ไว้ของตลาดอาจจะนำไปสู่ความสูญเสียที่ยิ่งใหญ่ ดังนั้นความเสี่ยงของตลาดจึงต้องถูกนำเป็นเครื่องมือในการคำนวณในตลาด

ความผันผวน (Volatility) คือการกระจายของค่าที่ไม่แน่นอน ในทางการเงินจะหมายถึงการกระจายของผลตอบแทนของสินทรัพย์ ทางสถิติความผันผวนคือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation) ของอนุกรมเวลาที่มีความต่อเนื่อง

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \mu)^2} \tag{2.2}$$

โดยที่ r_t คือผลตอบแทนของวันที่ t และ μ คือ ค่าเฉลี่ยของผลตอบแทนช่วงเวลา T

ในบางครั้งค่า σ^2 ใช้หาความผันผวนด้วยเหมือนกัน ตั้งแต่ค่าความแปรปรวน (variance) เป็นการยกกำลังของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน มันทำให้การวัดที่ใช้เมื่อเปรียบเทียบความผันผวนของสินทรัพย์ทั้งคู่ไม่แตกต่างกัน อย่างไรก็ตามค่าความแปรปรวนนั้นมีเสถียรภาพน้อยกว่าและถูกใช้น้อยกว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในการคำนวณทางคอมพิวเตอร์และการพยากรณ์ความผันผวน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีหน่วยในการวัดเหมือนค่าเฉลี่ย ตัวอย่างเช่น ค่าเฉลี่ยคือดอลลาร์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานก็จะแสดงออกมาในดอลลาร์แต่ว่าค่าความแปรปรวนจะแสดงเป็นดอลลาร์ยกกำลัง เหตุผลนี้ทำให้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีความสะดวกและใช้งานง่ายเมื่อพูดถึงความผันผวน ความผันผวนมีความสัมพันธ์กับความเสี่ยงแต่ไม่ใช่ทั้งหมด ความเสี่ยงนั้นเกี่ยวข้องกับทุกๆสิ่งที่ไม่แน่นอนแต่ว่าความผันผวนจะวัดค่าความไม่แน่นอนของผลลัพธ์ทางบวกอย่างถูกต้อง ความสำคัญของความแตกต่างนี้มักจะถูกมองข้าม ความผันผวนไม่ใช่ปัจจัยเดียวของการกระจายผลตอบแทนของสินทรัพย์ มันเป็นปัจจัยภายในที่สำคัญของกิจกรรมทางการเงินเช่น การลงทุน (Investment) โครงสร้างการลงทุน (Portfolio construction) การตั้งราคาตราสาร (Option Pricing) การประกันความเสี่ยง (Hedging) และการจัดการความเสี่ยง (Risk management) (Poon, 2008)

การเปลี่ยนแปลงการกระจายของผลตอบแทนตามเวลานั้นต้องประมาณค่าเฉลี่ย แบบมีเงื่อนไข ความแปรปรวน และความแปรปรวนร่วม (Conditional Mean, Variance and Covariance) โดยกำหนดให้ค่าสถิติดังกล่าวมีเงื่อนไขขึ้นอยู่กับข้อมูลข่าวสารปัจจุบัน ทั้งนี้ความผันผวนและผลตอบแทนของหลักทรัพย์มีสิ่งที่น่าสนใจ ดังนี้

1) โดยธรรมชาติผลตอบแทนของหลักทรัพย์มักผันผวนตามเวลา หรือมีค่าไม่คงที่เมื่อเวลาผ่านไป คุณสมบัติดังกล่าวเรียกว่า กลุ่มของความผันผวน (Volatility Clustering)

2) ผลตอบแทนของหลักทรัพย์มีการกระจายแบบ Fat-tail ซึ่งจะมีค่าความเบ้และความโด่งขนาดใหญ่ ส่วนมากจะมีค่าความโด่ง (Kurtosis) มากกว่า 3

3) ความไม่สมมาตรของความผันผวน เกิดจากความผันผวนที่เพิ่มขึ้นในกรณีที่ผลตอบแทนของหลักทรัพย์ในวันก่อนหน้ามีค่าติดลบ

4) ผลตอบแทนและความเสี่ยงของหลักทรัพย์ต่างชนิดกันมีแนวโน้มที่จะมีความสัมพันธ์ในทิศทางเดียวกัน

ในปัจจุบันแบบจำลองที่ได้รับความนิยมเพื่อใช้ประมาณค่าความผันผวนแปรตามเวลา คือ แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH) (Engle, 1982) ซึ่งข้อมูลสำหรับการพยากรณ์ความแปรปรวนคือข้อมูลผลตอบแทนในอดีต แบบจำลองนี้ได้พยากรณ์ความผันผวนของตลาดที่ตอบสนองต่อผลตอบแทนของตลาดที่เปลี่ยนแปลงไปต่อเนื่องตลอดเวลา ค่าพยากรณ์ความแปรปรวนของผลตอบแทนตลาดแต่ละช่วงเวลาจะได้รับการปรับเปลี่ยนโดยอาศัยข้อมูลประมาณก่อนหน้าและประมาณการค่าความคลาดเคลื่อนของผลตอบแทนกำลังสอง (Bodie et al., 2008)

