

บทที่ 4

ระเบียบวิธีวิจัย

4.1 ข้อมูลที่ใช้ในการศึกษา

การศึกษานี้ใช้ข้อมูลทศนิยมแบบพาแนล (Panel data) เป็นรายปีย้อนหลัง 20 ปี ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2533 ถึงปี พ.ศ. 2552 จำนวน 22 ประเทศโดยมีการใช้การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น รวมทั้งสิ้น 440 ตัวอย่างมีรายละเอียดดังนี้

4.1.1 ข้อมูลผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศต่อประชากร ณ ราคาคงที่ปี พ.ศ. 2548 (GDP per capita at constant price) โดยมีหน่วยเป็น International Dollar จากฐานข้อมูลดัชนีการพัฒนาลोक (World Development Indicator: WDI)

4.1.2 ข้อมูลความยาวรวมของเครือข่ายถนน โดยมีหน่วยเป็นกิโลเมตรจากฐานข้อมูลดัชนีการพัฒนาลोक (World Development Indicator: WDI)

4.1.3 ข้อมูลความยาวรวมของทางรถไฟ โดยมีหน่วยเป็นกิโลเมตรจากฐานข้อมูลดัชนีการพัฒนาลोक (World Development Indicator: WDI)

4.1.4 ข้อมูลจำนวนประชากรจากฐานข้อมูลดัชนีการพัฒนาลोक (World Development Indicator: WDI)

4.2 วิธีการวิจัย

การศึกษานี้ใช้ข้อมูลพาแนล ที่มีลักษณะของข้อมูลภาคตัดขวางและอนุกรมเวลาร่วมกัน โดยกำหนดให้ $\ln(GDP)_{it}$ แทนข้อมูลพาแนลของผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศต่อประชากร ณ ราคาคงที่ปี 2005 ในรูปลอการิทึมธรรมชาติ (Natural logarithm) $\ln(road)_{it}$ แทนความยาวเครือข่ายถนนในรูปลอการิทึมธรรมชาติ $\ln(rail)_{it}$ เป็นข้อมูลความยาวของทางรถไฟ ในรูปลอการิทึมธรรมชาติ $\ln(roadper)_{it}$ แทนความยาวเครือข่ายถนนต่อประชากรในรูปลอการิทึมธรรมชาติ และ $\ln(railper)_{it}$ เป็นข้อมูลความยาวของทางรถไฟต่อประชากรในรูปลอการิทึมธรรมชาติ โดยมีข้อมูลภาคตัดขวางจำนวน 22 ประเทศ และข้อมูลอนุกรมเวลาจำนวน 20 ปี ตั้งแต่ปี 1990 ถึงปี 2009 ดังนั้น $i=1,2,\dots,22$ และ $t=1,2,\dots,20$

4.2.1 การทดสอบพาแนลยูนิทรูท (Panel unit root tests)

เนื่องจากข้อมูลพาแนลมีลักษณะของข้อมูลภาคตัดขวางและข้อมูลอนุกรมเวลาร่วมกัน จึงทำการทดสอบความนิ่งตัวแปร $\ln(GDP)_{it}$, $\ln(road)_{it}$, $\ln(rail)_{it}$, $\ln(roadper)_{it}$ และ $\ln(railper)_{it}$ ก่อนโดยใช้วิธีของ Levin, Lin and Chu (LLC), Breitung, Im, Pesaran and Shin (IPS), Fisher type โดยใช้ ADF และ PP-test และ Hadri ที่กำหนดให้มีค่าคงที่ (Intercept) และ แนวโน้มเวลา (Trend) แตกต่างกันไป

1. วิธีการทดสอบของ Levin, Lin and Chu (LLC) (2000)

สมมติฐานในการทดสอบคือ

$$H_0 : \rho_i = 0 \quad (\text{ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท})$$

$$H_a : \rho_i < 0 \quad (\text{ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท})$$

มีขั้นตอนการทดสอบ ดังนี้

$$\Delta \ln(GDP) = \rho \ln(GDP)_{i,t-j} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta \ln(GDP)_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mi} + \varepsilon_{it} \quad (4.1)$$

$$\Delta \ln(road) = \rho \ln(road)_{i,t-j} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta \ln(road)_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mi} + \varepsilon_{it} \quad (4.2)$$

$$\Delta \ln(rail) = \rho \ln(rail)_{i,t-j} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta \ln(rail)_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mi} + \varepsilon_{it} \quad (4.3)$$

$$\Delta \ln(roadper) = \rho \ln(roadper)_{i,t-j} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta \ln(roadper)_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mi} + \varepsilon_{it} \quad (4.4)$$

$$\Delta \ln(railper) = \rho \ln(railper)_{i,t-j} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta \ln(railper)_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mi} + \varepsilon_{it} \quad (4.5)$$

โดยที่	$\Delta \ln(GDP)_{it}$	คือ	ผลต่างของ $\ln(GDP)_{it}$
	$\Delta \ln(road)$	คือ	ผลต่างของ $\ln(road)_{i,t-j}$
	$\Delta \ln(rail)$	คือ	ผลต่างของ $\ln(rail)_{i,t-j}$
	$\Delta \ln(roadper)$	คือ	ผลต่างของ $\ln(roadper)_{i,t-j}$
	$\Delta \ln(railper)$	คือ	ผลต่างของ $\ln(railper)_{i,t-j}$
	p_i	คือ	จำนวน Lag order ของ $\Delta \ln(GDP)_{it}$, $\Delta \ln(road)_{it}$, $\Delta \ln(rail)_{it}$, $\Delta \ln(roadper)_{it}$ และ $\Delta \ln(railper)_{it}$
	α_{mi}	คือ	เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์
	d_{mi}	คือ	จำนวนของตัวแปรภายนอก
	ε_{it}	คือ	ค่าความคลาดเคลื่อน

