บทที่ 2

แนวคิดทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 การวิเคราะห์อนุกรมเวลา (time series analysis)

การวิเคราะห์อนุกรมเวลา (time series analysis) เป็นวิธีที่ใช้เพื่อการวิเคราะห์ข้อมูลหรือค่าสังเกตที่เปลี่ยนแปลงไปตามลำดับเวลาที่เกิดขึ้น หรือการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในช่วงเวลาที่ผ่านไป ลักษณะของการเปลี่ยนแปลงอาจมีหรือไม่มีรูปแบบก็ได้ แต่ถ้าอนุกรมเวลาแสดงให้เห็นรูปแบบการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาที่ผ่านมาในอดีต ก็จะสามารถคาดการณ์ได้ว่าในอนาคตลักษณะการเปลี่ยนแปลงควรอยู่ในรูปแบบใดและสามารถพยากรณ์การเปลี่ยนแปลงข้อมูลในอนาคตได้ โดยการวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลาขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของเวลาในอดีตเป็นพื้นฐาน

2.2 ระบบความจำระยะยาว (Long memory) ในข้อมูลอนุกรมเวลา

ในสถานการณ์ส่วนใหญ่คุณสมบัติความเป็นอิสระของข้อมูลอนุกรมเวลานั้นเป็นเพียงการประมาณการณ์โครงสร้างของสหสัมพันธ์ที่แท้จริงของข้อมูลอนุกรมเวลานั้น ๆ ภาวะอัตสหสัมพันธ์ (autocorrelation) ที่สำคัญสามารถพบได้ในค่าล่าของข้อมูลที่มีความห่างไกลกันของเวลาไม่มากนัก (low lag) ซึ่งเป็นกระบวนการของระบบความจำระยะสั้น (short memory) อย่างในแบบจำลอง ARIMA ซึ่งโดยปกติก็เป็นแบบจำลองที่เพียงพอกับข้อมูลอนุกรมเวลาแล้ว อย่างไรก็ตามในข้อมูลอนุกรมเวลาหลาย ๆ ตัวอย่างเมื่อพิจารณาค่าอัตสหสัมพันธ์กลับพบว่าค่า autocorrelation function ไม่ได้ลดลงอย่างรวดเร็วแต่กลับมีคุณสมบัติการคงอยู่ (persistence) อย่างสูงและบางครั้งยังคงอยู่อย่างมีนัยสำคัญ ณ คาบเวลาที่ห่างไกลมาก หรือค่าอัตสหสัมพันธ์ (autocorrelation) นั้นลดลงด้วยอัตราที่ช้ามาก นี่เป็นกระบวนการของระบบความจำระยะยาว (long memory) ซึ่งอาจกล่าวได้ว่ากระบวนการของ ARIMA ที่เป็นระบบความจำระยะสั้น (short memory) นั้นค่าอัตสหสัมพันธ์ (autocorrelation) นั้นเสื่อมลง (decay) อย่างรวดเร็วด้วยอัตราเลขยกกำลังสูง (exponential) แต่กระบวนการของระบบความจำระยะยาว (long memory) นั้นมีคุณลักษณะที่ค่าอัตสหสัมพันธ์เสื่อมลงอย่างช้า ๆ ด้วยอัตราไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic) เพื่อที่จะพิจารณาคุณสมบัติของความหนาแน่นแบบสเป็กตรัม (spectral density) และ autocorrelation function นี้ Granger และ Joyeux (1980), Hosking (1981) ได้พัฒนาแบบจำลอง ARFIMA(p,d,q) (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average) โดยค่า d สามารถเป็นจำนวนจริงซึ่งไม่

จำเป็นที่จะต้องเป็นจำนวนเต็มที่ใช้ในการทดสอบคุณสมบัติของระบบความจำระยะยาว (long memory) ในข้อมูลอนุกรมเวลา แนวคิดของแบบจำลองนี้ตั้งอยู่ระหว่าง ARIMA ที่นิ่ง (stationary) และ unit root ซึ่งไม่นิ่ง (non-stationary)

2.3 คุณสมบัติของระบบความจำระยะยาว (long memory)

สมมติว่า y_t เป็นข้อมูลอนุกรมเวลา (time series data) ข้อมูล y_t ที่มีความนิ่ง (stationary) จะมีระบบความจำระยะยาว (long memory) หรือการขึ้นอยู่ต่อกันในระยะยาว (long range dependence) เมื่อมี autocorrelation function ดังนี้

$$\rho(k) \rightarrow C_\rho k^{-\alpha} \qquad \text{เมื่อ } k \rightarrow \infty \tag{2.1}$$

โดยที่ C_ρ คือ ค่าคงที่ที่เป็นค่าบวก

α คือ จำนวนจริงที่มีค่าระหว่าง 0 ถึง 1

ดังนั้น autocorrelation function ของกระบวนการระบบความจำระยะยาว (long memory) เสื่อมลง (decay) อย่างช้า ๆ ณ อัตราไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic) โดยข้อเท็จจริงแล้วมันเสื่อมลงอย่างช้า ๆ เนื่องจาก autocorrelation นั้นไม่ใช่ผลรวมทั้งหมด ดังที่

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) = \infty \tag{2.2}$$

สำหรับกระบวนการของข้อมูลอนุกรมเวลา (time series data) ที่มีความนิ่ง (stationary) จะมี autocorrelation function ที่ประกอบไปด้วยข้อมูลที่เหมือนกับความหนาแน่นแบบสเปกตรัม (spectral density) ของมัน ซึ่งสมการความหนาแน่นแบบสเปกตรัม (spectral density) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) e^{ikw} \tag{2.3}$$

โดยที่ w คือ ความถี่ฟูเรียร์ (Fourier frequency) (Hamilton, 1994) จากสมการที่ (2.1) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$f(w) \rightarrow C_f w^{\alpha-1} \qquad \text{เมื่อ } w \rightarrow 0 \tag{2.4}$$

เมื่อ C_f คือ ค่าคงที่ที่เป็นค่าบวก ดังนั้นกระบวนการของระบบความจำระยะยาว (long memory) มีความหนาแน่นแบบสเปกตรัม (spectral density) ที่มีความโน้มเอียงเข้าสู่ค่าอนันต์ (infinity) ณ ความถี่เท่ากับศูนย์ แทน α โดยใช้

$$H = 1 - \alpha / 2 \in (0.5, 1) \tag{2.5}$$

ซึ่งทราบกันว่านี่ คือ Hurst coefficient (ดู Hurst, 1951) ที่จะวัดความมีความจำระยะยาว (long memory) ใน y_t ซึ่งค่า H ที่มากแสดงถึงระบบความจำระยะยาว (long memory) ที่ยาวกว่า