2.3 แนวคิดและทฤษฎีทางเศรษฐมิติ

การศึกษาเรื่องการวิเคราะห์ความผันผวนของผลตอบแทนของกองทุนรวมที่ลงทุนในต่างประเทศจะใช้แนวคิดทฤษฎีทางเศรษฐมิติ ดังต่อไปนี้

2.3.1 สมการค่าเฉลี่ยของผลตอบแทน (Mean Equation) สมการค่าเฉลี่ยของผลตอบแทนมีรูปแบบดังนี้

$$R(t) = \mu + \sum_{i=1}^{N} a_i R(t-i) + b\sigma(t) + cX(t) + \sigma(t)z(t) \tag{2.3}$$

โดย a_i คือ สัมประสิทธิ์สมการถอดถอย

b_i คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของ GARCH-in-mean

c คือ แถวของเวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธิ์ exogenous variables แทน ด้วยคอลัมน์ของเวกเตอร์

σ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

สมการค่าเฉลี่ยของผลตอบแทนเป็นเพียงการตั้งสมมติฐานการประมวลข้อมูลของตัวแปรที่เกิดขึ้นจริง ถ้าไม่มีค่าสมการเฉลี่ยของผลตอบแทนค่าความแปรปรวนก็จะไม่มีประโยชน์เลยเพราะว่าสมการความแปรปรวนนั้นจะขึ้นอยู่กับสมการเฉลี่ยของผลตอบแทน และถ้าหาสมการเฉลี่ยของผลตอบแทนไม่ได้ก็จะไม่สามารถหาค่าความแปรปรวนได้

2.3.2 แนวคิดของข้อมูลอนุกรมเวลา (Time Series Data) ข้อมูลอนุกรมเวลา (Time Series Data) เป็นข้อมูลที่เกิดขึ้นในเวลาที่มีระยะห่างเท่าๆ กันและต่อเนื่องกัน โดยข้อมูลอนุกรมเวลาอาจเก็บเป็น รายเดือน รายวัน รายไตรมาส หรือรายปี ขึ้นอยู่กับประโยชน์ที่จะนำไปใช้ ข้อมูลอนุกรมเวลาจึงเป็นค่าที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งที่เปลี่ยนไปตามเวลา การวิเคราะห์อนุกรมเวลา จึงเป็นการศึกษาหารูปแบบ การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่เปลี่ยนไปตามเวลาในอดีตจนถึงปัจจุบัน แล้วนำรูปแบบนั้นมาวิเคราะห์เพื่อพยากรณ์ค่าของตัวแปรนั้นในอนาคต (Brillinger, 2001; คธาฤทธิ์ สิทธิกูล, 1998)

2.3.3 การทดสอบความนิ่งของข้อมูล (Unit Root Test) การทดสอบยูนิทรูท (Unit Root Test) หรือการหาอันดับความสำคัญของข้อมูล (Order of Integration) เป็นการทดสอบตัวแปรในระบบสมการว่าข้อมูลมีลักษณะนิ่งหรือไม่นิ่ง งานวิจัยครั้งนี้เลือกใช้วิธีแบบ Augment Dickey Fuller หรือเรียกว่า ADF Test โดยสมการที่ใช้มีดังนี้

กรณีไม่มีค่าคงที่และแนวโน้มเวลา $$\Delta X_t = \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta X_{t-i} + e_t \tag{2.4}$$

มีเฉพาะค่าคงที่ $$\Delta X_t = \alpha + \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta X_{t-i} + e_t \tag{2.5}$$

มีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลา $$\Delta X_t = \alpha + \beta_t + \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta X_{t-i} + e_t \tag{2.6}$$

โดย	ΔX_t	คือ	ค่าการถดถอยในตัวเองลำดับที่หนึ่งของตัวแปรที่กำลังศึกษา
	X_t	คือ	ข้อมูลอนุกรมเวลาของตัวแปรที่กำลังศึกษา ณ เวลา t
	X_{t-1}	คือ	ข้อมูลอนุกรมเวลาของตัวแปรอิสระ ณ เวลา t-1
	$\alpha.\beta,\theta,\phi$	คือ	ค่าคงที่ หรือสัมประสิทธิ์ของตัวแปร
	t	คือ	ค่าแนวโน้มเวลา
	e_t	คือ	ค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม

การทดสอบจะพิจารณาจากค่า θ โดยเปรียบเทียบค่าสถิติ t (t-statistic) ถ้ายอมรับสมมติฐานหลัก $H_0 : \theta = 0$ แสดงว่าตัวแปร (X_t) มีลักษณะไม่นิ่ง ในทางกลับกันถ้ายอมรับสมมติฐานรอง $H_1 : \theta < 0$ แสดงว่าตัวแปร (X_t) มีลักษณะนิ่ง

2.3.4 แบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH) ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาส่วนใหญ่แล้วจะมีการกำหนด Stochastic Variable ให้มีความแปรปรวนคงที่

(Homoscadastic) ซึ่งในการประยุกต์ใช้กับบางข้อมูลนั้น ค่าความแปรปรวนของค่าเทอมคลาดเคลื่อนจะไม่ใช่ฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระ แต่มีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามช่วงเวลาขึ้นอยู่กับขนาดของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในอดีต หรือกล่าวได้ว่าความแปรปรวนของเทอมคลาดเคลื่อนนั้น ขึ้นอยู่กับความผันผวน (volatility) ของความคลาดเคลื่อนในอดีตที่ผ่านมา

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.7}$$

และการพยากรณ์อย่างมีเงื่อนไขของ y_{t+1} ดังนี้คือ

$$E_t y_{t+1} = a_0 + a_1 y_t \tag{2.8}$$

และค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขในการพยากรณ์ y_{t+1} ค่าความคลาดเคลื่อนของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขที่พยากรณ์ได้ดังนี้

$$E_t\left[(y_{t+1} - a_o - a_1 y_t)^2\right] = E_t \varepsilon_{t+1}^2 = \sigma^2 \tag{2.9}$$

ถ้าเปลี่ยนไปใช้การพยากรณ์แบบไม่มีเงื่อนไข ซึ่งผลที่จะใช้เป็นค่าเฉลี่ยในระยะยาวของลำดับ $\{y_t\}$ ที่ใช้มีค่าเท่ากับ $\dfrac{a_0}{(1-a_1)}$ จะได้ค่าความคลาดเคลื่อนของความแปรปรวนอย่างไม่มีเงื่อนไขจะเป็นดังนี้

$$E\left\{\left[y_{t+1} - \frac{a_0}{(1-a_1)}\right]^2\right\} = E\left[(\varepsilon_{t+1} + a_1\varepsilon_t + a_1^2\varepsilon_{t-1} + a_1^3\varepsilon_{t-2} + \cdots)^2\right] = \frac{\sigma^2}{(1-a_1^2)} \tag{2.10}$$

เมื่อ $\dfrac{1}{(1-a_1^2)} > 1$ ค่าความแปรปรวนที่ได้จากพยากรณ์แบบไม่มีเงื่อนไขจะสูงกว่าแบบมีเงื่อนไข ดังนั้นในการพยากรณ์แบบไม่มีเงื่อนไขจึงมีความเหมาะสมกว่า ถ้าความแปรปรวนของ $\{\varepsilon_t\}$ ไม่เป็นค่าคงที่ จะสามารถประมาณค่าแนวโน้มของการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนได้โดยใช้แบบจำลอง ARMA Model โดยให้ $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ แทนส่วนที่เหลือ (Residuals) ที่ได้จากการประมาณจากสมการ (2.4) ดังนั้นค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของ y_{t+1} เป็นดังนี้

$$Var(y_{t+1}|y_t) = E_t\left[(y_{t+1} - a_0 - a_1 y_t)^2\right] = E_t\varepsilon_{t+1}^2 \tag{2.11}$$

และจากที่กำหนดให้ $E_t\varepsilon_{t+1}^2$ เท่ากับ σ^2 จึงแสดงค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขไม่ใช่ค่าคงที่ และจะได้จากแบบจำลองในการประมาณค่าส่วนที่เหลือออกมาดังนี้

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2\hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q\hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + v_t \tag{2.12}$$

โดยที่ v_t = White Noise Process ถ้าค่าของ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q$ เท่ากับศูนย์ ค่าความแปรปรวนจากการประมาณจะเท่ากับค่าคงที่ α_0 อีกนัยหนึ่ง คือค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของ y_t จะมีการ

เปลี่ยนแปลงสอดคล้องกับ Autoregression ในสมการที่ (2.9) และใช้สมการที่ (2.9) ในการพยากรณ์ค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข ณ เวลา t+1 ดังสมการนี้

$$E_t\hat{\varepsilon}_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\hat{\varepsilon}_t^2 + \alpha_2\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 ... + \alpha_q\hat{\varepsilon}_{t+1-q}^2 \qquad (2.13)$$