ขั้นตอนที่ 1 ถดถอยสมการ Augmented Dickey-Fuller (ADF) ตามสมการ (3.50) ในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง จากนั้นปรับส่วนที่เหลือ (Residual) เพื่อควบคุมความแปรปรวนระหว่างข้อมูลภาคตัดขวาง

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณอัตราส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระยะยาวกับระยะสั้น และในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง โดยอัตราส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระยะยาวคำนวณจาก $\hat{s}_i = \hat{\sigma}_{yi} / \hat{\sigma}_{ei}$

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบข้อมูลพหุภาคตัดขวางตามสมการ (3.54) โดยการถดถอยแบบ Pooled regression

การพิจารณาค่าสถิติ ถ้าค่าสถิติ t_ρ^* ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพหุภาคตัดขวางไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ t_ρ^* ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพหุภาคตัดขวางมียูนิทรูท

2. วิธีการทดสอบของ Im, Pesaran and Shin (IPS) (2003)

เป็นการทดสอบโดยใช้ Augmented Dickey-Fuller (ADF) โดยสมมติฐานในการทดสอบคือ

$$H_0 : \rho_i = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{ข้อมูลพหุภาคตัดขวางไม่มียูนิทรูท})$$

$$H_a : \begin{cases} \rho_i < 0 & \text{for } i = 1, 2, \dots, N_1 \\ \rho_i = 0 & \text{for } i = N_1 + 1, \dots, N \end{cases} \quad (\text{ข้อมูลพหุภาคตัดขวางไม่มียูนิทรูท})$$

จากข้อสมมติของ IPS ค่าสถิติที่ t_{IPS} ที่ใช้ทดสอบเป็นไปตามสมการ (3.62) คือ

$$t_{IPS} = \frac{\sqrt{N} \left(\bar{t} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[t_{iT} | \rho_i = 0] \right)}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{var}[t_{iT} | \rho_i = 0]}} \Rightarrow N(0,1) \quad (3.62)$$

การพิจารณาค่าสถิติ ถ้าค่าสถิติ t_{IPS} ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพหุภาคตัดขวางไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ t_{IPS} ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพหุภาคตัดขวางมียูนิทรูท

3. วิธีการทดสอบของ Breitung

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

$$H_0 : \rho = 0 \quad (\text{ข้อมูลพหุภาคตัดขวางไม่มียูนิทรูท})$$

$$H_a : \rho < 0 \quad (\text{ข้อมูลพหุภาคตัดขวางไม่มียูนิทรูท})$$

โดยมีขั้นตอนการทดสอบเหมือนกับการทดสอบของ LLC แต่ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบแตกต่างกัน โดยค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบของ Breitung ตามสมการ (3.65) คือ

$$B_{nT} = \left[\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{nT^2} \right) \sum_{i=1}^n \sum_{t=2}^{T-1} (v_{it-1}^*)^2 \right]^{-1/2} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{nT}} \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{t=2}^{T-1} (e_{it}^*) (v_{it-1}^*) \right) \right] \quad (3.65)$$

การพิจารณาค่าสถิติถ้าค่าสถิติ B_{nT} ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลักนั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ B_{nT} ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติ แสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลมียูนิทรูท

4. วิธีการทดสอบของ Fisher-type test

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

H_0 : ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

H_a : ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

ทดสอบโดยรวมค่า p-value ของค่าสถิติที่ใช้ทดสอบความนิ่งของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง จากสมการ ADF ตามสมการ (4.1)-(4.5) นั้นจะได้ค่าสถิติที่ใช้ทดสอบตามสมการ (3.67) และ (3.68) ดังนี้

$$P = -2 \sum_{i=1}^N \ln p_i \rightarrow \chi^2_{2N} \quad (3.67)$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \Phi^{-1}(p_i) \quad (3.68)$$

การพิจารณาค่าสถิติ ถ้าค่า P-statistic และ Z-statistic ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าทั้ง P-statistic และ Z-statistic ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

5. วิธีการทดสอบของ Hadri

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

H_0 : ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

H_a : ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

เป็นทดสอบโดยการประมาณค่าส่วนที่เหลือ (Residual) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ประเมินค่าตัวแปร $\ln(GDP)_{it}$, $\ln(road)_{it}$, $\ln(rail)_{it}$, $\ln(roadper)_{it}$ และ $\ln(railper)_{it}$ ที่มี

ค่าคงที่ (Constant) หรือมีทั้งค่าคงที่ (Constant) และแนวโน้ม (Trend) ดังนั้นค่าสถิติที่ใช้ทดสอบ
เป็นไปตามสมการ (3.76) คือ

$$Z = \sqrt{N} (LM - \xi_1) / \zeta \rightarrow N(0,1) \quad (3.76)$$

ถ้าค่าส่วนที่เหลือจากการถดถอยเป็น Heteroskedasticity จะใช้ค่าสถิติ LM_1 ตาม
สมการที่ (3.74) แต่ถ้าส่วนที่เหลือจากการถดถอยเป็น Homoskedasticity จะใช้ค่าสถิติ LM_2 ตาม
สมการที่ (3.75) ดังนี้

$$LM_1 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T S_{it}^2 \right) / \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \quad (3.74)$$

$$LM_2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T S_{it}^2 / \hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2 \right) \right) \quad (3.75)$$