จากหลักการของคุณสมบัติของขนาด (scaling property) จากสมการที่ (2.1) และคุณสมบัติของขอบเขตความถี่ (frequency domain property) จากสมการที่ (2.4) Granger and Joyeux (1980) และ Hosking (1981) ได้แสดงกระบวนการระบบความจำระยะยาว (long memory) ของ y_t ที่สามารถจำลองเชิงพารามิเตอร์โดยรวมกระบวนการปริพันธ์ (integrated process) เป็นกระบวนการหาผลต่างที่เป็นจำนวนเศษส่วน (fractionally integrated process) ซึ่งให้การหาผลต่างที่เป็นจำนวนเศษส่วน (fractionally integration) ในข้อมูลอนุกรมเวลา (time series data) y_t มีลักษณะดังนี้

$$(1-L)^d (y_t - \mu) = u_t \tag{2.6}$$

โดยที่ L คือ lag operator

d คือ fractional integration หรือ fractional difference parameter

μ คือ ค่าคาดหมายของ y_t

u_t คือ พจน์รบกวนในระบบความจำระยะสั้นที่นิ่งและมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์

โดยปกติแล้วเมื่อข้อมูลอนุกรมเวลานั้นถูกพบว่าไม่นิ่ง (non-stationary) เมื่อทำการหาผลต่าง (difference) หนึ่งครั้ง (โดยให้ $d=1$) ก็จะนิ่ง (stationary) อย่างไรก็ตามข้อมูลอนุกรมเวลาทางการเงินและเศรษฐกิจบางข้อมูลก็มีคุณสมบัติการคงอยู่ (persistent) ของ autocorrelation function อย่างสูง ซึ่งหมายความว่ากระบวนการหาผลต่าง (difference) ที่เป็นจำนวนเต็มนั้นอาจจะมากเกินไป ซึ่งแสดงให้เห็นจากความหนาแน่นแบบสเปกตรัม (spectral density) หายไป ณ ความถี่เท่ากับศูนย์ของผลต่าง (difference) ของข้อมูลอนุกรมเวลา (time series data) การจำลองกระบวนการของระบบความจำระยะยาว (long memory) จึงหลีกเลี่ยงที่จะหาผลต่าง (differenced) ของ y_t โดยจำนวนเต็ม (integer) โดยให้ค่า d สามารถเป็นจำนวนเศษส่วนได้ ซึ่ง fractional difference filter สามารถแสดงได้ดังนี้

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-1)^k L^k \tag{2.7}$$

โดยสัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficient) มีค่าดังนี้

$$\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}$$

เมื่อพิจารณาค่า d มันสามารถแสดงให้ทราบว่า

เมื่อค่า $|d| > 1/2$ แล้ว y_t นั้นมีคุณสมบัติ non-stationary

$0 < d < 1/2$ แล้ว y_t นั้น stationary และมี long memory

$-1/2 < d < 0$ แล้ว y_t นั้น stationary และเป็น short memory

เมื่อ fractionally integrated ข้อมูลอนุกรม y_t มีคุณสมบัติของระบบความจำระยะยาว (long memory) สามารถแสดงได้ว่า

$$d = H - 1/2 \tag{2.8}$$

ดังนั้น d และ H สามารถใช้สลับกันได้ Hosking (1981) ได้แสดงว่าคุณสมบัติด้านขนาด (scaling property) จากสมการที่ (2.1) และคุณสมบัติด้านขอบเขตความถี่ (frequency domain property) จากสมการที่ (2.4) นั้นสอดคล้องกันเมื่อ $0 < d < 1/2$

2.4 แบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH)

ในการวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลาส่วนใหญ่แล้วจะมีการกำหนด stochastic variable ให้มีความแปรปรวนคงที่ (homoscedastic) ซึ่งในการประยุกต์ใช้กับบางข้อมูลนั้นค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน (error term) จะไม่ใช่ฟังก์ชันของตัวแปรอิสระแต่มีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามช่วงเวลาขึ้นอยู่กับขนาดของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในอดีต และในบางงานศึกษา เช่น แบบจำลองเงินเฟ้อ อัตราดอกเบี้ยหรือผลตอบแทนจากหลักทรัพย์ ในบางคาบเวลาจะมีความผันผวน (volatility) สูง (และความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่) ตามด้วยคาบเวลาที่มีความผันผวน (volatility) ต่ำ (และความคลาดเคลื่อนขนาดเล็ก) สรุปได้ว่าค่าความแปรปรวนของค่าความคลาดเคลื่อนจากการถดถอยจะขึ้นอยู่กับค่าความผันผวน (volatility) ของความคลาดเคลื่อนในอดีตที่ผ่านมา (Ender ใน ทรงศักดิ์ ศรีบุญจิตต์ และ อารี วิบูลย์พงศ์)

การสร้างแบบจำลองความแปรปรวนที่ไม่เท่ากันอย่างมีเงื่อนไข (Conditional Heteroscedasticity) นั้นทำได้โดยนำส่วนที่เหลือยกกำลังสอง (squared residuals) มาแสดงในรูปแบบของกระบวนการ autoregressive (AR) ปกติ สมมติให้ y_t เป็นข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง (stationary) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$y_t = c + \varepsilon_t \tag{2.9}$$

โดยที่ c คือ ค่าเฉลี่ย (mean) ของ y_t และ ε_t มีคุณสมบัติเป็น i.i.d. มีค่าเฉลี่ย (mean) เท่ากับศูนย์ ในแบบจำลองที่เป็น volatility clustering หรือ Conditional Heteroscedasticity นั้นสมมติว่า $Var_{t-1}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$ กับ $Var_{t-1}(\cdot)$ แสดงถึงค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขต่อเวลา ณ เวลา $t-1$ ดังนั้น

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \tag{2.10}$$

จากที่ ε_t มีค่าเฉลี่ย (mean) เท่ากับศูนย์หรือ $Var_{t-1}(\varepsilon) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ สมการที่ (2.10) นี้สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + u_t \tag{2.11}$$

โดยที่ $u_t = \varepsilon_t^2 - E_{t-1}\left(\varepsilon_t^2\right)$ คือกระบวนการ white noise ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ สมการที่ (2.11) นี้ได้แสดงถึงกระบวนการ AR ของ ε_t^2 สมการนี้เป็นที่ทราบกันดีว่า คือ แบบจำลอง autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH) ของ Engle (1982) หรือกระบวนการ ARCH (q)

