บทที่ 4
การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ

หลังจากที่มีการซื้อขาย Stock Options ครั้งแรก ที่ Chicago Board Options Exchange (CBOE) เมื่อปี ค.ศ.1973 ตราสารสิทธิ (Options) ก็เป็นที่รู้จักแพร่หลาย และเป็นที่นิยมของนักลงทุน ดังนั้นการทำความเข้าใจวิธีการประเมินมูลค่าของตราสารสิทธิ จึงเป็นสิ่งที่จำเป็นเพื่อที่จะให้ได้ราคาที่มีความยุติธรรม (Fair Value) ทั้งต่อผู้ซื้อและผู้ขาย นั่นก็แสดงว่าไม่มีการทำกำไรระหว่างผู้ซื้อและผู้ขายตราสารสิทธิ หรือกำไรจากการซื้อขายมีค่าเท่ากับศูนย์นั่นเอง ทฤษฎีในการประเมินค่าตราสารสิทธิที่ถือเป็นพื้นฐานสำคัญและได้รับความนิยมใช้ มี 2 ทฤษฎี คือ แบบจำลอง Black-Scholes (Black-Scholes Model) และ แบบจำลอง Binomial (Binomial Model)

4.1 Black-Scholes Model

4.1.1 ที่มาของแบบจำลอง Black-Scholes

เมื่อปี ค.ศ.1973 นักวิชาการด้านการเงิน 2 ท่าน คือ Fischer Black และ Myron Scholes ได้สร้างสูตรประเมินค่าตราสารสิทธิ ที่ถือเป็นรากฐานของการประเมินค่าทรัพย์สิน หนี้สินทางการเงินยุคใหม่ ทฤษฎีนี้เป็นที่รู้จักในชื่อ Black-Scholes Model หรือบางแห่งอาจเรียกชื่อเต็มว่า Black-Scholes Option Pricing Model (BSOPM) เพื่อเป็นการให้เกียรติแก่ผู้คิดค้นแบบจำลองทั้ง 2 ท่าน พื้นฐานแนวความคิดในการสร้างสูตรการประเมินค่าตราสารสิทธิของนักวิชาการทั้ง 2 ท่านนี้ ก็คือว่า ตลาดหุ้น ตลาดกู้ยืม และตลาดตราสารสิทธิ ต้องมีความเชื่อมโยงซึ่งกันและกัน หากตลาดหุ้นได้กำหนดราคาหุ้นและตลาดกู้ยืมได้กำหนดอัตราดอกเบี้ยไว้แล้ว ตราสารสิทธิที่มีเงื่อนไขกำหนดไว้ชัดเจนจะต้องมีราคาที่สัมพันธ์กับราคาในตลาดทั้งสองรวมกับเงื่อนไขที่กำหนด ในการหาที่มาของแบบจำลอง Black-Scholes นี้ จะต้องใช้ความรู้ด้านคณิตศาสตร์เชิงฟิสิกส์มาพิสูจน์ร่วมกับ แนวความคิดเรื่องการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยงที่ เรียกว่า Risk Neutrality Argument และแบบจำลองการเคลื่อนไหวราคาหุ้นแบบ Log-Normal Distribution ก่อนที่จะพิสูจน์หาที่มาของแบบจำลอง Black-Scholes ขอสรุปแนวความคิดทั้งสองเรื่องที่เป็นพื้นฐานในการหาที่มาของแบบจำลอง โดยสังเขป

1. Risk Neutrality Argument

แนวความคิดนี้กล่าวว่านักลงทุนไม่ชอบความเสี่ยงจากการลงทุน (Risk Averse) จึงพยายามหลีกเลี่ยงความเสี่ยงที่จะเกิดขึ้น และคาดหวังอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในหลักทรัพย์ใดๆ ที่ไม่มีความเสี่ยงให้มีค่าเท่ากับอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง (Risk Free Interest Rate) ดังนั้น

$$E\left[C_T/C_t\right] = \frac{1}{B(t,T-t)}$$

หรือ $$C_t = E\left[C_T\right]B(t,T-t) \tag{4.1}$$

โดยที่ $E[\ ]$ คือ สัญลักษณ์ที่แสดงถึงมูลค่าคาดหวัง

C_T คือ มูลค่าของ Call Options ณ วันสิ้นสิทธิ

C_t คือ มูลค่าของ Call Options ณ ปัจจุบัน

$B(t,T-t)$ คือ ราคาของพันธบัตรที่ปราศจากความเสี่ยง ณ เวลาปัจจุบัน (t) ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ $1 ณ เวลาสิ้นสิทธิ (T)

โดยที่ $C_T = \max(0,S-K)$ แทนค่าลงในสมการ 3.1 จะได้

$$C_t = E\left[\max(0,S-K)\right]B(t,T-t) \tag{4.2}$$

เช่นเดียวกัน ถ้าต้องการทราบลักษณะของราคาหุ้นสามัญ ณ วันสิ้นสิทธิ จะมีค่าเท่ากับ

$$S_t = E\left[S_T\right]B(t,T-t) \tag{4.3}$$

ซึ่งจะพบค่า B(t,T-t) ก็คือ ค่าอัตราลดค่าแบบต่อเนื่อง (Continuous Discount factor) นั่นเอง ดังนั้นมูลค่าหุ้นสามัญ ณ ปัจจุบันจึงมีค่าเท่ากับค่าคาดหวังของราคาหุ้นในอนาคตคูณด้วยอัตราลดค่า

2. **Log-Normal Distribution**

แบบจำลองการเคลื่อนไหวราคาหุ้นแบบ Log-Normal Distribution เป็นที่รู้จักในอีกชื่อหนึ่งว่า Geometric Brownian Motion ซึ่งอธิบายถึงความน่าจะเป็นของลักษณะราคาหุ้นสามัญในอนาคต โดยพบว่าค่า Natural Log ของราคาหุ้นสามัญในอนาคตมีลักษณะเป็นแบบการแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ตามสมการที่ 4.4

$$\ln\left(S_{t+\Delta t}/S_t\right) = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,Z \tag{4.4}$$

โดยที่

$S_{t+\Delta t}/S_T$ คือ อัตราผลตอบแทนของหุ้นระหว่างเวลา t ไปจนถึง $t+\Delta t$

μ คือ ค่าเฉลี่ยแบบ log ของอัตราผลตอบแทนของหุ้นใน 1 หน่วยเวลา ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\alpha - \sigma^2/2$

α คือ ค่าเฉลี่ยแบบเรขาคณิตของอัตราผลตอบแทนของหุ้นใน 1หน่วยเวลา

σ คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ log ผลตอบแทนของหุ้นใน 1 หน่วยเวลา

Z คือ ตัวแปรสุ่มของการกระจายแบบ Normal ซึ่งมีค่าเฉลี่ย = 1 และมีค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 1

จากสมการที่ (4.4) จะได้

$$S_{t+\Delta t}/S_t = S_t\, e^{\left(\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,Z\right)} \tag{4.4 a}$$

ซึ่ง $S_{t+\Delta t} = S_t + \Delta S_t$ ดังนั้น

$$1+\frac{\Delta S_t}{S_t} = 1+\left(\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,Z\right)+\frac{\left(\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,Z\right)^2}{2!}+\ldots$$

เพราะว่า Δt ที่มี degree มากกว่า 1 มีค่าน้อยกว่า Δt มากๆ จึงสามารถละทิ้งได้ และ $E[Z^2] = 1$ [14] จะได้

$$\Delta S_t = \left(\mu + \sigma^2/2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z \qquad (4.4\,b)$$

นำสมการ (4.4), (4.4 a) และ (4.4 b) มาจัดรูปใหม่ จะได้

$$E\left[S_{t+\Delta t}\right] = S_t \exp\left(\left(\mu + \sigma^2/2\right)\Delta t\right) \qquad (4.5)$$

หรือ $E\left[S_{t+\Delta t}\right] = S_t \exp(\alpha \Delta t)$ (4.5 a)

โดยที่ $\alpha = \mu + \sigma^2/2$

หรือ $S_t = E\left[S_{t+\Delta t}\right] \exp(-\alpha \Delta t)$ (4.5 b)

จากการพิสูจน์ แบบจำลองการเคลื่อนไหวราคาหุ้น แบบ Log-Normal ดังแสดงตามสมการที่ (4-4) จนถึง (4-5 b) พบว่าอัตราผลตอบแทนของราคาหุ้น ณ ปัจจุบันจะเท่ากับ ราคาหุ้นในอนาคต Discount แบบ Continuous ด้วยปัจจัย 2 อย่างคือ อัตราผลตอบแทนเฉลี่ยแบบเรขาคณิต (α) และระยะเวลาจากปัจจุบันจนถึงวันในอนาคตตามที่ระบุไว้ (Δt) หากค่า α หรือ Δt มีค่าสูงขึ้น จะส่งผลให้อัตราผลตอบแทนของราคาหุ้นลดลง ในทางตรงกันข้ามถ้าค่า α หรือ Δt มีค่าลดลง จะทำให้อัตราผลตอบแทนของราคาหุ้นมีค่าสูงขึ้น