การพิจารณาค่าสถิติ ถ้า Z-statistic ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ
(Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ Z-statistic ที่
ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

เมื่อทำการทดสอบพาแนลยูนิทรูทของตัวแปร ผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศต่อ
ประชากร ราคาคงที่ ($\ln(GDP)$) ความยาวของเครือข่ายถนน ($\ln(road)$) ความยาวของทาง
รถไฟ ($\ln(rail)$) ความยาวของเครือข่ายถนนต่อประชากร ($\ln(roadper)$) และความยาวของรถไฟ
ต่อประชากร ($\ln(railper)$) โดยใช้วิธีการทดสอบทั้ง 5 วิธีดังกล่าวแล้ว จากนั้นทำการพิจารณา
เปรียบเทียบผลการทดสอบดังกล่าว ถ้าข้อมูลที่ได้มีลักษณะ $I(1)$ (Order of integration One) ที่
ระดับเดียวกันสามารถนำข้อมูลดังกล่าวไปทดสอบความสัมพันธ์ในระยะยาวโดยใช้วิธีพาแนลโคอินทิ
เกรชัน

4.2.2 การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน (Panel cointegration tests)

การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันในการศึกษานี้ เป็นการทดสอบความสัมพันธ์ใน
ระยะยาวระหว่างตัวแปร $\ln(GDP)_{it}$ กับ $\ln(road)_{it}$, $\ln(rail)_{it}$, $\ln(roadper)_{it}$ และ
 $\ln(railper)_{it}$ ว่าตัวแปรที่ทำการทดสอบนั้นมีอิทธิพลต่อกันหรือไม่ ด้วยวิธีการทดสอบ 3 วิธี ได้แก่
วิธีทดสอบแบบ Kao, การทดสอบแบบ Pedroni และ การทดสอบแบบ Fisher ดังนี้

1. การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Kao (Kao test)

Kao (1999) ได้เสนอการทดสอบยูนิทด้วยวิธี DF และ ADF สำหรับส่วนตกค้าง (e_{it}) เพื่อทดสอบการร่วมกันไปด้วยกัน (cointegration) พิจารณาแบบจำลอง (panel regression model) ของแต่ละตัวแปร ดังนี้

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_i + \beta_i \ln(road)_{it} + e_{it} \quad (4.6)$$

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_i + \beta_i \ln(rail)_{it} + e_{it} \quad (4.7)$$

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_i + \beta_i \ln(roadper)_{it} + e_{it} \quad (4.8)$$

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_i + \beta_i \ln(railper)_{it} + e_{it} \quad (4.9)$$

โดยที่ตัวแปรทุกตัวมีลักษณะเป็น $I(1)$ และค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบแบบ ADF ตามสมการ (3.119) คือ

$$ADF = \frac{t_{ADF} + \frac{\sqrt{6N}\hat{\sigma}_v}{2\hat{\sigma}_{0v}}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{0v}^2}{2\hat{\sigma}_v^2} + \frac{3\hat{\sigma}_v^2}{10\hat{\sigma}_{0v}^2}}} \quad (3.119)$$

โดยที่ t_{ADF} คือ t-statistic ของ ρ จากสมการ $\hat{e}_{it} = \rho\hat{e}_{it-1} + \sum_{j=1}^p \theta_j \Delta\hat{e}_{it-j} + v_{itp}$

ถ้าค่าสถิติที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติแสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มีโคอินทิเกรชัน แต่ถ้าค่าสถิติที่ได้จากการประมาณมีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมีโคอินทิเกรชัน

2. การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Pedroni (Engle-Granger based)

สมมติฐานในการทดสอบคือกรณีที่ข้อมูลภาคตัดขวางทุกหน่วยมีลักษณะเหมือนกัน (Homogeneous)

$$H_0 : \rho_i = 1 \quad (\text{ไม่มีโคอินทิเกรชัน})$$

$$H_a : (\rho_i = \rho) < 1 \quad (\text{มีโคอินทิเกรชัน})$$

กรณีที่ข้อมูลภาคตัดขวางแต่ละหน่วยมีลักษณะแตกต่างกัน (Heterogeneous)

$$H_0 : \rho_i = 1 \quad (\text{ไม่มีโคอินทิเกรชัน})$$

$$H_a : \rho_i < 1 \quad (\text{มีโคอินทิเกรชัน})$$

โดยสมมติให้ค่าคงที่ (Intercept) และค่าแนวโน้ม (Trend) มีความแตกต่างกันระหว่างข้อมูลแต่ละหน่วย จากสมการ

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_i + \beta_i \ln(road)_{it} + e_{it} \quad (4.6)$$

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_i + \beta_i \ln(rail)_{it} + e_{it} \quad (4.7)$$

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_i + \beta_i \ln(roadper)_{it} + e_{it} \quad (4.8)$$

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_i + \beta_i \ln(railper)_{it} + e_{it} \quad (4.9)$$

โดยที่ t คือ เวลา (ปี) ; i คือ หน่วยภาคตัดขวาง (ประเทศ)
 α_i คือ พจน์ส่วนตัด (Intercept) อาจถูกเขตให้เท่ากับศูนย์ก็ได้
 δ_i คือ สัมประสิทธิ์ของค่าแนวโน้ม (Trend coefficient) อาจถูกเขตให้เท่ากับศูนย์ก็ได้