2.5 แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH)

ในแบบจำลอง ARCH นั้นในทางปฏิบัติบ่อยครั้งที่พบว่าแบบจำลองที่เหมาะสมนั้นมีค่าล่า q เป็นตัวเลขที่สูงมาก ดังนั้น Bollerslev (1986) ได้ขยายแบบจำลอง ARCH ออกไปเป็นแบบจำลอง GARCH ซึ่งก็ คือ การนำส่วนที่เหลือยกกำลังสอง (squared residuals) มาแสดงในรูปแบบของกระบวนการ ARMA ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (2.12)$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha_i(i=0,...,q)$ และ $\beta_j(i=0,...,p)$ ทั้งหมดถูกสมมติว่าเป็นค่าบวกเพื่อที่ว่าค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) σ_t^2 จะได้มีค่าเป็นบวกเสมอและผลรวมของ $\alpha_i + \beta_j < 1$ แบบจำลองนี้คือ Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity หรือ GARCH (p,q) ซึ่งมีคุณสมบัติหลาย ๆ อย่างคล้ายกันกับของกระบวนการ ARMA

2.6 แบบจำลอง Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (EGARCH)

ในแบบจำลอง GARCH ที่ (2.12) นั้น พจน์ส่วนที่เหลือกำลังสอง (squared residual) ε_{t-i}^2 ในสมการนั้นมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้นหมายความว่าเครื่องหมายของส่วนที่เหลือ (residual) ไม่มีผลต่อค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional volatility) เลย แต่อย่างไรก็ตามโดยข้อเท็จจริงแล้วความผันผวน (volatility) ในตลาดการเงินนั้นตอบสนองต่อข่าวดีและข่าวร้ายไม่เท่ากัน ซึ่งข่าวร้ายหรือการเปลี่ยนแปลงที่ไม่คาดการณ์ทางลบ (negative shock) นั้นมีแนวโน้มที่จะส่งผลกระทบต่อความผันผวน (volatility) มากกว่าข่าวดีหรือการเปลี่ยนแปลงที่ไม่คาดการณ์ทางบวก (positive shock) (Black, 1976)

Nelson (1991) ได้เสนอแบบจำลอง exponential GARCH (EGARCH) ซึ่งให้มี leverage effect ที่ทำให้ผลกระทบจากข่าวดีหรือข่าวร้ายไม่จำเป็นที่จะต้องมีผลเท่าเทียมกัน (asymmetric effect) ซึ่งแบบจำลอง GARCH แบบปกติไม่สามารถแสดงรูปแบบนี้ได้ สมการ EGARCH สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \frac{\left|\varepsilon_{t-i}\right| + \gamma_i \varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log\left(\sigma_{t-j}^2\right) \qquad (2.13)$$

สมการที่ (2.13) แสดงค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ในรูปแบบของลอการิทึม ซึ่งอิทธิพลจาก leverage effect เป็นค่าเลขยกกำลังสูง (exponential) แทนที่จะเป็นค่ายกกำลังสอง (quadratic) เมื่อ ε_{t-i} มีค่าเป็นบวกหรือมีข่าวดี ผลกระทบทั้งหมดของ ε_{t-i} จะเป็น $(1+\gamma_i)|\varepsilon_{t-i}|$ ในทางกลับกันถ้า ε_{t-i} มีค่าเป็นลบหรือมีข่าวร้าย ผลกระทบทั้งหมดของ ε_{t-i} จะเป็น $(1-\gamma_i)|\varepsilon_{t-i}|$ ซึ่งข่าวร้ายสามารถส่งผลกระทบต่อความผันผวน (volatility) มากกว่าข่าวดีได้

2.7 แบบจำลอง Fractional Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (FIGARCH)

จากแบบจำลอง ARCH ซึ่งเป็นแบบจำลองความผันผวน (volatility model) จากสมการที่ (3.9) ซึ่งถูกเสนอโดย Engle (1982) กระบวนการเฟ้นสุ่ม $\{\varepsilon_t\}$ ของข้อมูลอนุกรมเวลาสามารถแสดงได้อีกรูปแบบดังนี้

$$\varepsilon_t \equiv z_t \sigma_t \qquad (2.14)$$

ซึ่ง $E_{t-1}(z_t)=0$ และ $VAR_{t-1}(z_t)=1$ โดยที่ σ_t เป็นความแปรปรวนทางเวลาที่มีค่าเป็นบวกและฟังก์ชันที่วัดได้ (measurable function) ภายใต้กลุ่มข้อมูลข่าวสารของเวลาที่ $t-1$ เมื่อพิจารณา $E_{t-1}(\cdot)$ และ $VAR_{t-1}(\cdot)$ ซึ่งเป็นค่าคาดการณ์และความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ภายใต้กลุ่มข้อมูลข่าวสารของเวลาเดียวกันนี้ ดังนั้นหมายความว่ากระบวนการ $\{\varepsilon_t\}$ นั้นมีคุณสมบัติที่พจน์รบกวนไม่มีความสัมพันธ์กันเอง (serially uncorrelated) โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และมีค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) เท่ากับ σ_t^2 ที่ไม่จำเป็นต้องเท่ากันในทุก ๆ ช่วงเวลา

ตามแบบจำลอง ARCH(q) ของ Engle (1982) นั้นค่า σ_t^2 ถูกสมมติให้เป็นฟังก์ชันเส้นตรงของผลกระทบที่มีต่อความผันผวนในอดีตยกกำลังสอง (lagged squared innovations) ซึ่งเวลาย้อนหลังไปเท่ากับ q คาบเวลา Bollerslev (1986) ได้ขยายแบบจำลองนี้เป็นแบบจำลอง GARCH(p,q) ดังที่ได้กล่าวไปแล้ว ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบที่ใช้ lag operator ได้ดังนี้