จากที่กล่าวมา สมการ (2.10) เรียกว่า Autoregressive Conditional Heteroscadasticity (ARCH) Model และสมการ (2.10) เป็น ARCH (q) โดยค่า $E_t\varepsilon_{t+1}^2$ หรือ σ_{t+1}^2 จะประกอบด้วย 2 องค์ประกอบ คือ ค่าคงที่และความผันผวนในคาบเวลาที่ผ่านมา ซึ่งเขียนได้เป็นส่วนเหลือกำลังสองของคาบในอดีต (ARCH Term) ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_q$ สามารถหาค่าได้โดยใช้วิธี Maximum Likelihood (พิจิตต์ อินตา, 2551)

2.3.5 แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH)

แบบจำลอง ARCH ของ Engle, Robert F. ได้มีการพัฒนาเทคนิคโดย Bollerslev ในปี 1986 โดยให้ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Variance) มีลักษณะเป็น ARMA process โดยที่ให้ Error Process มีลักษณะดังนี้

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{h_t} \qquad (2.14)$$

โดยที่ $\sigma_v^2 = 1$ และ

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i} \qquad (2.15)$$

เนื่องจาก $\{v_t\}$ เป็น White Noise Process ซึ่งเป็นอิสระกับ (ε_{t-i}) ดังนั้นค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขและไม่มีเงื่อนไข (Conditional and Unconditional Means) ของ ε_t จะมีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อใส่ค่าคาดหมาย (Epected Value) ของ ε_t จะพิสูจน์ได้ว่า

$$E\varepsilon_t = Ev_t\sqrt{h_t} = 0 \qquad (2.16)$$

ประเด็นสำคัญคือความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Variance) ของ ε_t ถูกกำหนดโดย $E_{t-1}\varepsilon_t^2 = h_t$ ดังนั้นความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของ ε_t จึงถูกกำหนดโดย h_t ในสมการ (2.11) แบบจำลอง Generalized ARCH (p,q) หรือที่เรียกว่า GARCH (p,q) ได้เปิดโอกาสให้มีทั้งส่วนประกอบที่เป็น Autoregressive และ Moving Average ในความแปรปรวนที่มีลักษณะ Heteroscedastic Variance ถ้ากำหนดให้ p = 0 และ q = 1 จะได้แบบจำลอง GARCH (0,1) ซึ่งก็คือ ARCH (1) หรือ ARCH (q = 1) นั่นเอง โดยสรุปถ้า β_i ทุกตัวมีค่าเท่ากับศูนย์แล้วนั้น แบบจำลอง GARCH(p, q) จะเทียบเท่ากับแบบจำลอง ARCH (q) นั่นเอง คุณสมบัติที่สำคัญของแบบจำลอง GARCH คือ ค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของตัวรบกวน (disturbance) ของลำดับ $\{y_t\}$ สร้างขึ้นมาจากกระบวนการ ARMA ดังนั้นจึงสามารถคาดได้ว่าส่วนที่เหลือ (Residual) จากแบบจำลอง

ARMA นั้นแสดงถึงคุณลักษณะในรูปแบบเดียวกัน เช่น ในการประมาณค่า $\{y_t\}$ ด้วยกระบวนการ ARMA ถ้าแบบจำลองของ $\{y_t\}$ เพียงพอแล้ว ค่า Autocorrelation Function (ACF) ซึ่งเป็นสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่มที่หน่วยเวลาห่างกันของกระบวนการเดียวกัน และ Partial Autocorrelation Function (PACF) ของส่วนที่เหลือ จะบ่งถึงกระบวนการ White-noise อย่างไรก็ตาม ACF ของส่วนที่เหลือยกกำลังสอง (Squared Residuals) สามารถนำมาช่วยในการระบุถึงลำดับ (Order) ของกระบวนการ GARCH ได้ (พิจิตต์ อินตา, 2551)

2.3.6 แบบจำลองความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขแบบหลายตัวแปร (Multivariate Conditional Volatility Model) แบบจำลองทางเศรษฐมิติที่ใช้ในการหาความผันผวนของตัวแปรหลายตัว ได้แก่ แบบจำลอง Vector Autoregressive Moving Average-GARCH (VARMA-GARCH) ของ Ling and McAleer (2003) แบบจำลอง Vector Autoregressive Moving Average – Asymmetric GARCH (VARMA-AGARCH) ของ McAleer (2009) และแบบจำลอง Constant Conditional Correlation (CCC) ของ Bollerslev (1990))

1. แบบจำลอง Vector Autoregressive Moving Average-GARCH (VARMA-GARCH) เพื่อรวมความสัมพันธ์ของความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Volatility) ระหว่างตัวแปรภายในโดย Ling and McAleer (2003) สมมติให้ตัวแปรสุ่มทางบวก (Positive Shocks) และตัวแปรสุ่มทางลบ (Negative Shocks) ส่งผลต่อความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Volatility) เหมือนกัน โดยกำหนดให้เวกเตอร์ของ Conditional Mean และ Conditional Variance ของตัวแปรภายใน $(m \geq 2)$ มีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$Y_t = E(Y_t | F_{t-1}) + \varepsilon_t \tag{2.17}$$

$$\varepsilon_t = D_t \eta_t \tag{2.18}$$

$$Var(\varepsilon_t | F_{t-1}) = D_t \Gamma D_t \tag{2.19}$$

$$H_t = W + \sum_{i=1}^{q} A_i \vec{\varepsilon}_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j H_{t-j} \tag{2.20}$$