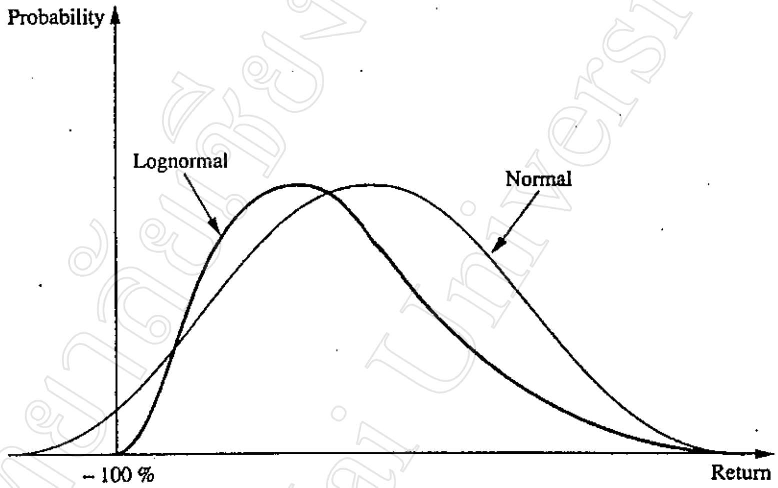
จะสังเกตได้ว่าความน่าจะเป็นในการกระจายราคาของหุ้นสามัญ มีลักษณะเป็นการแจกแจงแบบ Log-Normal สาเหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะว่า

ก. อัตราผลตอบแทนของราคาหุ้นในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง จะมีค่าต่ำสุด เท่ากับ -100 เปอร์เซ็นต์ คือมูลค่าของหุ้นจะมีค่าเท่ากับ 0 บาท ซึ่งสอดคล้องกับการแจกแจงแบบ Log-Normal แต่ถ้าเป็นการแจกแจงแบบ Normal อัตราผลตอบแทนของราคาหุ้นอาจจะมีค่าต่ำกว่า -100 เปอร์เซ็นต์ได้ เนื่องจาก

---

[14] Var [Z] = E [Z^2] - E^2[Z] โดยที่ E [Z] = 0 , และ Var [Z] = 1 เนื่องจากเป็นคุณสมบัติของการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย =0 และมีค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 1

$\ln(S_{t+\Delta t}/S_t)$ มีค่าเท่ากับ $\ln(0)$ ซึ่งมีค่าเป็น $-\infty$ ส่งผลทำให้ราคาหุ้นมีค่าติดลบ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังแสดงรายละเอียดตามรูป 4.1



รูป 4.1 แสดงความสัมพันธ์ของ อัตราผลตอบแทนในการแจกแจงแบบ Log-Normal เปรียบเทียบกับการแจกแจงแบบ Normal

ข. การแจกแจงแบบ Log-Normal มีลักษณะเป็นแบบ Positive Skewed คือ มีการเบ้ไปทางขวา (ตามรูป 4.1) ขณะที่อัตราผลตอบแทนต่ำสุดมีค่า เท่ากับ -100 เปอร์เซ็นต์ แต่อัตราผลตอบแทนสูงสุดจะมีค่าไม่จำกัด ยิ่งมีระยะเวลาเหลือมากเท่าใด โอกาสที่จะได้รับอัตราผลตอบแทนสูง ยิ่งมีโอกาสมากขึ้น

ค. ค่า Natural Logarithm ของความสัมพันธ์ราคาของหุ้นในอนาคตเทียบกับปัจจุบัน มีลักษณะเป็นการแจกแจงแบบปกติ ดังแสดงตามสมการที่ (4.4)

3. การพิสูจน์หาที่มาของแบบจำลอง Black-Schloes

ข้อสมมติฐานของแบบจำลอง Black-Scholes

ก. ตลาดซื้อขายตราสารสิทธิ, พันธบัตร และหุ้นสามัญ ดำเนินไปอย่างต่อเนื่อง ไม่มีปัจจัยใดเข้ามากระทบต่อการซื้อขายในตลาด

ข. อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงมีค่าคงที่ตลอดช่วงอายุของตราสารสิทธิ กำหนดให้มีค่าเท่ากับ r ดังนั้นมูลค่าพันธบัตรที่ปราศจากความเสี่ยง (Default Free Bond) ณ เวลาปัจจุบัน (t) และมีการจ่ายเงิน $ 1 ในวันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิ (T) ซึ่งก็คือ B [(t,T)] จะมีค่าเท่ากับ $e^{-r\tau}$ โดยกำหนดให้ τ มีค่าเท่ากับ T - t

ค. ราคาของสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้ในวันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิ มีลักษณะเป็นการแจกแจงแบบ Log-Normal โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\mu\tau$ และมีค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ σ

ง. ไม่มีการจ่ายเงินปันผล อธิบายได้โดยพิจารณาจากพจน์ $\sigma\left(\sqrt{\Delta t}\right)z$ ของการแจกแจงแบบ Log-Normal ตามสมการ (4.4) ซึ่งมีลักษณะเป็นแบบ Pure Diffusion แสดงว่าความไม่แน่นอนของราคาหุ้นสามารถคาดคะเนได้ หากมีการจ่ายเงินปันผลจะส่งผลให้เกิดความไม่แน่นอนที่ไม่สามารถคาดคะเนได้ เพราะการจ่ายเงินปันผลจะส่งผลให้ราคาสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้มีค่าลดลงทันที ในวันสิ้นสิทธิได้รับเงินปันผล (Ex-Dividend Date) ทำให้การแจกแจงราคาสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้มีลักษณะเป็นแบบก้าวกระโดด (Jump Diffusion) ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมุติฐานที่ต้องเป็น Pure Diffusion

จ. ไม่มีโอกาสในการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (No Arbitrage Opportunities) เหลืออยู่ในสภาวะสมดุล

การทำความเข้าใจเกี่ยวกับข้อสมมติฐานต่างๆ เป็นสิ่งสำคัญต่อการหาที่มาของแบบจำลอง Black-Scholes ซึ่งจะพบว่าการตั้งสมมติฐานเหล่านั้นเพื่อต้องการให้ขจัดความเสี่ยงที่ไม่สามารถคาดหวังได้ออกไปอย่างสิ้นเชิง (Perfect Hedge) สำหรับการพิสูจน์หาที่มาของแบบจำลอง Black-Scholes นี้ จะเลือกใช้ราคาหุ้นสามัญ (Stock Price) เป็นสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้และตราสารสิทธิมีลักษณะเป็นแบบยูโรเปียน เพราะผลตามข้อสมมุติฐานในข้อ ค. และ ง. สาเหตุที่เลือกใช้ราคาหุ้นสามัญเป็นตัวแทนของสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้ เป็นเพราะ

- ทุกคนต่างรู้จักหุ้นสามัญ (Stock) เป็นอย่างดี
- มีสภาพคล่องในการซื้อ-ขายที่ตลาดสูง
- ความผันผวนของราคาหุ้นสามัญ สามารถสังเกตได้ง่าย

สำหรับการพิสูจน์ที่มาของแบบจำลอง Black-Scholes ขั้นแรกจะเริ่มจากการกำหนดพารามิเตอร์ ของการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งก็คือ μ กับ σ ในรูปฟังก์ชั่นของราคาพันธบัตร ที่ได้อธิบายไว้เบื้องต้น ตามสมการที่ (4.5)

$$E(S_{t+\Delta t}/S_T) = e^{[(\mu+\sigma^2/2)\Delta t]}$$
$$= \frac{1}{B(t,\Delta t)}$$

จากข้อสมมุติฐาน แบบจำลอง Black- Scholes ข้อ ข. จะได้ว่า

$$r = \mu+\sigma^2/2 \quad (4.6)$$
$$= \alpha$$

นั่นก็คือ ค่าอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยแบบเรขาคณิต จะมีค่าเท่ากับอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงนั่นเอง ดังนั้นจากสมการที่ (4.2) และกำหนดให้ระยะเวลาจากปัจจุบันจนถึงวันสิ้นสิทธิ (τ) มีค่าเท่ากับ T - t จะได้

$$C_t = e^{-r\tau}E[\max(0, S_t - K)] \quad (4.7)$$

สำหรับการแก้สมการที่ (4.7) จะแบ่งเงื่อนไขสมการ ออกเป็น 2 กรณี คือ

<u>กรณีที่ 1</u> : ถ้าค่า $S_T \leq K$

ในกรณีที่ 1 นี้ หากราคาหุ้นสามัญมีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับราคาใช้สิทธิ ก็ไม่จำเป็นที่จะต้องใช้สิทธิใน Call Options เพราะสามารถไปซื้อหุ้นได้ที่ตลาดเลย ทำให้มูลค่า Call Options เท่ากับศูนย์