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \qquad (2.15)$$

โดย L เป็น lag operator ซึ่ง $\alpha(L)$ และ $\beta(L)$ คือ พหุนามของค่าล่า (lag polynomials) ลำดับที่ q และ p ตามลำดับหรือ $\alpha(L)\equiv \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \ldots + \alpha_q L^q$ และ $\beta(L)\equiv \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \ldots + \beta_p L^p$ เงื่อนไขที่ทำให้กระบวนการ $\{\varepsilon_t\}$ นั้นมีความนิ่ง (stationary) คือ รากของ $(1-\alpha(L)-\beta(L))$ และ $(1-\beta(L))$ ต้องอยู่นอกวงกลมหน่วย (unit root) กระบวนการ GARCH(p,q) สามารถเขียนใหม่ในรูปของ infinite-order ARCH ได้ดังนี้

$$\sigma_t^2 = \omega[1-\beta(L)]^{-1} + \alpha(L)[1-\beta(L)]^{-1}\varepsilon_t^2 \qquad (2.16)$$

$$\equiv \omega[1-\beta(L)]^{-1} + \lambda(L)\varepsilon_t^2 \tag{2.17}$$

จากเงื่อนไขความนิ่ง (stationary condition) ที่ว่าผลกระทบที่มีต่อความผันผวนในอดีตยกกำลังสอง (lagged squared innovations) ที่มีต่อค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ในคาบเวลาปัจจุบันนั้นเสื่อมถอย (decay) ด้วยอัตราเลขยกกำลังสูง (exponential) ดังนั้นกระบวนการ GARCH(p,q) ในสมการที่ (2.15) สามารถแสดงในรูปแบบ ARMA(m,p) ของ ε_t^2 ได้ดังนี้

$$[1-\alpha(L)-\beta(L)]\varepsilon_t^2 = \omega + [1-\beta(L)]v_t \tag{2.18}$$

โดยที่ $m \equiv \max\{p,q\}$ และ $v_t \equiv \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ เป็นพจน์รบกวนไม่มีความสัมพันธ์กันเอง (serially uncorrelated) ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ ซึ่งหมายความว่ากระบวนการของ $\{v_t\}$ เป็นการเปลี่ยนแปลงที่ไม่ได้คาดการณ์ (shock) ของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) นั่นเอง ถ้ากระบวนการ GARCH(p,q) มีพจน์พหุนามค่าล่า $(1-\alpha(L)-\beta(L))$ อยู่ภายในวงกลมหน่วย (unit root) แล้ว Engle and Bollerslev (1986) ได้ระบุว่ากระบวนการนั้นเป็น Integrated GARCH(p,q) หรือแบบจำลอง IGARCH(p,q) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\phi(L)(1-L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1-\beta(L)]v_t \tag{2.19}$$

โดยที่ $\phi(L) \equiv [1-\alpha(L)-\beta(L)](1-L)^{-1}$ มีลำดับ (order) เท่ากับ $m-1$ Baillie, Bollerslev and Mikkelson (1996) ได้เสนองานที่แสดงถึงกระบวนการของระบบความจำระยะยาว (long memory) ในความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) หรือแบบจำลอง Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (FIGARCH) ซึ่งกระบวนการนี้แสดงให้เห็นว่าผลกระทบที่มีต่อความผันผวนในอดีตยกกำลังสอง (lagged squared innovations) นั้นเสื่อมลง (decay) อย่างช้า ๆ ด้วยอัตราไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic) และการที่ impulse response weights ยังมีคุณสมบัติคงอยู่นาน (persistent) และ impulse response weights นี้ยังมีความโน้มเอียงเข้าสู่ค่าศูนย์ ซึ่งหมายความว่ามันมีคุณสมบัติ weakly stationary หรือคล้ายกับ stable GARCH นั่นเอง แต่ impulse response weights ของกระบวนการ FIGARCH นั้นเสื่อมลง (decay) ช้า ๆ ด้วยอัตรา hyperbolic จากสมการที่ (2.19) นี้ เมื่อแทนตัวแปรผลต่างลำดับที่หนึ่ง (first difference) ด้วยผลต่างที่เป็นเศษส่วน (fractional difference) จะได้แบบจำลอง Fractionally Integrated GARCH หรือ FIGARCH ซึ่งกระบวนการ FIGARCH(p,d,q) สามารถแสดงในรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

$$\phi(L)(1-L)^d\varepsilon_t^2 = \omega + [1-\beta(L)]v_t \tag{2.20}$$

โดยที่รากของ $\phi(L)$ และ $[1-\beta(L)]$ อยู่นอกวงกลมหน่วย (unit circle) และ $0<d<1$ ซึ่งพจน์ตัวแปรผลต่างที่เป็นเศษส่วน (fractional difference operator) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$(1-d)^d = 1-d\cdot\sum_{k=1,\infty}\Gamma(k-d)\Gamma(1-d)^{-1}\Gamma(k+1)^{-1}L^k \tag{2.21}$$

$$=1-\delta_d(L) \tag{2.22}$$

โดยที่ $\Gamma(\cdot)$ คือแกมมาฟังก์ชัน (gamma function) และ $(1-L)^0 \equiv 1$ หมายความว่าแบบจำลอง FIGARCH(p,d,q,) จะคล้ายแบบจำลอง GARCH(p,q) เมื่อ $d=0$ และคล้ายแบบจำลอง IGARCH(p,q) เมื่อ $d=1$ จัดรูปสมการที่ (3.20) ใหม่จะได้อีกรูปแบบหนึ่งของแบบจำลอง FIGARCH(p,d,q) ดังนี้

$$[1-\beta(L)]\sigma_t^2 = \omega + \left[1-\beta(L)-\phi(L)(1-L)^d\right]\varepsilon_t^2 \tag{2.23}$$

ดังนั้นความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) จะกลายเป็น

$$\sigma_t^2 = \omega[1-\beta(L)]^{-1} + \left\{1-[1-\beta(L)]^{-1}\phi(L)(1-L)^d\right\}\varepsilon_t^2 \tag{2.24}$$

$$= \omega[1-\beta(L)]^{-1} + \lambda(L)\varepsilon_t^2 \tag{2.25}$$

โดยที่ $\lambda(L) = \left\{1-[1-\beta(L)]^{-1}\phi(L)(1-L)^d\right\}$ เงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition) และเงื่อนไขที่พอเพียง (sufficient condition) ของแบบจำลอง FIGARCH(1,d,0) คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของ impulse response จะต้องไม่เป็นลบหรือ $\lambda_j \geq 0$ เมื่อ j เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $0<d<\beta$ Bollerslev and Mikkelson (1996) ให้พหุนามค่าล่าของสัมประสิทธิ์ impulse response แสดงด้วย $\gamma(L)$ ซึ่ง

$$\gamma(L) = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k L^k \tag{2.26}$$