จากนั้นทำการทดสอบส่วนที่เหลือดังกล่าวว่าเป็น $I(1)$ หรือไม่ ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Pedroni ตามสมการ (3.123)

$$\frac{\sum_{N,T} - \mu\sqrt{N}}{\sqrt{v}} \Rightarrow N(0,1) \quad (3.123)$$

การพิจารณาคือ ถ้าค่าสถิติที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติแสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มีโคอินทิเกรชัน แต่ถ้าค่าสถิติที่ได้จากการประมาณมีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมีโคอินทิเกรชัน

3. การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Fisher (Fisher test)

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบคือ

H_0 : ไม่มีโคอินทิเกรชัน

H_a : มีโคอินทิเกรชัน

ค่าสถิติที่ใช้ทดสอบตามสมการ (3.124) คือ

$$2 \sum_{i=1}^N \log(\pi_i) \rightarrow \chi_{2n}^2 \quad (3.124)$$

โดยที่ π_i คือ p -value จากการทดสอบโคอินทิเกรชันแต่ละตัว สำหรับข้อมูลตัดขวาง i ภายใต้สมมติฐานหลักการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน

การพิจารณาคือ ถ้าค่าสถิติที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติแสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มีโคอินทิเกรชัน แต่ถ้าค่าสถิติที่ได้จากการประมาณมีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมีโคอินทิเกรชัน

เมื่อทำการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแล้วหากผลที่ได้ระบุว่าตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กันก็จะสามารถประมาณค่าความสัมพันธ์ในแบบต่าง ๆ ได้ต่อไป

4.2.3 การประมาณค่าแบบจำลองพาแนล (Panel estimation)

การประมาณค่าแบบจำลองเป็นการศึกษาเพื่อดูขนาดอิทธิพลของตัวแปรอิสระ ในที่นี้คือ เครื่องข่ายถนน($\ln(\text{road})_{it}$) ทางรถไฟ($\ln(\text{rail})_{it}$) เครื่องข่ายถนนต่อประชากร($\ln(\text{roadper})_{it}$) ทางรถไฟต่อประชากร($\ln(\text{railper})_{it}$) ว่าส่งผลต่อตัวแปรผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในประเทศต่อประชากร ณ ราคาคงที่ ($\ln(\text{GDP})_{it}$) ขนาดเท่าใดโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary least square: OLS)

1. วิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square: OLS)

ทำการประมาณค่าตัวแปร $\ln(\text{GDP})_{it}$ กับตัวแปร $\ln(\text{road})_{it}$, $\ln(\text{rail})_{it}$, $\ln(\text{roadper})_{it}$ และ $\ln(\text{railper})_{it}$ ด้วยวิธี OLS จะได้ตัวประมาณ $\hat{\beta}_{OLS}$ จากสมการ OLS ดังนี้

$$\hat{\beta}_{road} = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln(\text{road})_{it} - \overline{\ln(\text{road})}_i)^2 \right]^{-1} \\ \times \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln(\text{road})_{it} - \overline{\ln(\text{road})}_i) (\ln(\text{GDP})_{it} - \overline{\ln(\text{GDP})}_i)$$

$$\hat{\beta}_{rail} = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln(\text{rail})_{it} - \overline{\ln(\text{rail})}_i)^2 \right]^{-1} \\ \times \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln(\text{rail})_{it} - \overline{\ln(\text{rail})}_i) (\ln(\text{GDP})_{it} - \overline{\ln(\text{GDP})}_i)$$

$$\hat{\beta}_{roadper} = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln(\text{roadper})_{it} - \overline{\ln(\text{roadper})}_i)^2 \right]^{-1} \\ \times \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln(\text{roadper})_{it} - \overline{\ln(\text{roadper})}_i) (\ln(\text{GDP})_{it} - \overline{\ln(\text{GDP})}_i)$$

$$\hat{\beta}_{railper} = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln(\text{railper})_{it} - \overline{\ln(\text{railper})}_i)^2 \right]^{-1} \\ \times \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\ln(\text{railper})_{it} - \overline{\ln(\text{railper})}_i) (\ln(\text{GDP})_{it} - \overline{\ln(\text{GDP})}_i)$$

โดยที่ i คือ ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1, \dots, N$

t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1, \dots, T$

$\ln(\text{GDP})_{it}$ คือ ตัวแปรตาม

$\ln(\text{road})_{it}$ คือ ตัวแปรอธิบาย

$\ln(\text{rail})_{it}$ คือ ตัวแปรอธิบาย

$\ln(\text{roadper})_{it}$	คือ	ตัวแปรอธิบาย
$\ln(\text{railper})_{it}$	คือ	ตัวแปรอธิบาย
$\overline{\ln(\text{GDP})}$	คือ	ค่าเฉลี่ยของ $\ln(\text{GDP})_{it}$
$\overline{\ln(\text{road})}$	คือ	ค่าเฉลี่ยของ $\ln(\text{road})_{it}$
$\overline{\ln(\text{rail})}$	คือ	ค่าเฉลี่ยของ $\ln(\text{rail})_{it}$
$\overline{\ln(\text{roadper})}$	คือ	ค่าเฉลี่ยของ $\ln(\text{roadper})_{it}$
$\overline{\ln(\text{railper})}$	คือ	ค่าเฉลี่ยของ $\ln(\text{railper})_{it}$