ดังนั้น ถ้า $S_T \leq K$ จะได้ค่า $C_t = 0$

<u>กรณีที่ 2</u> : ถ้าค่า $S_T > K$

จากสมการที่ (4.7) จะได้

$$C_t = e^{-r\tau}.E[S_t - K]$$
$$= e^{-r\tau}.E[S_t] - e^{-r\tau}.K$$

กำหนดให้ความน่าจะเป็นที่ราคาของหุ้น (S) มีค่าสูงกว่าราคาใช้สิทธิ (K) มีค่าเท่ากับ p เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้นมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับราคาใช้สิทธิ คือ 1-p

นำกรณีที่ 1 และ 2 มาเขียนสมการรวมกัน จะได้

$$\begin{aligned} C_t &= (1-p)(0) + p\,(e^{-r\tau} E\left[S_T \middle| S_T > K\right] - e^{-r\tau} K) \\ &= e^{-r\tau} E\left[S_T \middle| S_T > K\right].p - Ke^{-r\tau}.p \end{aligned} \tag{4.8}$$

เพื่อง่ายต่อความเข้าใจในการแก้สมการ (4.8) ขอแบ่งการคำนวณออกเป็น 2 ส่วน

<u>ส่วนที่ 1</u> : การแก้สมการหาค่า p ซึ่งก็คือค่า Prob [$S_T > K$]

จากสมการที่ (4.4) จะได้

$$\begin{aligned} S_T &= S_t\, e^{(\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\, z)} \\ p &= \mathrm{Prob}[S_t\, e^{(\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\, z)} > K] \\ &= \mathrm{Prob}[Z > -\{\ln(S_t/K) + \mu\tau\}/\sigma\sqrt{\tau}\,] \end{aligned}$$

จากคุณสมบัติของการแจกแจงแบบปกติ ค่า Prob[Z>-x]จะมีค่าเท่ากับ Prob[Z<x]

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{Prob}\left[Z < \{\ln(S_t/K) + \mu\tau\}/\sigma\sqrt{\tau}\right] \\ &= N\left[\ \{\ln(S_t/K) + \mu\tau\}/\sigma\sqrt{\tau}\right] \end{aligned}$$

จะพบว่าค่าความน่าจะเป็น (p) หาได้จาก ค่าสะสมของการแจกแจงแบบปกติ (Cumulative Normal Distribution) นั่นเอง หากกำหนดให้

$$p = N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) \tag{4.9}$$

เพราะฉะนั้น $$d_1 = \left[\ln\left\{(S_t/K) + \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\}/\sigma\sqrt{\tau}\right]$$

จากสมการที่ (4.6) r มีค่าเท่ากับ $\mu + \frac{\sigma^2}{2}$ จะได้

$$d_1 = \left\{\ln(S_t/K) + r\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\}/\sigma\sqrt{\tau} \tag{4.10}$$

<u>ส่วนที่ 2</u> : การแก้สมการ หาค่า $E[S_T|S_T\rangle K].p$

กำหนดให้ตัวแปร q แทนค่า $E[S_T|S_T\rangle K].p$ ซึ่งหมายถึงราคาของหุ้นในวันสิ้นสิทธิที่มีลักษณะเป็น In-The-Money สามารถหา q ได้จาก

$$q = E[S_T > K]p$$
$$= \int_K^{\alpha} S_t e^{[\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}]} . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{[-x^2/2]} dx$$
$$= S_t e^{(\mu+\sigma^2/2)\tau} \int_K^{\alpha} e^{\left[-(\sigma\sqrt{\tau}-x)^2/2\right]} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.11}$$

ใช้เทคนิคของการ Integrate โดยให้พจน์ $\sigma\sqrt{\tau}-x$ มีค่าเท่ากับ y ดังนั้น dx= -dy

จาก $p = Prob[Z < \{\ln(S_T/K)+\mu\tau\}/\sigma\sqrt{\tau}]$ เทียบเท่ากับ $Prob[Z < y]$ และตามสมการที่ (4.9) ที่สรุปว่า $y < d_1$ จะสามารถจัดสมการที่ (4.11) ในรูปอย่างง่าย ดังนี้

$$q = S_t e^{(r\tau)} \int_{-\alpha}^{d_1} e^{[-y^2/2]} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$
$$q = S_t e^{(r\tau)} .N(d_1) = E[S_T > K].p \tag{4.12}$$

นำสมการที่ (4.9) และ (4.12) ไปแทนเข้าไปในสมการที่ (4.8) ก็จะได้ค่าของ C_t ออกมา ดังนี้

$$C_t = e^{-r\tau}.E[S_T > K].p - Ke^{-r\tau}.p$$
$$C_t = e^{-r\tau}.S_t e^{r\tau}.N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau})$$
$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau})$$
$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \tag{4.13}$$

โดยที่

$$d_1 = \left\{\ln(S_t/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right\} \Big/ \sigma\sqrt{\tau}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

สมการที่ (4.13) ก็คือ สมการของแบบจำลอง Black-Scholes นั่นเอง ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ใช้ประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ ชนิด Call แบบ ยูโรเปียน (European Call Options) เนื่องจากมีการใช้สิทธิเฉพาะวันสิ้นสิทธิเท่านั้น ในการพิสูจน์หาที่มาของแบบจำลอง Black-Scholes ค่อนข้างยุ่งยาก ซับซ้อน และต้องพบกับความยุ่งยากจากการใช้คณิตศาสตร์มาเป็นเครื่องมือในการแก้สมการ แต่จะทำให้มีความเข้าใจในการประเมินค่าตราสารสิทธิ และข้อจำกัดต่างๆ ของแบบจำลอง Black-Scholes เป็นอย่างดี

การประเมินมูลค่า European Call Options ตามสมการที่ 4.13 มีส่วนประกอบหลัก 2 ส่วน คือ

1. พจน์ S_t N(d_1) หมายถึง ราคาหุ้นสามัญที่คาดหวังไว้ในวันสิ้นสิทธิและคาดว่าจะมีลักษณะเป็นแบบ In-The-Money

2. พจน์ $Ke^{-r\tau}N(d_2)$ หมายถึง มูลค่าที่คาดหวังของราคาใช้สิทธิในหุ้นสามัญ ณ วันสิ้นสิทธิ คูณด้วยอัตราลดค่ามาเป็นมูลค่าหุ้น ณ ปัจจุบัน ซึ่งก็คือต้นทุนของหุ้นสามัญที่คาดว่าจะต้องจ่ายชำระ

สำหรับการหามูลค่าของ ตราสารสิทธิชนิด Put (Put Options) ก็สามารถหาค่าได้โดยใช้ค่าเสมอภาคระหว่าง Put กับ Call (Put-Call Parity) ของสินทรัพย์อ้างอิงจากราคาหุ้นสามัญ

จาก ค่าเสมอภาคระหว่าง Put กับ Call ที่กล่าวว่า

$$P_t = C_t + Ke^{-r\tau} - S_t \tag{4.14}$$

แทนค่าสมการที่ (4.14) ในสมการที่ (4.13) จะได้

$$P_t = S_t N(d_1) - {}_{15}Ke^{-r\tau}N(d_2) + Ke^{-r\tau} - S_t$$
$$P_t = [N(d_1) - 1]\ S_t - [N(d_2) - 1]Ke^{-r\tau}$$
$$P_t = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - S_tN(-d_1) \tag{4.15}$$

สมการที่ (4.15) แสดงถึง การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ ชนิด Put แบบยูโรเปียน (European Put Options) นอกจากนี้ สามารถหาค่า Put Options ได้อีกวิธีหนึ่ง โดยใช้สมการที่ (4.14) เมื่อทราบค่า Call Options ก็จะสามารถหาค่า Put Options ได้

---

[15] N(d) – 1 มีค่าเท่ากับ -N(-d_1)

เป็นที่น่าสังเกตว่า ไม่ว่าจะเป็นการหามูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call หรือ Put ก็ตาม จะต้องทราบตัวแปรทั้ง 5 ค่า ที่จะแทนค่าเข้าไปในแบบจำลอง Black-Scholes อันประกอบด้วย ราคาสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้ (Underlying Assets ; S), ราคาใช้สิทธิ (Striking Price ; K), ระยะเวลาจนถึงวันสิ้นสิทธิ (Time to maturity ; τ), อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง (Risk free rate ; r) และค่าความผันผวนของสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้ (Volatility ;σ) ดังนั้น จึงอาจกล่าวถึงตราสารสิทธิชนิด Call และ Put ในรูปของฟังก์ชั่นได้ ซึ่งก็คือ $C(S,K,\tau,r,\sigma)$ และ $P(S,K,\tau,r,\sigma)$ ตามลำดับ