ดังนั้น

$$(1-L)\varepsilon_t^2 = \omega + \gamma(L)v_t \tag{2.27}$$

และ

$$\gamma(L) = (1-L)^{1-d}\phi(L)^{-1}\{1-\beta(L)\} \tag{2.28}$$

ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงที่ไม่ได้คาดการณ์ (shocks) ที่ผ่านมาในอดีตต่อกระบวนการของความผันผวน (volatility) นั้นถูกกำหนดโดยลิมิตของค่าถ่วงน้ำหนักสะสมของ impulse response

$$\gamma(1) = \lim_{k\to\infty}\lambda_k = \sum_{j=0}^{\infty}\gamma_j \tag{2.29}$$

ถ้า $d=0$ ทำให้ $\gamma(1)=0$ จะได้ว่า σ_t^2 นี้เป็นกระบวนการ GARCH(p,q) ที่มีเสถียรภาพ (stable) ซึ่งคล้ายกับคุณสมบัติของ trend stationary หรือ I(0) ในค่าเฉลี่ย แต่ถ้า $d=1$ ทำให้ $\gamma(1)$ จะกลับเข้าสู่ (converge) ค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นกระบวนการนี้ก็คล้ายกันกับกระบวนการ I(1) ในค่าเฉลี่ย (mean) สำหรับกระบวนการ GARCH(1,1) ที่มีเสถียรภาพ (stable) ดังนี้

$$\{1-(\alpha+\beta)L\}\varepsilon_t^2 = \omega + (1-\beta L)v_t \tag{2.30}$$

และ impulse response weights จะต้องเท่ากับ

$$\gamma(L) = (1-L)\{1-(\alpha+\beta)L\}^{-1}(1-\beta L) \tag{2.31}$$

เพราะฉะนั้น $\gamma_0 = 0, \gamma_1 = (\alpha-1)$ และ $\gamma_j = \alpha(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta)^{j-2}$ เมื่อ $j>2$ หรือ $\lambda_k = \alpha(\alpha+\beta)^{k-1}$ ดังนั้น $\gamma(1)$ และ impulse response weights มีลิมิตเท่ากับศูนย์ สำหรับ

กระบวนการ IGARCH (1,1) นั้น $\lambda_k = (1-\beta)$ โดยค่าล่าทั้งหมด $k > 1$ และ impulse response weights สะสมมีลิมิตเท่ากับค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์หรือ $\gamma(1) = 1-\beta$ ส่วนกระบวนการ FIGARCH และกรณีที่ $d > 1$ นั้น $\gamma(1)$ จะต้องมีค่าอนันต์ (infinite) (Baillie, 1996) ขณะที่กระบวนการ FIGARCH(1,d,0) เป็นดังนี้

$$\lambda_k = \left[\Gamma(k+d-1)/\{\Gamma(k)\Gamma(d)\}\right]\left[(1-\beta)-(1-d)/k\right] \tag{2.32}$$

จากที่ $\gamma(1) = 0$ ดังนั้นผลกระทบสะสม (cumulative effect) ของการเปลี่ยนแปลงที่ไม่ได้คาดการณ์ (shocks) ในกระบวนการความผันผวน (volatility) จะต้องเป็นศูนย์ และจากการประมาณการณ์ของสเตอร์ลิง (Stirling approximation) ดังนั้น

$$\lambda_k \approx \left[(1-\beta)/\Gamma(d)\right]k^{d-1} \tag{2.33}$$

ดังนั้นการตอบสนองของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ต่อการเปลี่ยนแปลงที่ไม่ได้คาดการณ์ (shocks) ในอดีตนั้นมีการเสื่อมลง (decay) ด้วยอัตรา hyperbolic ส่วนการประมาณค่าสัมประสิทธิ์กระบวนการ FIGARCH ในสมการที่ (2.20) นั้นสามารถทำได้โดยการใช้วิธีความน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood)

2.8 แบบจำลอง Fractional Integrated Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (FIEGARCH)

แบบจำลอง FIGARCH ปกตินั้นมีปัญหาว่าแบบจำลองไม่แน่ว่าจะมีคุณสมบัติที่นิ่ง (stationary) และความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) จะมีค่าเป็นบวกเสมอไป ซึ่งการยืนยันถึงคุณสมบัติดังกล่าวเป็นกระบวนการที่ยุ่งยาก (ดู Baillie, Bollerslev and Mikkelsen, 1996 หรือ Bollerslev and Mikkelsen, 1996)

จากที่แบบจำลอง EGARCH ได้แสดงความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ในรูปแบบของกระบวนการ ARMA ในพจน์ของลอการิทึม ดังนั้นจึงสามารถยืนยันได้ว่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) จะต้องมีค่าเป็นบวกแน่นอน อีกรูปแบบของแบบจำลอง EGARCH(p,q) ของ Nelson (1991) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + [1-\varphi(L)]^{-1}[1+\psi(L)]g(z_{t-1}) \tag{2.34}$$

โดยที่

$$g(z_t) = \theta z_t + \gamma\left[|z_t| - E(|z_t|)\right] \tag{2.35}$$

เมื่อ $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ โดยทั้ง z_t และ $|z_t| - E(|z_t|)$ มีคุณสมบัติเป็น i.i.d. มีค่าเฉลี่ย (mean) เท่ากับศูนย์ ส่วน $\varphi(L)$ และ $\psi(L)$ คือ พหุนามของค่าล่า (lag polynomials) ลำดับที่ p และ q ตามลำดับ ซึ่งค่า θ ทำให้มีความไม่สมมาตร (asymmetric) ของข้อมูลข่าวสารหรือผลกระทบที่มีต่อความผันผวน

(volatility) ถ้า $\theta < 0$ ข่าวร้ายหรือการเปลี่ยนแปลงที่ไม่คาดการณ์ทางลบ (negative shock) จะส่งผลกระทบความผันผวน (volatility) มากกว่าข่าวสารด้านบวกหรือข่าวดี และ γ แสดงถึงอัตราที่ข้อมูลข่าวสารที่มากระทบต่อความผันผวน (volatility) เบี่ยงเบนไปจากค่าเฉลี่ย (mean) Nelson (1991) ดังนั้น Bollerslev and Mikkelsen (1996) ได้ขยายแบบจำลองที่ (2.34) โดยให้ $[1-\varphi(L)] = \phi(L)(1-d)^d$ ซึ่งเป็นอนุพันธ์ที่มีลำดับเป็นเศษส่วนได้ (fractional integrated) และรากทั้งหมดของ $\phi(z) = 0$ อยู่นอกวงกลมหน่วย (unit root) กลายเป็นแบบจำลอง fractionally integrated EGARCH (FIEGARCH) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi(L)^{-1}(1-L)^{-d}[1+\psi(L)]g(z_{t-1}) \tag{2.36}$$