เมื่อ $H_t = (h_{1t}, ..., h_{mt})'$, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)'$, $D_t = diag\left(h_{i,t}^{\frac{1}{2}}\right)$, $\eta_t = (\eta_{1t}, ..., \eta_{mt})'$,

$\vec{\varepsilon}_t = \left(\varepsilon_{1t}^2, ..., \varepsilon_{mt}^2\right)'$, A_i และ B_j คือเมทริกขนาด $m \times m$ ที่ประกอบด้วย a_{ij} และ B_{ij} ตามลำดับ สำหรับ $i, j = 1, ..., m$ $I(\eta_t) = diag(I(\eta_{it}))$, F_t คือ ข้อมูลในอดีตที่สามารถหาได้ในช่วงเวลาที่ t ถ้า A_i และ B_j ไม่เป็น Diagonal Matrix จะเกิดผลของการส่งผ่านของความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (Spillover Effect) สำหรับแบบจำลอง VARMA-GARCH เมทริกของ Conditional Correlation ถูกกำหนดให้เป็น $E\left(\eta_t \eta_t'\right) = \Gamma$

เมื่อ A_i เป็นตัวแทนของ ARCH Effects (ผลกระทบในระยะสั้น) และ B_j เป็นตัวแทนของ GARCH Effects (ผลกระทบในระยะยาว) โดยเรียกว่า $\sum_{i=1}^{q} A_i + \sum_{j=1}^{p} B_j$

2 . Vector Autoregressive Moving Average-Asymmetric GARCH (VARMA-AGARCH) เพื่อรวมการพิจารณาถึงพฤติกรรมความไม่สมมาตรของผลกระทบจากตัวแปรสุ่มทางบวก (Positive Shocks) และตัวแปรสุ่มทางลบ (Negative Shocks) ที่ส่งผลต่อความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Volatility) McAleer (2009) ได้สร้างแบบจำลองและกำหนดคุณสมบัติทางสถิติของแบบจำลอง Vector Autoregressive Moving Average-Asymmetric GARCH (VARMA-AGARCH) ไว้ดังต่อไปนี้

$$H_t = W + \sum_{i=1}^{q} A_i \vec{\varepsilon}_{t-i} + \sum_{l=1}^{q} C_l I_{t-l} \vec{\varepsilon}_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j H_{t-j} \tag{2.21}$$

เมื่อ $H_t = (h_{1t},...,h_{mt})', W = (W_1,...,W_m)', \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{1t}^2,...,\varepsilon_{mt}^2)', A_i (i = 1,...,m)$ และ $C_i (i = 1,...,m)$ คือเมทริกขนาด $m \times m$ และ $I_t = diag(I_t,...,I_{mt})$ จะได้ว่า

$$I(\varepsilon_t) = \begin{cases} 1, \varepsilon_{i,t} < 0 \\ 0, \varepsilon_{i,t} \geq 0 \end{cases}$$

VARMA-AGARCH กำหนดให้ตัวแปรสุ่มทางบวกและทางลบส่งผลต่อความผันผวนอย่างมีเงื่อนไขแตกต่างกัน เมื่อ A_i เป็นตัวแทนของ ARCH Effects (ผลกระทบในระยะสั้น) และ B_j เป็นตัวแทนของ GARCH Effects (ผลกระทบในระยะยาว โดยเรียกว่า $\sum_{i=1}^{q} A_i + \sum_{j=1}^{p} B_j$

จากแบบจำลองสมการ (2.20) ถ้า $C_i = 0$ สำหรับทุก i แล้ว แบบจำลองจะกลายเป็น Vector Autoregressive Moving Average-GARCH(VARMA-GARCH)

3. แบบจำลอง Constant Conditional Correlation (CCC) แบบจำลอง Constant Conditional Correlation (CCC) ของ Bollerslev (1990) มีรูปแบบดังนี้

$$h_{it} = \omega_i + \sum_{k=1}^{p} a_i \varepsilon_{i,t-k}^2 + \sum_{l=1}^{q} B_i h_{i,t-l} \tag{2.22}$$

สำหรับ Matrices ที่ Conditional Correlation ถูกกำหนดให้เท่ากับ Γ ซึ่งเท่ากับ $\mathrm{E}(\eta_t \eta_t')$ พิจารณาจากสมการ $(\varepsilon_t = D_t \eta_t)$ จะได้

$$\Gamma = D_t^{-1} Q_t D_t^{-1} \tag{2.23}$$

โดยที่ Γ คือ Conditional Correlation Matrix ประมาณค่าได้จาก Standardized Shocks และ Q_t คือ Conditional Covariance Matrix, $D_t = diag(h_{1t}^{1/2},...,h_{mt}^{1/2})$ คือเมทริกเฉียง (Diagonal Matrix) ของ

ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขที่มี m ตัวแปร และ $\eta_t = (\eta_{1t},...,\eta_{mt})$ คือความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (Independent and identically distributed random error) แบบจำลอง CCC จะไม่มีผลของการส่งผ่านความผันผวน (Spillover Effect) ระหว่างตัวแปรและสหสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไข (Conditional Correlation) จะมีค่าคงที่หรือไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

4. แบบจำลอง Dynamic Conditional Correlation (DCC) Engle (2002) ได้เสนอแบบจำลอง Dynamic Conditional Correlation (DCC) ซึ่งมีการประมาณ Conditional Covariance matrix ออกเป็น2ขั้นตอน โดยขั้นแรก ทำการประมาณแบบจำลองความผันผวนแบบตัวแปรเดียว (Univariate Volatility Models) (h_t) ของตัวแปรแต่ละตัว ขั้นที่สองนำค่า Standard Deviations ที่ได้จากการประมาณขั้นตอนแรก นำมาประมาณค่าพารามิเตอร์แบบ DCC ซึ่งแบบจำลอง DCC สามารถแสดงได้ดังนี้

$$y_t | F_{t-1} \sim (0, Q_t), \quad t = 1,...,T \tag{2.24}$$

$$Q_t = D_t \Gamma_t D_t, \tag{2.25}$$

โดยที่ y_t คือ ตัวแปรที่ศึกษาในรูปของอัตราผลตอบแทน

$D_t = diag(h_{1t}^{1/2},...,h_{mt}^{1/2})$ คือ Diagonal Matrix ของ Conditional Variance

F_t คือ ข้อมูลข่าวสาร ณ เวลาที่ t

Q_t คือ เมทริกความแปรปรวนร่วมแบบมีเงื่อนไข (Conditional Covariance Matrix)

Conditional Variances ถูกสมมติตามแบบจำลองของ Univariate GARCH ได้ดังนี้

$$h_{it} = \omega_i + \sum_{k=1}^{q} a_{i,k}\varepsilon_{i,t-k}^2 + \sum_{l=1}^{p} B_{i,l} h_{i,t-l} \tag{2.26}$$

เมื่อแบบจำลอง Univariate GARCH ถูกนำมาประมาณ Standardized Shocks ($\eta_{it} = y_{it}/\sqrt{h_{it}}$) จะถูกนำมาใช้ในการประมาณ Dynamic Conditional Correlation ดังนี้

$$Q_t = (1-\theta_1-\theta_2)S + \theta_1\eta_{t-1}\eta'_{t-1} + \theta_2 Q_{t-1} \tag{2.27}$$

$$\Gamma_t = D_t^{-1} Q_t D_t^{-1} \tag{2.28}$$

หรือ

$$\Gamma_t = \{(diag(Q_{t)})^{-1/2}\} Q \{(diag(Q_t)^{-1/2}\} \tag{2.29}$$

โดยที่ Γ คือ Typical Constant Element โดย Γ เท่ากับ $p_{ij} = p_{ji}$

S คือ เมทริกความแปรปรวนแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional variance matrix) ของ η_t

η_t คือ ความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (Independent and identically distributed random error)

เมื่อ θ_1 และ θ_2 คือ Scalar Parameters ที่ผู้ใช้ดูผลกระทบของตัวแปรเชิงสุ่มในช่วงเวลาก่อนหน้า (Previous Standardized Shocks) และความสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไขที่มีการเปลี่ยนแปลงเชิงพลวัตรในช่วงเวลาก่อนหน้า (Previous Dynamic Conditional Correlation) ต่อความสัมพันธ์อย่างมีเงื่อนไขที่มีการเปลี่ยนแปลงเชิงพลวัตรในช่วงเวลาปัจจุบัน (Dynamic Conditional Correlation)

2.3.7 การประเมินผลการพยากรณ์ (Forecasting Evaluation) การประเมินผลการพยากรณ์เป็นการหาแบบจำลองที่เหมาะสม โดยทำการทดสอบว่าแบบจำลองใดเหมาะสมที่สุดจากเครื่องมือต่าง ๆ

1. รากที่สองของค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Root Mean Squared Error: RMSE) เป็นการคำนวณค่าความแตกต่างระหว่างค่าที่ประมาณได้กับค่าที่แท้จริง หากมีค่าน้อยแสดงว่าแบบจำลองสามารถประมาณค่าได้ใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริง ซึ่งคำนวณได้จากสมการ ดังนี้ (Pindyck & Rubinfeld, 1998)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t^s - Y_t^a\right)^2} \qquad (2.30)$$