4.1.2 การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากราคาหุ้นสามัญ (Stock Options)

การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิของสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้ใดๆ ไม่ว่าสินทรัพย์อ้างอิงจะเป็น ราคาหุ้นสามัญ, อัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ หรืออัตราดอกเบี้ยก็ตาม จะมีอยู่ 2 รูปแบบ ขึ้นอยู่กับลักษณะการใช้สิทธิ คือ แบบยูโรเปียน ซึ่งมีการใช้สิทธิของ Options ได้เฉพาะในวันสิ้นสิทธิ และแบบอเมริกัน ที่มีการใช้สิทธิของ Options ได้ก่อนวันสิ้นสิทธิหากเห็นว่าการใช้สิทธินั้นทำให้ได้รับผลประโยชน์ที่พึงพอใจ

1. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียน

ตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียน สามารถใช้สิทธิได้เฉพาะวันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิเท่านั้น จึงมีวิธีการประเมินมูลค่าที่แน่นอน โดยแบ่งรายละเอียดเป็น 3 ส่วน ดังนี้

ก. <u>การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล (Non-Dividends)</u>

การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิในกรณีนี้ก็คือ แบบจำลอง Black-Scholes นั่นเอง ซึ่งสรุปได้ดังนี้

<u>กรณี Call Options</u> : $c \;=\; S.N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$

<u>กรณี Put Options</u> : $p \;=\; Ke^{-r\tau}N(-d_2) - Sn(-d_1)$

หรือใช้ $p \;=\; c + Ke^{-r\tau} - S$

ในการทำความเข้าใจการวิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ จะขออธิบายโดยการยกตัวอย่างประกอบ ดังแสดงตามตัวอย่างที่ 4.1

ตัวอย่างที่ 4.1 ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ตราสารสิทธิ ชนิด Call และ Put แบบยูโรเปียน ของหุ้นสามัญที่มีระยะเวลาจนถึงวันสิ้นสิทธิ 3 เดือน ราคาหุ้น ณ ปัจจุบันมีค่า 60 บาท หากตราสารสิทธินี้มีราคาใช้สิทธิ 65 บาท กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ ร้อยละ 8 ต่อปี และความผันผวนของราคาหุ้นมีค่าเท่ากับ ร้อยละ 30 ต่อปี

จากตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดให้ S= 60 บาท, K = 65 บาท, τ = 0.25ปี, r = 8%, σ = 30%

จาก $c = S.N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$

โดยที่ $d_1 = \dfrac{\ln(60/65) + (0.08 + (0.3)^2/2) * 0.25}{0.3\sqrt{0.25}}$

$d_1 = -0.3253$

$d_2 = d_1 - 0.30\sqrt{0.25} = -0.4753$

ค่าสะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ N (.) สามารถหาได้จากการประมาณค่าโดยใช้ตาราง Cumulative Normal Distribution ตามภาคผนวก 1

$N(d_1) = N(-3.3253) = 0.3725$

$N(d_2) = N(-0.4753) = 0.3173$

$c = 60(0.3725) - 65e^{-(0.08)(0.25)}(0.3173)$

$c = 2.13$ บาท

และสามารถหาค่า Put Options ได้จาก

$p = c + Ke^{-r\tau} - S$

$= 2.13 + 65e^{-(0.08 \times 0.25)} - 60$

$p = 5.84$ บาท

การประเมินมูลค่าตามตัวอย่างข้างต้น จะได้มูลค่า European Call Options ของหุ้นสามัญ เท่ากับ 2.13 บาท และ European Put Options ของหุ้นสามัญเท่ากับ 5.84 บาท

ข. <u>การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลที่ทราบค่า (Known Discrete Dividends)</u>

แบบจำลอง Black-Scholes ข้างต้น ได้ตั้งข้อสมมติฐานที่ว่าหุ้นที่ถูกระบุไว้ในตราสารสิทธินั้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ซึ่งในความเป็นจริงแล้วจะมีน้อยกรณีที่เป็นเช่นนั้น ดังนั้นในกรณีนี้จะสนใจศึกษาวิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียน ที่ทราบจำนวนเงินปันผลและวันที่จ่ายเงินปันผลที่แน่นอน การจ่ายเงินปันผลลักษณะนี้มีลักษณะเป็น Discrete หรือบางแห่งอาจเรียกว่าเป็นการจ่ายเงินปันผลแบบ Lumpy

เป็นเพราะว่าแบบจำลอง Black-Scholes ไม่ได้คิดผลกระทบจากเงินปันผลที่มีต่อการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ ดังนั้นจึงต้องมีการปรับปรุงแบบจำลอง Black-Scholes ให้คำนึงถึงผลของเงินปันผลจ่ายด้วย โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. กำหนดวันหมดสิทธิในเงินปันผล (Ex-Dividend Date) และจำนวนเงินปันผลที่ต้องจ่ายเงินตลอดช่วงอายุเวลาของตราสารสิทธิ

2. หามูลค่าปัจจุบันของเงินปันผลทั้งหมดตลอดช่วงอายุของตราสารสิทธิ โดยใช้อัตราลดค่าเท่ากับอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง ตามสมการที่ (4.16)

$$D = e^{-r(t_1-t_0)}D_1 + e^{-r(t_2-t_0)}D_2 + \ldots + e^{-r(t_n-t_0)}D_n \qquad (4.16)$$

กำหนดให้ D คือ มูลค่าปัจจุบันของเงินปันผลทั้งหมดตลอดช่วงอายุของตราสารสิทธิ

$D_1, D_2 \ldots D_n$ คือ จำนวนเงินปันผลที่กำหนดจ่ายในแต่ละช่วงเวลา

$t_1, \ldots\ldots t_n$ คือ วันหมดสิทธิในการจ่ายเงินปันผลแต่ละครั้ง โดย t_0 คือเวลาปัจจุบัน

3. เนื่องจากหลังวันหมดสิทธิในเงินปันผล ราคาหุ้นจะมีค่าลดลงเท่ากับเงินปันผลที่ได้จ่ายไป (ไม่คำนึงถึงผลทางภาษี) ดังนั้นราคาหุ้นที่ใช้แทนค่าในแบบจำลอง Black-Scholes (S^*) จะต้องเป็นราคาหุ้นปัจจุบัน (S_0) หักด้วยมูลค่าปัจจุบันของเงินปันผลทั้งหมด (D) กล่าวคือ

$$S^* = S_0 - D \qquad (4.17)$$

4. แทนค่าราคาหุ้นที่หักเงินปันผล (S^*) ลงในสมการที่ (4.13) ทำให้สามารถปรับปรุงแบบจำลอง Black-Scholes ให้คำนึงถึงผลของการจ่ายเงินปันผลที่ทราบค่าแน่นอนได้ การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิในกรณีนี้เป็นไปตามสมการที่ (4.18) สำหรับ Call Options และตามสมการที่ (4.19) สำหรับ Put Options

$$c \quad = \quad S^{*}N(d_1) - e^{-r\tau}N(d_2)K \tag{4.18}$$

$$d_1 \quad = \quad \frac{\ln(S^{*}/K) + (r + (\sigma)^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 \quad = \quad d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

ใช้ค่าเสมอภาคระหว่าง Put และ Call จะได้

$$P \quad = \quad Ke^{-r\tau}N(-d_2) - S^{*}N(-d_1) \tag{4.19}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.2</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ตราสารสิทธิ ชนิด Call และ Put แบบยูโรเปียน ของหุ้นสามัญที่ออกจำหน่ายเมื่อวันที่ 1 มกราคม 2542 และมีอายุ 1 ปี โดยคาดว่าจะมีวันจ่ายเงินปันผลและจำนวนเงินปันผลจ่ายเป็นไปตามข้อมูลข้างล่าง ถ้าราคาหุ้น ณ ปัจจุบันมีค่า 100 บาท หากตราสารสิทธิมีราคาใช้สิทธิ 100 บาท กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงมีค่าเท่ากับร้อยละ 5 ต่อปี และความผันผวนของราคาหุ้นมีค่าเท่ากับร้อยละ 20 ต่อปี

วันจ่ายเงินปันผล	จำนวนเงินที่คาดว่าจะจ่าย (บาท)
1 พ.ค. 2542	0.80
1 ส.ค. 2542	0.80

จากตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดให้ S=100 บาท, K=100 บาท, τ = 1 ปี, r = 5%, σ = 20%