แบบจำลอง FIEGARCH(p,dq,) นี้คล้ายกันกับแบบจำลอง EGARCH ที่ให้มี leverage effect Zivot and Wang (2003) ได้แสดงแบบจำลอง FIEGARCH ในอีกรูปแบบดังนี้

$$\phi(L)(1-L)^d \ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^{p}\left(\beta_j|z_{t-j}| + \gamma_j z_{t-j}\right) \tag{2.37}$$

Bollerslev and Mikkelsen (1996) ระบุว่าแบบจำลอง FIEGARCH มีคุณสมบัติของความนิ่ง (stationary) เมื่อ $0 < d < 1$

2.9 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Michel Beine and Agne`s Be´nassy-Que´re´ and Christelle Lecourt (2002) ได้ศึกษาถึงผลกระทบของการแทรกแซงจากธนาคารกลางสหรัฐอเมริกา (FED) , เยอรมัน (Bundesbank) และญี่ปุ่น (BOJ) ที่มีต่อความผันผวน (volatility) ของอัตราแลกเปลี่ยนระหว่างประเทศ โดยใช้ข้อมูลอัตราแลกเปลี่ยน USD/DEM และ USD/YEN รายวันระหว่างปี 1985 - 1995 และปี 1985 - 1991 และข้อมูลการแทรกแซงจากธนาคารกลางที่ประกาศและไม่ได้ประกาศเป็นตัวแปรหุ่น (dummy variable)

ผลการศึกษาพบว่าการแทรกแซงโดยการซื้อดอลลาร์นั้นกลับส่งผลให้ค่าเงินดอลลาร์อ่อนค่าต่อมาในภายหลัง และแบบจำลอง FIGARCH ได้แสดงให้เห็นว่าการแทรกแซงของธนาคารกลางกลับมีแนวโน้มทำให้อัตราแลกเปลี่ยนมีความผันผวนมากขึ้น เมื่อทำการแยกแยะประเภทของการแทรกแซงพบว่า การแทรกแซงที่ได้ประกาศนั้นได้ทำให้อัตราแลกเปลี่ยนมีความผันผวนเพิ่มขึ้นอย่างชัดเจน ในขณะที่การแทรกแซงที่ไม่ได้ประกาศนั้นแทบจะไม่ส่งผลกระทบอย่างมีนัยยะสำคัญต่อค่าความผันผวน (volatility) เลย แบบจำลอง FIGARCH สามารถตรวจพบผลกระทบของการแทรกแซงต่อความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนได้บ่อยกว่าแบบจำลอง GARCH ซึ่งทำให้ทราบว่า

แบบจำลอง GARCH นั้นมีการปฏิเสธผลกระทบของการแทรกแซงที่เกิดขึ้นต่อความผันผวนซึ่งไม่แท้จริง อีกทั้งยังพบว่าแบบจำลอง GARCH นั้นมีการประมาณการณ์ที่ต่ำเกินจริง (underestimate)

Rehim Kilic (2004) ได้ศึกษาถึงคุณสมบัติของระบบความจำระยะยาว (long memory) ในตลาดหลักทรัพย์อิซแทนบุล (ISE) โดยใช้ข้อมูลดัชนี ISE 100 ซึ่งเลือกจากหลักทรัพย์ที่มีมูลค่าตลาดสูงสุดและปริมาณการซื้อขายเฉลี่ยมากที่สุด 100 บริษัทรายวัน ตั้งแต่วันที่ 4 มกราคม 1988 ถึงวันที่ 23 ตุลาคม 2003 รวม 3,395 ข้อมูล โดยแปลงเป็นหน่วยยูเอสดอลลาร์เพื่อหลีกเลี่ยงผลกระทบของอัตราเงินเฟ้อในภูมิภาค

ผลการศึกษาพบว่าจากการประมาณการณ์ค่าความจำระยะยาว (long memory parameter) นั้น ได้ค่าเท่ากับ 0.421 แสดงให้เห็นว่าในตลาดทุนเกิดใหม่ (emerging capital market) ก็มีคุณสมบัติของระบบความจำระยะยาว (long memory) อยู่ เมื่อพิจารณาค่าทางสถิติแล้วพบว่าแบบจำลอง FIGARCH มีค่า AIC และ BIC น้อยกว่าแบบจำลอง GARCH ดังนั้นสรุปได้ว่า AR (1) - FIGARCH $(1,\delta,0)$ สามารถจำลองพลวัตรของความผันผวนได้ดีกว่าแบบจำลอง AR (1) - GARCH $(1,1)$ ส่วนค่า Lijung-box test ก็แสดงให้ทราบว่าแบบจำลอง FIGARCH มีคุณสมบัติการคงอยู่ (persistence) ของการเปลี่ยนแปลงที่ไม่ได้คาดการณ์ (shock) ในค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) มากกว่าแบบจำลอง GARCH แม้ว่าแบบจำลอง GARCH $(1,1)$ จะมีผลรวมของค่า α และ β เข้าใกล้ค่า 1 มากก็ตาม

Young Wook Han (2005) ได้ศึกษาถึงความสามารถของแบบจำลองระบบความจำระยะยาว (long memory) และการกระโดดของข้อมูล (jump process) ที่มีต่อข้อมูลที่มีความถี่สูง (high frequency data) ของอัตราแลกเปลี่ยนยูเอสดอลลาร์ต่อออสเตรเลียดอลลาร์ (USD/AUD) โดยใช้ข้อมูลอัตราผลตอบแทนของอัตราแลกเปลี่ยน USD/AUD ราย 30 นาทีตลอดปี 1996 รวม 12,480 ข้อมูล โดยใช้แบบจำลอง Bernoulli และ Poisson jump processes ร่วมกับแบบจำลอง FIGARCH ในการประมาณการณ์ค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการของระบบความจำระยะยาว (long memory) ที่ใช้ข้อมูลที่มีความถี่สูง (high frequency data) โดยแบบจำลอง jump processes นั้นได้พิจารณาถึงการกระโดดของข้อมูล (jump) ซึ่งมีผลต่อค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไข (conditional mean)