ซึ่งการประมาณค่าแบบจำลองที่มีสมมติฐานของค่าคงที่และสัมประสิทธิ์ที่แตกต่างกัน จึงต้องทดสอบว่าจะประมาณค่าแบบจำลองในรูปแบบใดระหว่างแบบจำลอง Fixed effects, แบบจำลอง Random effects หรือ แบบจำลอง Pooled estimator

1.1 แบบจำลอง Fixed effects

ทำการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่กำหนดให้ค่าคงที่ (Intercept term) มีการผันแปรตามแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง จากสมการ (3.77) จะได้แบบจำลอง Fixed effects ของตัวแปร $\ln(\text{GDP})_{it}$ และ $\ln(\text{road})_{it}$, $\ln(\text{rail})_{it}$, $\ln(\text{roadper})_{it}$ และ $\ln(\text{railper})_{it}$ ดังนี้

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \alpha_i + \Delta \ln(\text{road})'_{it} \beta + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \alpha_i + \Delta \ln(\text{rail})'_{it} \beta + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \alpha_i + \Delta \ln(\text{roadper})'_{it} \beta + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \alpha_i + \Delta \ln(\text{railper})'_{it} \beta + \varepsilon_{it} \quad \varepsilon_{it} \sim \text{IID}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

โดยมีข้อสมมติคือ $\ln(\text{road})_{it}$, $\ln(\text{rail})_{it}$, $\ln(\text{roadper})_{it}$ และ $\ln(\text{railper})_{it}$ กับ ε_{it} เป็นอิสระกันทุกค่า สามารถเขียนรูปแบบการถดถอยที่รวมเอาตัวแปรหุ่น (Dummy variable) สำหรับแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง i ในแบบจำลองได้ดังนี้

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \sum_{j=1}^N \alpha_j d_{ij} + \Delta \ln(\text{road})'_{it} \beta + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \sum_{j=1}^N \alpha_j d_{ij} + \Delta \ln(\text{rail})'_{it} \beta + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \sum_{j=1}^N \alpha_j d_{ij} + \Delta \ln(\text{roadper})'_{it} \beta + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \sum_{j=1}^N \alpha_j d_{ij} + \Delta \ln(\text{railper})'_{it} \beta + \varepsilon_{it}$$

โดยที่ $d_{ij} = 1$ ถ้า $i = j$ และ $d_{ij} = 0$ ถ้า $i \neq j$

1.2 แบบจำลอง Random effects

ถ้ากำหนดให้ α_i เป็นตัวแปรสุ่ม (Random Factors) ที่เป็นอิสระและมีการแจกแจงในแต่ละหน่วย ดังนั้นจะได้แบบจำลอง Random effects ดังนี้

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \mu + \beta \Delta \ln(\text{road})'_{it} + \alpha_i + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \mu + \beta \Delta \ln(\text{rail})'_{it} + \alpha_i + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \mu + \beta \Delta \ln(\text{roadper})'_{it} + \alpha_i + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \mu + \beta \Delta \ln(\text{railper})'_{it} + \alpha_i + \varepsilon_{it}, \quad \varepsilon_{it} \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2); \alpha_i \sim IID(0, \sigma_\alpha^2)$$

โดยที่ $\alpha_i + \varepsilon_{it}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน (Error Term) ที่ประกอบด้วยส่วนประกอบเฉพาะแต่ละหน่วยภาคตัดขวางที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาและส่วนที่เหลือ ซึ่งสมมติให้ไม่มีความสัมพันธ์กันตลอดช่วงเวลา

1.3 การประมาณแบบ Pooled estimator

เป็นการวิเคราะห์ที่สมมติให้ค่าคงที่และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการมีค่าเท่ากันทุกหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) และช่วงเวลา (Time) ที่พิจารณา จะได้แบบจำลองของ Pooled estimator จากสมการ (3.99) คือ

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \alpha_i + \Delta \ln(\text{road})'_{it} \beta_{it} + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \alpha_i + \Delta \ln(\text{rail})'_{it} \beta_{it} + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \alpha_i + \Delta \ln(\text{roadper})'_{it} \beta_{it} + \varepsilon_{it}$$

$$\Delta \ln(\text{GDP})_{it} = \alpha_i + \Delta \ln(\text{railper})'_{it} \beta_{it} + \varepsilon_{it}$$

โดยที่ i คือ จำนวนประเทศที่ทำการศึกษา $i = 1, \dots, 22$

t คือ จำนวนปีที่ทำการศึกษา $t = 1, \dots, 20$

$\Delta \ln(\text{GDP})_{it}$ คือ เวกเตอร์ 1×1 ของตัวแปร $\ln(\text{GDP})_{it}$

$\Delta \ln(\text{road})_{it}$ คือ เวกเตอร์ $k \times 1$ ของตัวแปร $\ln(\text{road})_{it}$

$\Delta \ln(\text{rail})_{it}$ คือ เวกเตอร์ $k \times 1$ ของตัวแปร $\ln(\text{rail})_{it}$

$\Delta \ln(\text{roadper})_{it}$ คือ เวกเตอร์ $k \times 1$ ของตัวแปร $\ln(\text{roadper})_{it}$

$\Delta \ln(\text{railper})_{it}$ คือ เวกเตอร์ $k \times 1$ ของตัวแปร $\ln(\text{railper})_{it}$