โดยที่ Y_t^s คือ ค่าที่ประมาณได้จากแบบจำลอง

Y_t^a คือ คือ ค่าที่แท้จริง และ T คือ จำนวนคาบเวลาที่ใช้ในประมาณแบบจำลอง

2.4 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

รสสุคนธ์ เรืองพิพัฒนพันธุ์ (2551) ทำการศึกษาการประมาณค่าความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของราคาหลักทรัพย์ในกลุ่มเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร โดยวิธีอารีมาการ์ช อีการ์ช และทีการ์ช โดยใช้ข้อมูลราคาปิดรายวันของหลักทรัพย์ บริษัท ทรู คอร์ปอเรชั่น จำกัด (มหาชน) บริษัท แอดวานซ์ อินโฟร์ เซอร์วิส จำกัด (มหาชน) และบริษัทสามารถเทเลคอม จำกัด (มหาชน) ตั้งแต่เดือนพฤษภาคม พ.ศ. 2546 ถึงเดือนเมษายน พ.ศ. 2551 ผลการทดสอบความนิ่งของข้อมูลพบว่าอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ทั้ง 4 หลักทรัพย์ มีลักษณะนิ่งที่ระดับ I(0) และพบว่าควรลงทุนในหลักทรัพย์ บริษัท สามารถ เทเลคอม จำกัด (มหาชน) มากที่สุด เนื่องจากมีอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยสูงสุด และมีความผันผวนน้อย รองลงมาคือหลักทรัพย์บริษัทสามารถคอร์ปอเรชั่น จำกัด (มหาชน) และบริษัทแอดวานซ์อินโฟร์ เซอร์วิส จำกัด (มหาชน) และหลักทรัพย์ที่ไม่ควรลงทุนคือหลักทรัพย์ บริษัททรูคอร์ปอเรชั่น จำกัด (มหาชน) เนื่องจากมีอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยน้อย และมีค่าความผันผวนสูง

จุฑามาศ สุพรจักร (2552) ได้ทำการศึกษาเรื่องการวิเคราะห์ความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าในตลาดอนุพันธ์ไทย สหรัฐอเมริกา ญี่ปุ่น และฮ่องกง โดยใช้แบบจำลอง ARIMA GARCH และนำข้อมูลอนุกรมเวลาราคาปิดรายวันมาใช้ โดยนับตั้งแต่วันที่ 28 เดือน เมษายน พ.ศ.2550 ถึงวันที่ 31 เดือน พฤษภาคม พ.ศ.2551 ทั้งนี้มีข้อมูลจากตลาดอนุพันธ์ไทย (TFEX) จำนวน 636 ข้อมูล ตลาดอนุพันธ์ดาวน์โจนส์ (DOW JONES) จำนวน 659 ข้อมูล ตลาดอนุพันธ์เอสแอนด์พี (S&P) จำนวน 664 ข้อมูล ตลาดอนุพันธ์นิเคอิ (NIKKEI) จำนวน 617 ข้อมูล และตลาดอนุพันธ์ฮั่งเส็ง (HANG SENG) จำนวน 638 ข้อมูล ผลการทดสอบยูนิทรูท โดยวิธี Augmented Dickey-Fuller Test (ADF Test) พบว่า ข้อมูลอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าทั้ง 4 ประเทศมีลักษณะนิ่งที่ระดับ Level (I(0)) จากการพิจารณาผลคอเรลโลแกรม ได้ทำการเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมเพียงรูปแบบเดียวต่อการศึกษาในครั้งนี้ นั่นคือ แบบจำลอง ARIMA GARCH และเมื่อทำการตรวจสอบความถูกต้องทั้งหมดของแบบจำลอง พบว่า มีลักษณะเป็นไวท์นอยส์ (White Noise) ณ ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ 0.05 ผลการพยากรณ์อัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าของแต่ละประเทศ พบว่า แบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดสำหรับอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ของตลาดอนุพันธ์ไทย ดาวน์โจน เอสแอนด์พี นิเคอิ และฮั่งเส็ง คือ แบบจำลอง AR (3) MA (3) และ E-GARCH (1,1) แบบจำลอง AR (16) MA (16) และ E-GARCH (1,1) แบบจำลอง AR (11) MA (11) และ E-GARCH (1,1) แบบจำลอง AR (1) AR (6) MA (1) MA (6) และ E-GARCH (1,1) แบบจำลอง AR (1) AR (33) MA(1) MA (33) และ E-GARCH (1,1) ตามลำดับ การศึกษาการวิเคราะห์ความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้าในตลาดอนุพันธ์แต่ละตลาดนั้น เป็นแบบจำลองที่แตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ของแต่ละประเทศ ซึ่งช่วยให้นักลงทุนมีความเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของดัชนีราคาหลักทรัพย์ล่วงหน้า ซึ่งจะนำไปสู่ความสามารถในการลงทุนให้เหมาะสมกับเป้าหมายการลงทุนของนักลงทุนแต่ละคนต่อไป