ผลการศึกษาเมื่อพิจารณาค่าพารามิเตอร์ที่แสดงผลกระทบของการกระโดดของข้อมูล (jump) ที่มีต่อค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไข (conditional mean) พบว่าการกระโดดของข้อมูล (jump) นั้นกลับไม่ได้ส่งผลกระทบอย่างมีนัยยะสำคัญต่อค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไข (conditional mean) ของข้อมูลที่มีความถี่สูง (high frequency data) แต่อย่างใด ซึ่งสันนิษฐานว่าอาจมีสาเหตุจากลักษณะปกติของ

อัตราแลกเปลี่ยนที่มีการปรับตัวได้อย่างรวดเร็วเมื่อมีการกระโดด (jump) (Anderson, 2002) แต่อย่างไรก็ตามการกระโดดของข้อมูล (jump) นี้ได้ส่งผลกระทบต่อกระบวนการความผันผวน (volatility process) ของอัตราผลตอบแทนอย่างมีนัยยะสำคัญ ส่วนการประมาณการณ์ค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการระบบความจำระยะยาว (long memory) จากทั้ง 2 วิธีนั้นได้ค่าที่คล้าย ๆ กัน ซึ่งค่าพารามิเตอร์ที่ได้จะน้อยกว่าแบบปกติที่ไม่มีการพิจารณาการกระโดดของข้อมูล (jump) เล็กน้อย ซึ่งแสดงให้เห็นว่าคุณสมบัติระบบความจำระยะยาว (long memory) ของข้อมูลความถี่สูง (high frequency data) นั้นอาจจะได้รับผลกระทบจากการกระโดด (jump) ของค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไข (conditional mean) สรุปได้ว่าคุณสมบัติของระบบความจำระยะยาว (long memory) นั้นมีความสัมพันธ์กับการปรับตัวของค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (conditional variance) ต่อการกระโดดของข้อมูล (jump) มากกว่าค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไข (conditional mean) เนื่องจากมีกระบวนการปรับตัวที่ค่อยเป็นค่อยไปและมีคุณสมบัติการคงอยู่ (persistence) ของการเปลี่ยนแปลงที่ไม่ได้คาดการณ์ (shock) สูงกว่า

Sang Hoon Kang and Seong-Min Yoon (2007) ได้ศึกษาถึงคุณสมบัติความจำระยะยาว (long memory) ของอัตราผลตอบแทนและความผันผวนของตลาดหลักทรัพย์เกาหลี โดยใช้ข้อมูลราคาปิดรายวันของดัชนี KOSPI ตั้งแต่วันที่ 4 มกราคม ปี 1980 ถึงวันที่ 29 ธันวาคม ปี 2005 รวม 7,290 ข้อมูล และข้อมูลราคาปิดรายวันของดัชนี KOSDAQ ตั้งแต่วันที่ 1 กรกฎาคม ปี 1996 ถึงวันที่ 28 เมษายน ปี 2006 รวม 2,539 ข้อมูล

ผลการศึกษาพบว่าจากการทดสอบค่าความจำระยะยาว (long memory) แสดงให้เห็นว่าทั้งอัตราผลตอบแทนของดัชนี KOSPI และ KOSDAQ มีคุณสมบัติของความเป็นระบบความจำระยะยาว (long memory) โดยที่อัตราผลตอบแทนของดัชนี KOSDAQ มีระดับของระบบความจำระยะยาว (long memory) มากกว่าอัตราผลตอบแทนของดัชนี KOSPI เล็กน้อย เนื่องจากตลาดหลักทรัพย์ KOSDAQ เป็นตลาดหลักทรัพย์แบบผู้ลงทุนติดต่อซื้อขายกันเอง (over-the-counter) ที่ตั้งอยู่ทั่วโลก ข้อมูลข่าวสารที่ได้รับจึงอยู่นอกเหนือตลาดหลักทรัพย์ KOSPI และจากการทดสอบคุณสมบัติการแจกแจงของส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐานพบว่าข้อมูลมีความเบ้และความโด่งมากกว่าปกติ ดังนั้นในกระบวนการประมาณการณ์จึงได้ใช้ทั้งการกระจายแบบปกติและการกระจายแบบ skewed Student-t แบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดของอัตราผลตอบแทนและความผันผวนของดัชนี KOSPI คือแบบจำลอง ARFIMA$(2,\xi,2)$ และ FIGARCH$(1,d,0)$ ตามลำดับ ส่วนแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดของอัตราผลตอบแทนและความผันผวน (volatility) ของดัชนี KOSDAQ คือ แบบจำลอง

ARFIMA $(0,\xi,1)$ และ FIGARCH $(1,d,0)$ และพบว่าแบบจำลองที่ใช้การกระจายแบบ skewed Student-t มีประสิทธิภาพมากกว่าแบบจำลองที่ใช้การกระจายแบบปกติ (normal distribution)

Thomas Luxa and Taisei Kaizoji (2007) ได้ศึกษาถึงการพยากรณ์ความผันผวน (volatility) และปริมาณการซื้อขายในตลาดหลักทรัพย์โตเกียวโดยแบบจำลอง 4 แบบ ได้แก่ แบบจำลอง GARCH, FIGARCH, ARFIMA และ Markov-switching multi-fractal model (MSM) โดยใช้ข้อมูลราคาปิดและปริมาณการซื้อขายของหลักทรัพย์ตลาดหลักทรัพย์โตเกียว โดยบริษัทที่ถูกเลือกนั้นนั้นแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มด้วยกัน คือ กลุ่มแรกเลือกจากบริษัทที่มีปริมาณการซื้อขายเฉลี่ยมากที่สุด 100 อันดับแรก ส่วนกลุ่มที่สองใช้วิธีสุ่มมาอีก 100 บริษัท โดยใช้ข้อมูลรายวันในช่วงเวลา 27 ปี คือ ระหว่างปี 1975 – 2001

ผลการศึกษาโดยการเปรียบเทียบประสิทธิภาพการพยากรณ์ความผันผวน (volatility) ของแบบจำลอง 4 ชนิด ได้แก่ แบบจำลอง ARFIMA, GARCH, FIGARCH, MSM โดยใช้ค่าเฉลี่ยเปรียบเทียบของ mean squared error (MSE) และ mean absolute error (MAE) เป็นตัววัด ในกลุ่มตัวอย่างที่ 1 พบว่าแบบจำลองที่ค่า MSE ลดลงมากที่สุด คือ แบบจำลอง ARFIMA ตามด้วย MSM, FIGARCH และ GARCH ตามลำดับ ส่วนแบบจำลองที่ค่า MAE ลดลงมากที่สุด คือ แบบจำลอง MSM, ARFIMA, GARCH และ FIGARCH ตรมลำดับ ซึ่งถ้าพิจารณาการกระจายตัวของ MSE ในการพยากรณ์ความผันผวน (volatility) พบว่าแบบจำลอง MSM มีช่วงของการกระจายตัวน้อยที่สุด โดยที่ค่าสูงสุดนั้นแทบจะไม่เกินค่า 1 ส่วนการกระจายตัวของ MAE ในการพยากรณ์ความผันผวน (volatility) ก็พบว่าแบบจำลอง MSM มีช่วงของการกระจายตัวน้อยที่สุดเช่นเดียวกัน ซึ่งผลการศึกษาในกลุ่มตัวอย่างที่ 2 ก็ได้ผลคล้ายกับกลุ่มตัวอย่างที่ 1 ดังที่กล่าวมา