β_{it} คือ เวกเตอร์ $k \times 1$ ของค่าสัมประสิทธิ์

α_i	คือ	จำนวนจริง (ค่าคงที่)
ε_{it}	คือ	ค่าความคลาดเคลื่อน

4.2.4 การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพในระยะสั้น (Error Correction Model)

เมื่อได้ความสัมพันธ์ดุลยภาพในระยะยาวแล้วเราจะสามารถหาการปรับตัวในระยะสั้นได้โดยใช้ Error Correction Model (ECM)

ดังนั้นในขั้นตอนนี้จะวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลอง Error Correlation Model (ECM) เพื่อศึกษาผลกระทบการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพในระยะสั้นของการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ (GDP) กับตัวแปรเครือข่ายถนน ทางรถไฟ เครือข่ายถนนต่อประชากร และทางรถไฟต่อประชากรโดยมีรายละเอียด ดังนี้

การวิเคราะห์การปรับตัวระยะสั้นของตัวแปร จะใช้วิธีการ 2 ขั้นตอน ดังนั้น วิธีการ Panel ECM นั้นพิจารณาได้จากขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ถดถอยสมการพหุคูณโดยการเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมจาก 3 แบบจำลองได้แก่ แบบจำลอง Pooled Model แบบจำลอง Fixed-effect Model และแบบจำลอง Random-effect Model โดยใช้การทดสอบ Redundant Fixed Effects Tests และใช้การทดสอบ Hausman test เพื่อตัดสินใจเลือกระหว่างแบบจำลอง

ขั้นตอนที่ 2 ประเมินการแบบจำลอง Error Correction Model (ECM) พิจารณาได้จากแบบจำลอง Panel ECM ดังต่อไปนี้

พิจารณาการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพในระยะสั้นของการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและเครือข่ายถนน

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_0 \Delta \ln(\text{road})_{it} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \Delta \ln(\text{road})_{it-k} + \sum_{k=1}^m \beta_k \Delta (GDP)_{it-m} + \gamma ECM_{it-1} + v_{it}$$

พิจารณาการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพในระยะสั้นของการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและทางรถไฟ

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_0 \Delta \ln(\text{rail})_{it} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \Delta \ln(\text{rail})_{it-k} + \sum_{k=1}^m \beta_k \Delta (GDP)_{it-m} + \gamma ECM_{it-1} + v_{it}$$

พิจารณาการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพในระยะสั้นของการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและเครือข่ายถนนต่อประชากร

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_0 \Delta \ln(\text{roadper})_{it} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \Delta \ln(\text{roadper})_{it-k} + \sum_{k=1}^m \beta_k \Delta (GDP)_{it-m} + \gamma ECM_{it-1} + v_{it}$$

พิจารณาการปรับตัวเข้าสู่ดุลยภาพในระยะสั้นของการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและทางรถไฟต่อประชากร

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_0 \Delta \ln(\text{railper})_{it} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \Delta \ln(\text{railper})_{it-k} + \sum_{k=1}^m \beta_k \Delta (GDP)_{it-m} + \gamma ECM_{it-1} + v_{it}$$

โดยที่ Δ คือ อนุพันธ์ลำดับที่ 1 (first-order difference)

ECM คือ Error Correction Term ได้มาจากส่วนตกค้าง (residual) จากการถดถอยสมการในขั้นตอนแรก

γ คือ ความเร็วในการปรับตัวการออกนอกดุลยภาพกลับเข้าสู่ดุลยภาพ (Speed of adjust) โดยที่ $-1 \leq \gamma < 0$

4.2.5 การทดสอบความเป็นเหตุเป็นผล (Granger causality test)

เมื่อทำการทดสอบหาความสัมพันธ์ของตัวแปรระยะยาวและระยะสั้นแล้ว จากนั้นจะนำข้อมูลมาทดสอบว่าตัวแปรใดที่เป็นเหตุและตัวแปรใดเป็นผล และ/หรือตัวแปรทั้งสองเป็นเหตุผลซึ่งกันและกัน

ในขั้นตอนนี้จะทำการทดสอบความเป็นเหตุเป็นผลระหว่างตัวแปรการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจกับเครือข่ายถนนและทางรถไฟ โดยใช้วิธี Granger's causality Test ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ประมาณค่าส่วนที่เหลือจากการหาความสัมพันธ์ระยะยาว (Cointegrated Model) โดยสมมติให้ ECT_{it} คือ ค่าส่วนที่เหลือ (Error Correction Term : ε_{it}) จากการประมาณค่าแบบจำลองการหาความสัมพันธ์ระยะยาว

ขั้นที่ 2 ประมาณการแบบจำลอง Granger Causality Model ดังต่อไปนี้

พิจารณาความเป็นเหตุเป็นผลระหว่างการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและเครือข่ายถนน

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_{yi} + \Psi_{yi} ECT_{it-1} + \sum_{j=1}^J \delta_i^j \Delta \ln(GDP)_{it-j} + \sum_{j=1}^J \beta_i^j \Delta (\text{road})_{it-j} + \varepsilon_{it}$$

$$\ln(\text{road})_{it} = \alpha_{xi} + \Psi_{xi} ECT_{it-1} + \sum_{j=1}^J \delta_i^j \Delta \ln(\text{road})_{it-j} + \sum_{j=1}^J \beta_i^j \Delta (GDP)_{it-j} + \varepsilon_{it}$$

พิจารณาความเป็นเหตุเป็นผลระหว่างการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและทางรถไฟ

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_{yi} + \Psi_{yi} ECT_{it-1} + \sum_{j=1}^J \delta_i^j \Delta \ln(GDP)_{it-1} + \sum_{j=1}^J \beta_i^j \Delta(\text{rail})_{it-j} + \varepsilon_{it}$$

$$\ln(\text{rail})_{it} = \alpha_{yi} + \Psi_{yi} ECT_{it-1} + \sum_{j=1}^J \delta_i^j \Delta \ln(\text{rail})_{it-1} + \sum_{j=1}^J \beta_i^j \Delta(GDP)_{it-j} + \varepsilon_{it}$$

พิจารณาความเป็นเหตุเป็นผลระหว่างการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและเครือข่ายถนน
ต่อประชากร

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_{yi} + \Psi_{yi} ECT_{it-1} + \sum_{j=1}^J \delta_i^j \Delta \ln(GDP)_{it-1} + \sum_{j=1}^J \beta_i^j \Delta(\text{roadper})_{it-j} + \varepsilon_{it}$$

$$\ln(\text{roadper})_{it} = \alpha_{yi} + \Psi_{yi} ECT_{it-1} + \sum_{j=1}^J \delta_i^j \Delta \ln(\text{roadper})_{it-1} + \sum_{j=1}^J \beta_i^j \Delta(GDP)_{it-j} + \varepsilon_{it}$$

พิจารณาความความเป็นเหตุเป็นผลระหว่างการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและทาง
รถไฟต่อประชากร

$$\ln(GDP)_{it} = \alpha_{yi} + \Psi_{yi} ECT_{it-1} + \sum_{j=1}^J \delta_i^j \Delta \ln(GDP)_{it-1} + \sum_{j=1}^J \beta_i^j \Delta(\text{railper})_{it-j} + \varepsilon_{it}$$

$$\ln(\text{railper})_{it} = \alpha_{yi} + \Psi_{yi} ECT_{it-1} + \sum_{j=1}^J \delta_i^j \Delta \ln(\text{railper})_{it-1} + \sum_{j=1}^J \beta_i^j \Delta(GDP)_{it-j} + \varepsilon_{it}$$

โดยที่ Δ คือ อนุพันธ์ลำดับที่ 1 (first-order difference)
 ECT คือ Error Correction Term ซึ่งได้จากการประมาณค่า
แบบจำลองการหาความสัมพันธ์ระยะยาว
 Ψ_{it} คือ Adjust Coefficients

สมมติฐานในการทดสอบ คือ สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรทดสอบ (β_i^j) มีค่าแตกต่าง
จากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ โดยใช้ค่า F -statistic ในการตัดสินใจหรือพิจารณาค่า
สัมประสิทธิ์หน้า Error Correction Term (Ψ_{it}) ว่ามีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่ ซึ่งแสดงถึงการมี
ความสัมพันธ์เชิงเหตุและผลในระยะยาว

4.3 แบบจำลองที่ใช้ในการศึกษา

แบบจำลองที่ใช้ในการศึกษานี้พิจารณาจากทฤษฎีการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจตาม
แบบจำลองของ Ramsey โดยฟังก์ชันความพอใจของครัวเรือนขึ้นอยู่กับบริการบริโภค โดยสมมติให้
ครัวเรือนมีการเจริญเติบโตของประชากรที่อัตรา n และครัวเรือนจะมีการบริโภคและได้รับ
ผลตอบแทนเป็นสินทรัพย์

$$\text{Max} \int_0^{\infty} u(c(t)) e^{-\rho t} e^{nt} dt \quad (4.6)$$

โดยที่ $c(t)$ คือ การบริโภคของครัวเรือน ณ เวลา t
 ρ คือ อัตราคิดลด (Discount rate)
 n คือ อัตราการเจริญเติบโตของประชากร

การศึกษานี้จะกำหนดให้ฟังก์ชันความพอใจอยู่ในรูปของความยืดหยุ่นของการทดแทนกันข้ามห้วงเวลาคงที่ (Constant Intertemporal Elasticity of Substitution: CIES) ดังนี้

$$u(c(t)) = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta} \quad (4.7)$$

โดยที่ θ คือความยืดหยุ่นของความพอใจส่วนเพิ่มที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ($\theta \geq 0$) แต่ไม่เท่ากับหนึ่ง ($\theta \neq 1$) และความยืดหยุ่นของการทดแทนกันในฟังก์ชันความพอใจนี้จะเท่ากับ $\sigma = 1/\theta$

กิจกรรมต่างๆของรัฐบาลในการสร้างสาธารณูปโภคขั้นพื้นฐาน เช่น การสร้างทางหลวง ระบบน้ำประปา ตำรวจ ต่างเกี่ยวข้องกับความแออัด (Congestion) หากสมมติให้เป็นกิจกรรมทางเศรษฐกิจของรัฐแบบมวลรวมใดๆ (G) ปริมาณที่แต่ละบุคคลได้รับจะลดลงเมื่อมีบุคคลอื่นมาใช้บริการจากกิจกรรมของรัฐ กิจกรรมต่างๆของรัฐถือเป็นปัจจัยใส่เข้าในกระบวนการผลิตภาคเอกชน เราจะสามารถสร้างแบบจำลองความแออัดนี้โดยเขียนฟังก์ชันการผลิตสำหรับผู้ผลิต i ได้เป็น