เพชรลักษณ์ บุญญาคุณากร (2552) ทำการศึกษาเรื่องวิเคราะห์ความผันผวนราคาทองคำแท่งในรูปของค่าเงินบาท ซึ่งทำการวิเคราะห์จากแบบจำลอง Autoregressive Conditional Hetoeroscedasticity (ARCH) แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH) แบบจำลอง GJR และแบบจำลอง EGARCH แล้วใช้แบบจำลองความผันผวนตัวแปรเดียว ได้แก่ ARCH(1) GARCH(1,1) GJR(1,1) EGARCH(1,1) โดยทำการพิจารณาระดับนัยสำคัญว่ามีความสำคัญหรือไม่แล้วนำมาทำแบบจำลองพยากรณ์ โดยพิจารณาค่า RMSE ที่มีค่าต่ำสุดจะได้แบบจำลองที่ดีที่สุดในการพยากรณ์ จากผลการศึกษาพบว่าข้อมูลมีลักษณะนิ่ง โดยวิธี ADF test และแบบจำลองความผันผวนตัวแปรเดียว พบว่าแบบจำลอง ARCH(1) และ GARCH(1,1) มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดง

ว่าความผันผวนในราคาทองคำแท่งขึ้นอยู่กับความผันผวนราคาทองคำแท่งในคาบเวลาที่ผ่านมา ส่วนแบบจำลอง GJR(1,1) และ EGARCH(1,1) มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าความผันผวนราคาทองคำแท่งเป็นอสมการ แต่ไม่มี Leverage ในแบบจำลอง EGARCH(1,1) จากการเปรียบเทียบความสามารถในการพยากรณ์ของแบบจำลองพบว่าแบบจำลอง EGARCH พยากรณ์ได้ดีที่สุด วัดจาก RMSE มีค่าต่ำสุด

Wolfgang, Polasekและ Ren (2001) ได้ศึกษาเรื่อง Volatility Analysis During the Asia Crisis: a Multivariate GARCH-M Model for Stock Returns in the U.S., Germany and Japan โดยในการศึกษาครั้งนี้ได้นำเอาข้อมูลอัตราผลตอบแทนหลักทรัพย์รายวันของสหรัฐอเมริกา เยอรมันและญี่ปุ่นภายในช่วงระยะเวลา 2 ปี นั้นคือ ปี ค.ศ. 1996-1998 ซึ่งเป็นช่วงเวลาระหว่างที่เกิดวิกฤตเศรษฐกิจของเอเชียมาทำการศึกษาโดยใช้วิธี Multivariate GARCH เพื่อดูความผันผวนและผลกระทบในอนุกรมเวลานั้น ทั้งนี้พวกเขายังสนใจที่จะศึกษาว่าความผันผวนในผลตอบแทนของหลักทรัพย์นั้น ๆ จะส่งผลต่อผลตอบแทนของหลักทรัพย์ในอนาคตหรือไม่อีกด้วย จากการศึกษาพบว่า ก่อนและหลังวิกฤตเศรษฐกิจจากเอเชียความผันผวนของตลาดหลักทรัพย์ในทั้ง 3 ประเทศมีความผันผวนที่แตกต่างกันออกไป และมีความผันผวนของอัตราผลตอบแทนที่แตกต่าง

Manera, McAleer and Grasso (2004) ศึกษาความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (Conditional volatility) และความสัมพันธ์ของ Standardized shocks ของผลตอบแทนของ Spot และ Forward Price ของ Tapis oil โดยใช้แบบจำลอง Constant Condition Correlation Multivariate GARH (CCC-GARCH) ของ Bollerslev (1990), Vector Autoregressive Moving Average – GARCH (VARMA-GARCH) ของ Ling and McAleer (2003), VARMA – Asymmetric GARCH (VARMA-AGARCH) ของ Chan et al. (2002) และ the Dynamic Conditional Correlation (DCC) ของ Engle (2002). โดยใช้ข้อมูลในช่วงเวลาตั้งแต่ 2 มิถุนายน 1992 ถึง 16 มกราคม 2004 จากผลการศึกษาพบว่า ARCH และ GARCH effects ส่งผลต่อความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (Conditional volatility) ของผลตอบแทนของ Spot และ Forward Price ของ Tapis oil, และยังพบว่ามี Interdependence ของความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (Conditional volatility) ระหว่างตลาด Spot และ Forward Price มีพฤติกรรมแบบไม่สมมาตรจากผลกระทบจากตัวแปรสุ่มทางบวก (Positive shocks) และตัวแปรสุ่มทางลบ (Negative shock)