ผลการศึกษาโดยการเปรียบเทียบการพยากรณ์ปริมาณการซื้อขายของแบบจำลอง 3 ชนิด ได้แก่ ARMA, ARFIMA, MSM ในช่วงเวลา 1, 5, 10, 20, ถึง 100 วัน กลุ่มตัวอย่างที่ 1 พบว่าแบบจำลองที่ค่า MSE และ MAE เฉลี่ยน้อยที่สุด คือ แบบจำลอง MSM ซึ่งน้อยกว่าในกรณีของการพยากรณ์ความผันผวน (volatility) อีก รองลงมา คือ ARFIMA, และ ARMA ซึ่งผลการศึกษาในกลุ่มตัวอย่างที่ 2 ก็ได้ผลเช่นเดียวกัน

จากผลที่แบบจำลอง ARMA, ARFIMA, GARCH, FIGARCH ทำได้ไม่ดีนัก มาจากการประมาณการณ์ค่าสัมประสิทธิที่ผิดพลาด ดังนั้นจึงได้ทดลองใช้วิธีการ mean parameter estimates ส่วนการประมาณการณ์ค่าสัมประสิทธิของ FIGARCH ใช้การเลือกตัดข้อมูล เมื่อพิจารณาจาก MSE พบว่าทุกแบบจำลองได้พัฒนาประสิทธิภาพในการพยากรณ์ขึ้นอย่างเห็นได้ชัด

Jin Hyun-Joung (2008) ได้ศึกษาถึงแบบจำลองความแปรปรวนที่มีความเหมาะสมกับตลาดค้าข้าวระหว่างประเทศ โดยใช้ราคาปิดรายเดือนของเมล็ดข้าวสาลี U.S., เมล็ดข้าวโพด U.S. จาก International Grains Council ที่เมืองลอนดอนประเทศอังกฤษ และเมล็ดถั่วเหลือง U.S จากตลาด Oil World ในเมืองแฮมเบิกประเทศเยอรมัน ตั้งแต่เดือนมกราคม ปี 1960 ถึงเดือนธันวาคม ปี 2002 โดยเปรียบเทียบแบบจำลอง 6 แบบจำลอง ได้แก่ แบบจำลอง GARCH(1,1)-normal, GARCH(1,1)-student-t, FIGARCH(1,d,1)-normal, FIGARCH(1,d,1)-student-t, FIGARCH(1,d,0)-normal, และ FIGARCH(1,d,0)-student-t

ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลอง FIGARCH $(1,d,0)$ ภายใต้สมมติฐานว่ามีการกระจายตัวแบบ student-t นั้นเป็นแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดสำหรับความผันผวน (volatility) ของอัตราผลตอบแทนของเมล็ดข้าวสาลีและเมล็ดข้าวโพด ส่วนแบบจำลอง FIGARCH $(1,d,0)$ ภายใต้สมมติฐานว่ามีการกระจายตัวแบบปกติ (normal distribution) เป็นแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดสำหรับความผันผวน (volatility) ของอัตราผลตอบแทนของเมล็ดถั่วเหลือง เมื่อพิจารณาโดยรวมแล้วพบว่าแบบจำลอง FIGARCH นั้นเป็นแบบจำลองความผันผวน (volatility) ที่ใช้กับตลาดค้าข้าวระหว่างประเทศได้ดีกว่าแบบจำลอง GARCH ซึ่งแสดงให้เห็นว่าราคาของเมล็ดพืชทั้ง 3 ชนิดนี้มีคุณสมบัติของระบบความจำระยะยาว (long memory) อยู่

Sang Hoon Kang, Sang-Mok Kang, Seong-Min Yoon (2008) ได้ศึกษาถึงประสิทธิภาพการพยากรณ์ความผันผวน (volatility) ของราคาน้ำมันดิบในตลาด Brent, Dubai, และ West Texas Intermediate (WTI) ด้วยแบบจำลอง GARCH, IGARCH, CGARCH, และ FIGARCH โดยใช้ข้อมูลราคาปิดรายวันของราคาน้ำมันดิบ Brent , Dubai, WTI ตั้งแต่วันที่ 6 มกราคม ปี 1992 ถึงวันที่ 29 ธันวาคม ปี 2006

ผลการศึกษาพบว่าราคาน้ำมันดิบในตลาดทั้ง 3 นั้นมีคุณสมบัติของการคงอยู่ (persistence) ของความผันผวน (volatility) อยู่ จากการการพยากรณ์ราคาน้ำมันดิบทั้ง 3 ตลาดออกไปพบว่าแบบจำลอง FIGARCH เป็นแบบจำลองที่มีประสิทธิภาพในการพยากรณ์ราคาน้ำมันดิบในตลาด Brent, Dubai ดีกว่าแบบจำลองอื่น ๆ (GARCH, IGARCH, CGARCH) แต่ราคาน้ำมันดิบในตลาด WTI นั้นแบบจำลอง CGARCH มีประสิทธิภาพที่สุด ซึ่งผลการศึกษานี้เป็นการเสนอว่านักเศรษฐศาสตร์พลังงาน, ผู้วางนโยบายเกี่ยวกับพลังงาน, และนักวิเคราะห์ทางการเงิน ควรพิจารณาถึงคุณสมบัติของการคงอยู่ (persistence) ของการเปลี่ยนแปลงที่ไม่ได้คาดการณ์ (shock) หรือระบบความจำระยะยาว (long memory) ในความผันผวน (volatility) ของราคาน้ำมันดิบด้วย จากที่

แบบจำลอง FIGARCH และ CGARCH ซึ่งเป็นแบบจำลองระบบความจำระยะยาว (long memory) ได้แสดงให้เห็นว่าเป็นแบบจำลองที่ดีที่สุดในการพยากรณ์