มูลค่าปัจจุบันของเงินปันผลในกรณีนี้ เท่ากับ

$$0.8\,e^{-(0.05)\,(4/12)} + 0.8\,e^{-(0.05)\,(7/12)} = 1.564 \text{ บาท}$$

เนื่องจากหลังวันหมดสิทธิในเงินปันผล ราคาหุ้นจะมีค่าลดลงเท่ากับเงินปันผลที่ได้จ่ายไป ดังนั้นราคาหุ้น ณ ปัจจุบัน (S*) มีค่าเท่ากับ 100 - 1.564 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 98.436 บาท

มูลค่า Call Options หาได้ตามสมการที่ (4.18) โดยใช้ค่า S* = 98.436 บาท

จาก $\quad c \quad = \quad S^{*}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$

โดยที่ $\quad d_1 \quad = \quad \dfrac{\ln(98.436/100) + [0.05 + (0.20)(0.2)(0.5)]\text{x}1}{0.20(\sqrt{1}\quad)}$

$$d_1 \quad = \quad 0.2712$$

$$d_2 \quad = \quad 0.2712 - 0.20(\sqrt{1}\quad) \quad = \quad 0.0712$$

ค่าสะสมของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ N (.) สามารถหาได้จากการประมาณค่าโดยใช้ตาราง Cumulative Normal Distribution ตามภาคผนวก ก ดังนั้น

$N(d_1) = 0.6069 \quad ; \quad N(d_2) = 0.5284$

$c = 98.436\,(0.6069) - (100)\,e^{-(0.05)(1)}\,(0.5284)$

$= 9.48$ บาท

หากต้องการหาราคา Put Options สามารถหาได้จากค่าเสมอภาค Put และ Call

$p = c + Ke^{-r\tau} - S^*$

หรือสามารถหาได้จาก

$p = Ke^{-r\tau} N(-d_2) - S^* N(-d_1)$

เนื่องจากทราบค่า Call Options จึงสามารถหาค่า Put Options โดยใช้วิธีแรก เพราะการคำนวณหาค่าทำได้ง่ายกว่าอีกวิธีหนึ่ง

จะได้ $p = 9.48 + 100\,e^{-(0.05)(1)} - 98.436$

$p = 6.17$ บาท

การประเมินมูลค่าตามตัวอย่างที่ 4.2 จะได้ มูลค่า European Call Options ของหุ้นสามัญ เท่ากับ 9.48 บาท และ European Put Options ของหุ้นสามัญ เท่ากับ 6.17 บาท ซึ่งจะพบว่ามูลค่าของ Call และ Put Options ตามตัวอย่างนี้มีมูลค่าค่อนข้างสูงเนื่องจากตราสารสิทธิมีอายุถึง 1 ปี

ค. <u>การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลแบบต่อเนื่อง (Continuous Dividend)</u>

Robert Merton[16] (1973) เป็นผู้อธิบายการปรับค่าแบบจำลอง Black-Scholes ให้คำนึงถึงผลของการจ่ายเงินปันผลแบบต่อเนื่อง เนื่องจากเขามองเห็นว่าตราสารสิทธิในดัชนีราคาหุ้น (Index Options) ประกอบด้วยหุ้นจำนวนมาก ซึ่งมีการจ่ายเงินปันผลตลอดปี โดยที่ผลตอบแทนทั้งหมดในเงินปันผลของดัชนีราคาหุ้นหาได้จากผลตอบแทนของราคาหุ้นที่นำมาคิดเป็นดัชนีนั่น

---

[16] Robert Merton, "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, (1973) : 141-183.

เอง ดังนั้นจึงตั้งข้อสมมุติฐานว่าการจ่ายเงินปันผลเป็นชนิดต่อเนื่อง อันเป็นที่มาของแบบจำลอง Black-Scholes-Merton ซึ่งได้ข้อสรุป ดังนี้

$$c = S.e^{-q\tau}.N(d_1^*) - Ke^{-r\tau}N(d_2^*) \tag{4.20}$$

โดย $$d_1^* = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2^* = d_1^* - \sigma\sqrt{\tau}$$

ค่า q ตามสมการที่ (4.20) หมายถึง อัตราผลตอบแทนต่อปีของเงินปันผลชนิดต่อเนื่องจากหุ้นสามัญ

จากแบบจำลอง Black-Scholes-Merton จะสังเกตได้ว่าราคาหุ้นปัจจุบันจะใช้อัตราผลตอบแทนจากเงินปันผล (q) เป็นอัตราลดค่า ในขณะที่ราคาใช้สิทธิเมื่อนำมาคิดเป็นมูลค่าปัจจุบันจะใช้อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง (r) เป็นอัตราลดค่า และมีข้อแตกต่างจากแบบจำลอง Black-Scholes อีกประการหนึ่ง คือ พจน์ ($r+\sigma^2/2$) ในการหาค่า d_1 จะเปลี่ยนเป็น ($r-q+\sigma^2/2$) หากแทนค่า q = 0 ซึ่งหมายถึงไม่มีการจ่ายเงินปันผล จะพบว่าเป็นแบบจำลอง Black-Scholes นั่นเอง สำหรับมูลค่า Put Options จะหาได้ตามสมการที่ (4.21)

$$p = -Se^{-q\tau}N(-d_1^*) - Ke^{-r\tau}N(-d_2^*) \tag{4.21}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.3</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ตราสารสิทธิ ชนิด Call และ Put แบบยูโรเปียนของหุ้นสามัญที่มีราคาใช้สิทธิเท่ากับราคาหุ้น ณ ปัจจุบัน ซึ่งมีราคาเท่ากับ 60 บาท โดยมีระยะเวลาเหลืออีก 6 เดือน ก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ กำหนดให้ อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงมีค่าเท่ากับร้อยละ 9 ต่อปี, ความผันผวนของราคาหุ้นมีค่าเท่ากับร้อยละ 20 ต่อปี และอัตราผลตอบแทนในเงินปันผลจากหุ้นสามัญเท่ากับร้อยละ 13.75 ต่อปี

จากตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดให้ S = 60 บาท, K = 60 บาท, τ = 0.5 ปี, r = 9%, σ= 20% และ q = 13.75%

$$c = S.e^{-q\tau}N(d_1^*) - Ke^{-r\tau}Nd_2^*)$$

$$d_1^* = \frac{\ln(60/60) + [0.09 - 0.1375 + (0.2)(0.2)(0.5)]0.5}{0.2\sqrt{0.5}}$$

$$d_1^* = -0.0972$$

$$d_2 = -0.0972 - 0.2\sqrt{0.5} = -0.2386$$

จะได้

$$N(d_1^*) = N(-0.0972) = 0.4613$$

$$N(d_2^*) = N(-0.2386) = 0.4095$$

แทนค่า $N(d_1^*)$ และ $N(d_2^*)$ เพื่อหาค่า c จะได้

$$c = 60\,e^{-(0.1375)(0.5)}(0.4613) - 60\,e^{-(0.09)(0.5)}(0.4095)$$

c = 2. 35 บาท

และสามารถหา Put Option ได้จากค่าเสมอภาคระหว่าง Put และ Call โดยพจน์ของ S จะแทนด้วยค่า $Se^{-q\tau}$ เนื่องจากผลของการจ่ายเงินปันผล

$$p = c + Ke^{-r\tau} - Se^{-q\tau}$$

$$p = 2.35 + 60\,e^{-(0.09)(0.5)} - 60\,e^{-(0.1375)(0.5)}$$

p = 3.70 บาท

การประเมินมูลค่าตามตัวอย่างที่ 4.3 จะได้มูลค่า European Call Options ของหุ้นสามัญเท่ากับ 2.35 บาท และ European Put Options ของหุ้นสามัญ มีค่าเท่ากับ 3.70 บาท

2. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบอเมริกัน

ตราสารสิทธิแบบอเมริกัน สามารถใช้สิทธิได้ตลอดเวลาจนกว่าอายุของตราสารสิทธิจะหมดสิ้น ทำให้การหาวิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิทำได้ยากและมีความซับซ้อนมากกว่าการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบยูโรเปียนมาก เนื่องจากตราสารสิทธิสามารถใช้สิทธิก่อนวันสิ้นสิทธิได้ (Early Exercise) ถ้าเห็นว่าการใช้สิทธินั้นเป็นผลประโยชน์ (มีกำไร) ซึ่งจะส่งผลให้การหาวิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิเป็นเพียงค่าโดยประมาณ (Closed-Form Approximations) ไม่ใช่มูลค่าที่แน่นอน (Exact Formula) เหมือนกับการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน และการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ชนิด Call และชนิด Put ก็มีวิธีการประเมินที่ไม่เหมือน