$$Y_i = AK_i \cdot f(G/Y) \quad (4.8)$$

ฟังก์ชันการผลิตจะขึ้นอยู่กับทุน (Capital: K), เทคโนโลยี (Technology: A) และการใช้จ่ายภาครัฐ โดยที่ $f' > 0$ และ $f'' < 0$ และสมการการผลิตเป็นรูปแบบ AK และมีบริการสาธารณะเข้ามาเกี่ยวข้องในแบบจำลอง การเพิ่มขึ้นของ G จะส่งผลต่อผลผลิตมวลรวม(Y) ให้เพิ่มสูงขึ้น ณ ระดับทุน(K) ใดๆ เนื่องจากมีความแออัด(Congestion) หากผลผลิตมวลรวม(Y) เพิ่มสูงขึ้นแต่ G คงที่ ก็จะทำให้บริการสาธารณะที่ผู้ผลิตแต่ละรายสามารถเข้าถึงได้ลดลง แบบจำลองสมมติให้ G ต้องเพิ่มเพื่อให้ Y เพิ่มสูงขึ้นและบริการสาธารณะต่อคนเพิ่มขึ้นด้วย

ที่ ณ ระดับ G และ ผลผลิตมวลรวม(Y) ใดๆ การผลิตแต่ละหน่วยธุรกิจจะมีผลได้ต่อขนาดคงที่ต่อปัจจัยนำเข้าเอกชน (K) ถ้า G เติบโตในอัตราเดียวกับ Y แล้ว อัตราส่วน G/Y จะคงที่ และมี

ผลได้ต่อขนาดคงที่ใน K ด้วย ซึ่งแสดงว่าระบบเศรษฐกิจจะเติบโตจากภายในเช่นเดียวกับแบบจำลอง AK

จากเงื่อนไขกำไรสูงสุดผลผลิตส่วนเพิ่มของทุนจะเท่ากับค่าเช่าบวกค่าเสื่อม

$$r + \delta = A \cdot f(G/Y) \quad (4.9)$$

ผลผลิตส่วนเพิ่มจะไม่ขึ้นอยู่กับตัวแปรแรงงานแต่อัตราการเจริญเติบโตของ c และ y จะเท่ากับค่าคงที่ค่าเดียวกัน จากสมการที่ (4.4) จะสามารถคิดแปลงและเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\dot{c}/c = (1/\theta) \cdot [A \cdot f(G/Y) - \delta - \rho] \quad (4.10)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าอัตราการเจริญเติบโตเพิ่มขึ้นใน G/Y และถ้าสมมติให้ระบบเศรษฐกิจเป็นแบบวางแผนจากส่วนกลาง และแสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุด จากสมการอรรถประโยชน์ภายใต้ข้อจำกัดด้านทรัพยากร (แสดงในรูปต่อประชากร)

$$\dot{k} = Ak \cdot f\left(\frac{G}{Y}\right) - c - \delta k - G/L \quad (4.11)$$

สมมติให้อัตราการเจริญเติบโตของประชากรเท่ากับศูนย์ จะเขียนสมการ Hamiltonian ได้ดังนี้

$$J = e^{-\rho t} \cdot \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + v \cdot [Ak \cdot f(G/Y) - c - \delta k - G/L] \quad (4.12)$$

หาอนุพันธ์ของสมการ(4.8) เทียบกับ k

$$\frac{\partial J}{\partial k} = A \cdot f(G/Y) + Ak \cdot f'(G/Y) \cdot \left(\frac{-G/L}{y^2}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial k} \quad (4.13)$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial J}{\partial k} = \frac{A \cdot f(G/Y)}{1 + (G/Y) \cdot \frac{f'(G/Y)}{f(G/Y)}} \quad (4.14)$$

อนุพันธ์ของ y เมื่อเทียบกับ G

$$\frac{\partial y}{\partial G} = L \cdot \frac{\frac{f'(G/Y)}{f(G/Y)}}{1 + (G/Y) \cdot \frac{f'(G/Y)}{f(G/Y)}} \quad (4.15)$$

เงื่อนไขอันดับแรก(FOC) เทียบกับการบริโภคจะได้สมการการเจริญเติบโตเช่นกรณีทั่วไป

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \left(-\frac{\dot{v}}{v} - \rho \right)$$

เงื่อนไขอันดับแรกเทียบกับ G นั้นจำเป็นที่ $\partial y / \partial G = 1$ จากสมการ (4.15) เงื่อนไขประสิทธิภาพ (efficiency condition) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{f'(G/Y)}{f(G/Y)} = \frac{1}{1 - (G/Y)} \quad (4.16)$$

กำหนดให้ $(G/Y)^*$ เป็นค่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขนี้ เงื่อนไขอันดับแรกเทียบกับทุน
ต้องการ

$$-\dot{v} = v \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial k} - \delta \right) \quad (4.17)$$

นำสมการ (4.17), (4.14) และ (4.15) แทนค่าในสมการการเจริญเติบโตของการบริโภคจะได้

$$\dot{c} / c(\text{social planner}) = (1/\theta) \cdot \{ [1 - (G/Y)^*] \cdot A \cdot f'[(G/Y)^*] - \delta - \rho \} \quad (4.18)$$

การตัดสินใจของผู้ผลิตแต่ละรายในการเพิ่มทุน (K_t) ผลผลิต (Y_t) และเพิ่มความแออัดสำหรับบริการสาธารณะมวลรวม (G) ณ ระดับใดๆ ด้วยภาษีแบบเหมาจ่าย ผู้ผลิตจะเพิกเฉยผลกระทบด้านลบภายนอกแต่จะมีแรงจูงใจมากในการเพิ่มทุนและผลผลิต