กันเลย เป็นเพราะว่าการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุของ American Call Options จะสมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อเป็นการใช้สิทธิก่อนที่จะถึงเวลาสิ้นสิทธิในเงินปันผลเท่านั้น เนื่องจากการจ่ายเงินปันผลจะทำให้ราคาหุ้นสามัญมีค่าลดลง เท่ากับจำนวนเงินปันผลที่ได้จ่ายไปหลังวันสิ้นสิทธิในเงินปันผล (Ex-Dividend Date) เมื่อราคาหุ้นสามัญลดลง มูลค่า Call Options ก็ลดลงตามไปด้วย ดังนั้นจึงไม่เหมาะสมหากมีการใช้สิทธิของ Call Options หลัง Ex-Dividend Date ในขณะที่การใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุของ American Put Options สามารถทำได้ตลอดเวลาโดยเฉพาะอย่างยิ่งช่วงแรกๆ ของ Ex-Dividend Date จะให้ผลประโยชน์มากที่สุด

การนำแบบจำลอง Black-Scholes มาดัดแปลงเพื่อหาวิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน มีวิธีที่ซับซ้อนจึงทำความเข้าใจได้ยาก เหมาะสำหรับใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิมากกว่า อย่างไรก็ตามในที่นี้จะอธิบายรายละเอียดโดยสังเขป เพื่อทำความเข้าใจวิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบอเมริกัน โดยแบ่งเนื้อหาเป็น 4 ส่วน ดังนี้

ก. <u>การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ชนิด Call (American Call Options) ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล</u>

ในกรณีของ American Call Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ก็สามารถหามูลค่าตราสารสิทธิได้โดยใช้วิธีเดียวกับการหามูลค่า European Call Options เพราะว่าหุ้นที่ไม่มีการจ่ายเงินปันผลจะทำให้ Call Options ไม่ถูกใช้สิทธิก่อนกำหนดเลย ดังนั้น มูลค่า American Call Options ชนิดที่ไม่มีการจ่ายเงินปันผล จะมีค่าเท่ากับมูลค่าของ European Call Options

ข. <u>การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ชนิด Call (American Call Options) ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล</u>

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า American Call Options อาจมีการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิในตราสารสิทธิ (Early Exercise) ได้ เมื่อเป็นการใช้สิทธิก่อนที่จะถึงเวลาสิ้นสิทธิในเงินปันผล แต่ต้องเปรียบเทียบกับการถือตราสารสิทธินั้นไว้จนถึงวันสิ้นสิทธิด้วยว่ากรณีใดจะให้ผลประโยชน์ต่อผู้ถือ Call Options มากกว่ากัน ทฤษฎีที่ดัดแปลงแบบจำลอง Black-Scholes ให้ประมาณค่า American Call Options ชนิดที่มีการจ่ายเงินปันผล มีหลายทฤษฎีด้วยกัน สำหรับในที่นี้จะเลือกทฤษฎีที่แพร่หลายและใช้กันอยู่ทั่วไป 2 ทฤษฎี คือ

ข.1 แบบจำลอง Pseudo-American Call

ข.2 แบบจำลองของ Roll-Geske-Whaley Compound Options

ข.1 แบบจำลอง Pseudo-American Call

แบบจำลอง Pseudo-American Call นี้คิดค้นโดย Fischer Black ซึ่งอาจเป็นที่รู้จักในอีกชื่อหนึ่งว่า Black's Approximation ใช้ในการประมาณหาค่า American Call Options อย่างคร่าวๆ แต่วิธีนี้ก็มีความสำคัญเป็นอย่างมาก เพราะจะทำให้เข้าใจถึงปัจจัยที่มีผลต่อการใช้สิทธิของตราสารสิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ และที่สำคัญจะทำให้เข้าใจถึงความแตกต่างของตราสารสิทธิแบบ อเมริกัน และตราสารสิทธิแบบยูโรเปียนได้เป็นอย่างดี หลักการหามูลค่าตราสารสิทธิโดยใช้แบบจำลองนี้จะเริ่มต้นจากการใช้แบบจำลอง Black-Scholes หามูลค่า Call Options ณ แต่ละช่วงเวลาก่อนวันสิ้นสิทธิของเงินปันผลในแต่ละครั้ง จากนั้นนำไปเปรียบเทียบกับมูลค่า Call Options ณ วันสิ้นสิทธิ หากกรณีใดมีค่ามากกว่ากันก็ใช้ค่านั้นเป็นมูลค่าของ American Call Options โดยมีรายละเอียดดังนี้

สมมติว่าหุ้นสามัญมีการประกาศจ่ายเงินปันผล 2 ครั้ง ก่อนถึงวันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิ คือเวลา t_1 และ t_2

หากมีการใช้สิทธิ Call Options ก่อนเวลา t_1 สมมุติเป็น ณ เวลา $t_1-\varepsilon$ โดยค่า ε เป็นค่าที่คงที่ค่าหนึ่งที่มีค่าน้อยมาก จึงถือได้ว่าอายุของตราสารสิทธิมีค่าเท่ากับ t_1 นั่นเอง แต่เนื่องจากผู้ถือสิทธิ Call Options มีการใช้สิทธิก่อนถึงเวลา t_1 จึงยังคงได้รับเงินปันผลทั้งครั้งที่ 1 และ 2 ดังนั้นมูลค่าหุ้นสามัญ ณ ปัจจุบัน (S*), ราคาใช้สิทธิ ณ เวลา t_1 (K*) และอายุของตราสารสิทธิ ณ เวลา t_1 (T*) มีค่าดังนี้

$$S^* = S - D_1 e.^{-rt_1} - D_2 e^{-rt_2}$$

$$K^* = K - D_1 - D_2.e^{-r(t_2-t_1)}$$

$$T^* = t_1$$

นำค่า S* ไปแทนใน S, K* แทนใน K, T* แทนใน τ ของแบบจำลอง Black-Scholes จะได้ค่า Call Options ณ เวลาการจ่ายเงินปันผลครั้งที่ 1 (C_1)

เช่นเดียวกัน ถ้ามีการใช้สิทธิ Call Options ก่อนเวลา t_2 ตัวแปรในส่วนของราคาใช้สิทธิ ณ เวลา t_2 (K**) และอายุของตราสารสิทธิ ณ เวลา t_2 (T**) ที่จะแทนค่าในแบบจำลอง Black-Scholes มีค่าดังนี้

$$K^{**} = K - D_2$$
$$T^{**} = t_2$$

นำค่า S* ไปแทนใน S, K** แทนใน K, T** แทนใน τ ของแบบจำลอง Black-Scholes จะได้ค่า Call Options ณ เวลาการจ่ายเงินปันผลครั้งที่ 2 (C_2)

หากไม่มีการใช้สิทธิของ Call Options ก่อนถึงวันสิทธิ ก็เปรียบเสมือนว่าตราสารสิทธินี้มีการใช้สิทธิเฉพาะในวันสิ้นสิทธิเท่านั้น ซึ่งวิธีการหามูลค่า Call Options ก็ทำได้โดยวิธีเดียวกับการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นมีเงินปันผลจ่ายที่ทราบค่าแน่นอน สมมุติว่าค่าที่ได้มีค่าเท่ากับ C_m

มูลค่าของ American Call Options โดยวิธีแบบจำลอง Pseudo-American (C) จะมีค่า

$$C = \max (C_1, C_2, C_m) \tag{4.22}$$

ในกรณีที่หุ้นสามัญมีการจ่ายเงินปันผล เท่ากับ n ครั้ง ก่อนวันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิ มูลค่า American Call Options ก็จะเปลี่ยนเป็น

$$C = \max(C_1, C_2, \ldots, C_n, C_m) \tag{4.23}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.4</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ American Call Options ของหุ้นที่มีอายุ 1 ปี โดยมีรายละเอียดอื่นๆ ตามตัวอย่างที่ 4.2

ตามตัวอย่างที่ 4.2 ได้กำหนดให้ S = 100 บาท, K = 100 บาท, r = 20%, τ = 1 ปี, D_1 = 0.80 บาท, t_1 = 4/12 , D_2 = 0.80 บาท และ t_2 = 7/12

<u>กรณีที่ 1</u> : หากมีการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ (ณ เวลา t_1-ε) จะได้

$$S^* = 100 - 0.8e^{-(0.05)(4/12)} - 0.8e^{-(0.05)(7/12)} = 98.436 \text{ บาท}$$

$$K^* = 100 - 0.80 - 0.8e^{-(0.05)(7/12-4/12)} = 98.410 \text{ บาท}$$

$$T^* = 4/12 = 0.333 \text{ ปี}$$

$$d_1 = \frac{\ln(98.436/98.410) + [0.05 + (0.2)(0.2)(0.5)]0.333}{0.2\sqrt{0.333}}$$

$$d_1 = 0.2043$$

$$N(d_1) = 0.5809$$

$$d_2 = 0.2043 - 0.2\sqrt{0.333} = 0.0889$$

$$N(d_2) = 0.5354$$

$$C_1 = 98.436(0.5809) - (98.41)e^{-(0.05)(0.333)}(0.5354)$$

$$C_1 = 5.36 \text{ บาท}$$

<u>กรณีที่ 2</u> : หากมีการใช้สิทธิ ณ เวลา t_2-ε จะได้

$$K^{**} = 100 - 0.80 = 99.20 \text{ บาท}$$

$$T^{**} = 7/12 = 0.583$$

$$d_1 = \frac{\ln(980436/99.20) + [0.05 + (0.2)(0.2)(0.5)]0.583}{0.2\sqrt{0.583}}$$

$$d_1 = 0.2167$$

$$N(d_1) = 0.5858$$

$$d_2 = 0.2167 - 0.2\sqrt{0.583} = 0.0640$$

$$N(d_2) = 0.5255$$

$$C_2 = 98.436(0.5858) - (99.20)e^{-(0.05)(0.583)}(0.5255)$$

$$C_2 = 7.03 \text{ บาท}$$

<u>กรณีที่ 3</u> : มีการใช้สิทธิ Call Options ณ วันสิ้นสิทธิ

กรณีที่ 3 หาได้โดยใช้แบบจำลอง Black-Scholes หามูลค่า European Call Options ชนิดที่หุ้นมีเงินปันผลจ่ายที่ทราบค่าแน่นอน ซึ่งได้หาค่าไว้แล้วดัง ตัวอย่างที่ 4.2 โดยมีค่า Call Options ณ วันสิ้นสิทธิ (C_m) เท่ากับ 9.48 บาท

ดังนั้นมูลค่า American Call Options โดยใช้แบบจำลอง Pseudo-American Call มีค่า

$$C = \text{Max}(5.36\ ,\ 7.03\ ,\ 9.48\ )$$

$$C = 9.48 \text{ บาท}$$

จากวิธีการประเมินค่า American Call Options โดยใช้แบบจำลอง Pseudo-American Call แสดงให้เห็นว่า American Call Options ประกอบด้วยกลุ่มของสินทรัพย์ (Portfolio) ที่เป็นตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน ซึ่งมีวันสิ้นสิทธิต่างๆ กัน วันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิเป็นไปได้ 2 ลักษณะคือช่วงเวลาก่อนวันสิ้นสิทธิของเงินปันผลในแต่ละครั้ง และวันสิ้นสิทธิที่แท้จริงในตราสารสิทธิ (Actual Exercise Date) ดังนั้นจึงต้องมีการหามูลค่าตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน ในแต่ละช่วงเวลา โดยที่มูลค่า American Call Options จะมีค่าเท่ากับค่าสูงสุดของตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน ทั้งหมดใน Portfolio

ข.2 <u>แบบจำลอง Roll-Geske-Whaley Compound Options</u>

บทความของ Roll (1977)[17] เป็นบทความแรกที่ได้อธิบายถึงวิธีการประเมินค่า American Call Options ชนิดที่หุ้นมีเงินปันผลจ่ายที่ทราบค่า ว่ามีค่าเทียบเท่ากับการประเมินค่าตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน ที่มีวันหมดอายุของตราสารสิทธิตรงกับวันสิ้นสิทธิในเงินปันผล (Ex-Dividend Date) ซึ่งก็สอดคล้องกับบทความของ Geske (1979b)[18] และ Whaley (1981)[19] จึงเรียกวิธีการประเมินนี้ว่า แบบจำลอง Roll-Geske-Whaley Compound Options

---

[17] Roll, R., "An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 5 (1977) : 251-258.

[18] Geske, R., "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, 7 (1979) : 63-81.

[19] Whaley, R. E.,"On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 9 (1981) : 207-211.

แบบจำลอง Roll-Geske-Whaley Compound Options เป็นแบบจำลองที่นิยมใช้ในการประมาณหาค่า American Call Options ในทางปฏิบัติ เพราะให้ค่าใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากกว่าแบบจำลอง Pseudo-American Calls ซึ่งอาจถือได้ว่าเป็นแบบจำลองในการหามูลค่า American Call Options ที่แท้จริง (Exact American Call Options Pricing) แต่แบบจำลองนี้มีข้อจำกัดตรงที่ว่าการจ่ายเงินปันผลของหุ้นสามัญจะมีได้เพียงครั้งเดียวก่อนวันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิ รายละเอียดของแบบจำลองสรุปได้ดังนี้

$$\begin{aligned} C &= (S-De^{-rt})N(b_1)+(S-De^{-rt})M(a_1,-b_1;-\sqrt{\frac{t}{\tau}}) \\ &\quad -Ke^{-rt}M(a_2,-b_2;-\sqrt{\frac{t}{\tau}})-(K-D)e^{-rt}N(b_2) \end{aligned} \qquad (4.24)$$

โดยที่

$$a_1 = \frac{\ln[(S-De^{-rt})/K]+(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$a_2 = a_1-\sigma\sqrt{\tau}$$

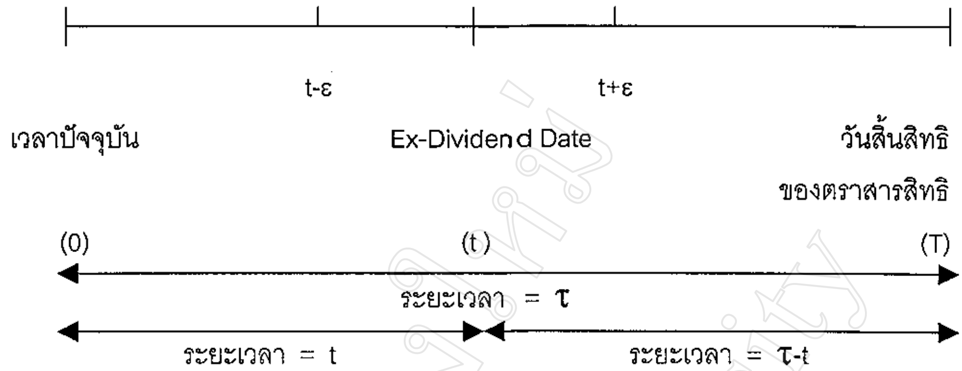
$$b_1 = \frac{\ln[(S-De^{-rt})/S_{t+\varepsilon}]+(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$b_2 = b_1-\sigma\sqrt{t}$$

N(x) คือ ค่าสะสมของการแจกแจงแบบปกติ (Cumulative Normal Distribution)

M (a,b;p) คือ ค่าสะสมของการแจกแจงแบบปกติ สองตัวแปร (Cumulative Bivariate Normal Distribution)[20] โดยมีค่าขอบเขตของปฏิยานุพันธ์ (Integral) อยู่ในช่วง a ถึง b และมีค่าสัมประสิทธิสหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient) เป็น ρ

[20] รายละเอียดของค่าสะสมของการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปร (Cumulative Bivariate Normal Distribution) พิจารณาเพิ่มเติมที่ภาคผนวก ข.



$S_{t+\varepsilon}$ คือ ราคาวิกฤติของราคาหุ้นหลังวันหมดสิทธิในเงินปันผล (Ex-Dividend Date) ที่จะทำให้มีการใช้สิทธิตราสารสิทธิก่อนถึงวันหมดอายุ พิจารณารายละเอียดเพิ่มเติม ดังนี้

หากให้ t-ε เป็นวันก่อนถึงวันหมดสิทธิในเงินปันผล (โดยที่ค่า ε มีค่าคงที่และมีค่าเพียงเล็กน้อย) ณ เวลา t-ε นี้ ราคาหุ้น ($S_{t-\varepsilon}$) ยังเป็นราคาที่ยังรวมจำนวนเงินปันผลด้วย และเป็นราคาขั้นต่ำที่จะทำให้เกิดการใช้สิทธิของตราสารสิทธิ สำหรับ t+ε คือวันหลังจากวันหมดสิทธิในเงินปันผล ซึ่งราคาหุ้น ($S_{t+\varepsilon}$) จะมีค่าลดลงจากวัน t-ε อยู่เท่ากับจำนวนเงินปันผลที่ได้จ่ายไป ดังนั้น

$$S_{t+\varepsilon} = S_{t-\varepsilon} - D$$
$$S_{t-\varepsilon} = S_{t+\varepsilon} + D$$

ตราสารสิทธิแบบอเมริกัน มีข้อดีตรงที่สามารถใช้สิทธิก่อนถึงวันหมดอายุของตราสารสิทธิได้ แต่การใช้สิทธิจะสมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อเป็นการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิในเงินปันผล และจากแบบจำลองนี้ได้พบข้อจำกัดเพิ่มเติมอีกประการหนึ่งว่า

$$D > K(1-e^{-r(\tau-t)}) \tag{4.25}$$

หมายความว่าการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุตราสารสิทธิได้นั้น จำนวนเงินปันผลจ่ายต้องมีค่ามากกว่า ความแตกต่างของราคาใช้สิทธิในวันหมดอายุตราสารสิทธิกับราคาใช้สิทธิ ณ วันที่มีการใช้สิทธิ ดังนั้นถ้าค่าตามสมการที่ (4.25) เป็นจริง ก็จะมีการใช้สิทธิในวัน t-ε ซึ่งมูลค่าของตราสารสิทธิจะมีค่าเท่ากับราคาหุ้น ณ วันที่มีการใช้สิทธิ ($S_{t-\varepsilon}$) หักออกด้วยราคาใช้สิทธิ (K) ดังแสดงตามสมการที่ (4.26)

$$C = S_{t-\varepsilon} - K$$
$$C = S_{t+\varepsilon} + D - K \tag{4.26}$$

แต่เนื่องจากว่าการคำนวณหาค่า American Call Options ชนิดที่หุ้นมีเงินปันผลจ่าย และมีการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุตราสารสิทธิ ก็เปรียบเสมือนเป็นการหามูลค่าตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน ที่มีราคาหุ้นเท่ากับ $S_{t+\varepsilon}$ และมีระยะเวลาจนถึงวันสิ้นสิทธิเท่ากับ τ-t ดังนั้น

$$C(S_{t+\varepsilon}, K, \tau - t) \quad = \quad S_{t+\varepsilon} + D - K \tag{4.27}$$

สำหรับราคาใช้สิทธิ (K) และระยะเวลาจากวันที่มีการใช้สิทธิจนถึงวันหมดอายุตราสารสิทธิ (τ-t) สามารถทราบค่าได้ แต่ราคาหุ้นหลังจากวันหมดสิทธิในเงินปันผล ($S_{t+\varepsilon}$) ที่จะทำให้เกิดการใช้สิทธิของตราสารสิทธินั้นไม่ทราบค่า ต้องใช้การประมาณค่าถูกผิดทางตัวเลข (trial-error) โดยค่า $S_{t+\varepsilon}$ นั้นจะต้องทำให้สมการที่ (4.27) เป็นจริง ซึ่งค่า $S_{t+\varepsilon}$ จะมีได้เพียง 1 ค่าเท่านั้น จึงเรียก $S_{t+\varepsilon}$ ว่าเป็นราคาวิกฤติของราคาหุ้นหลังวันหมดสิทธิในเงินปันผล

กรณีที่สมการ (4.25) ไม่เป็นจริง กล่าวคือ $D \leq K(1-e^{-r(\tau-t)})$ ก็จะไม่มีการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุตราสารสิทธิ การคำนวณหาค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ในกรณีนี้จึงทำได้โดยใช้แบบจำลอง Black-Scholes ที่ได้ปรับปรุงให้คำนึงถึงผลของเงินปันผลจ่ายที่ทราบค่า

<u>ตัวอย่างที่ 4.5</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ American Call Options ของหุ้นสามัญที่มีอายุ 4 เดือน โดยมีการจ่ายเงินปันผลเท่ากับ 4 บาทในอีก 3 เดือนข้างหน้า ถ้าราคาหุ้นปัจจุบันเท่ากับ 80 บาทและมีราคาใช้สิทธิเท่ากับ 82 บาท กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับร้อยละ 6 ต่อปี และความผวนของราคาหุ้นมีค่าเท่ากับร้อยละ 30 ต่อปี

จากตัวอย่างที่ 4.5 กำหนดให้ S=80 บาท, K=82 บาท, τ=4/12=0.3333 ปี, t=3/12= 0.25 ปี จะได้ τ-t=1/2=0.0833 ปี, r=6%, σ=30% และ D = 4 บาท

พิจารณาตามสมการที่ (4.25) เพื่อตรวจสอบว่า American Call Options จะมีการใช้สิทธิก่อนถึงวันหมดอายุตราสารสิทธิหรือไม่

$$\begin{aligned} K(1-e^{-r(\tau - t)}) &= 82\,(1 - e^{-0.06\,(0.0833)}) \\ &= 0.4088 \text{ บาท} \end{aligned}$$

เนื่องจาก D มีค่าเท่ากับ 4 บาท ดังนั้น $D>K(1-e^{-r(\tau-t)})$ แสดงว่า มีการใช้สิทธิ American Call Options ก่อนวันหมดอายุตราสารสิทธิ การคำนวณหาค่าตราสารสิทธินี้ทำได้โดยใช้สมการที่ (4.24) ซึ่งต้องหาค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ตามสมการที่ (4.24) ก่อน ดังนี้

$$a_1 = \frac{\ln[(80-4e^{-(0.06)(0.25)})/82]+(0.06+0.3^2/2)0.3333}{0.3\sqrt{0.3333}}$$

$$a_1 = -0.2321$$

$$a_2 = -0.2321-0.3\sqrt{0.3333} \quad = \quad -0.4053$$

การหาค่า $S_{t+\varepsilon}$ โดยวิธีทางตัวเลข (Numerical Search Algorithm) จะไม่ขอกล่าวถึง แต่จะใช้การทดลองแทนค่าถูกผิด (Trial and Error) ของ $S_{t+\varepsilon}$ เพื่อให้สมการทั้ง 2 ข้าง ตามสมการที่ (4.27) เป็นจริง ซึ่งจะพบว่า $S_{t+\varepsilon}$ มีค่าเท่ากับ 80.1173 นำไปแทนค่าเพื่อหาพารามิเตอร์ b_1 ดังนี้

$$b_1 = \frac{\ln[(80-4e^{-(0.06)(0.25)})/80.1173]+(0.06+0.3^2/2)(0.25)}{0.3\sqrt{0.25}}$$

$$b_1 = -0.1715$$

$$b_2 = -0.1715-0.3\sqrt{0.25} \;=\; -0.3215$$

$$M\left(a_1,-b_1;-\sqrt{\frac{t}{\tau}}\right) = M\left(-0.2321, 0.1715;-\sqrt{\frac{0.25}{0.3333}}\right)$$

$$= 0.0703$$

$$M\left(a_2,-b_2;-\sqrt{\frac{t}{\tau}}\right) = M\left(-0.4053,+0.3215,-\sqrt{\frac{0.25}{0.3333}}\right)$$

$$= 0.0632$$

$$N(b_1) = N(-0.1715) = 0.4319$$

$$N(b_2) = N(-0.3215) = 0.3739$$

มูลค่า American Call Options หาได้ตามสมการที่ (4.24) จะได้

$$C = (80-4e^{-(0.06)(0.25)})(0.4319) + (80-4e^{-(0.06)(0.25)})(0.0703)$$

$$-82e^{-(0.06)(0.3333)}(0.0632) - ((82-4)e^{-(0.06)(0.25)})(0.3739)$$

$$C = 4.39 \text{ บาท}$$

การคำนวณหาค่า American Call Options โดยใช้แบบจำลอง Roll-Geske-Whaley Compound Options ตามตัวอย่างนี้มีมูลค่าเท่ากับ 4.39 บาท ซึ่งจะพบว่าแบบจำลองนี้มีการคำนวณที่ซับซ้อนมาก ไม่สะดวกในการใช้มือคำนวณ จึงจำเป็นต้องใช้โปรแกรมการหามูลค่าตราสารสิทธิมาช่วย ดังจะได้กล่าวต่อไปในภายหลัง

เป็นที่น่าสังเกตว่าแบบจำลอง Roll-Geske-Whaley Compound Model ใช้สำหรับหามูลค่า American Call Options ที่มีการจ่ายเงินปันผลเพียง 1 ครั้ง ก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิ หากหุ้นใดมีการประกาศจ่ายเงินปันผลมากกว่า 1 ครั้ง การใช้สิทธิของ American Call Options จะสมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อเป็นการใช้สิทธิก่อนวันหมดสิทธิเงินปันผลครั้งสุดท้าย ดังนั้นเราสามารถใช้แบบจำลองนี้ประยุกต์ในการคำนวณหาค่า American Call Options ได้ โดยเปลี่ยนราคาหุ้น (S) เป็นราคาหุ้นที่หักด้วยมูลค่าปัจจุบันของเงินปันผลแต่ละครั้ง โดยไม่นับเงินปันผลครั้งสุดท้าย สำหรับเงินปันผล (D) หมายถึง เงินปันผลที่จ่ายในครั้งสุดท้ายก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิ และค่า t หมายถึงระยะเวลาจากเงินปันผลครั้งสุดท้ายจนถึงวันหมดอายุของตราสารสิทธิ ส่วนตัวแปร อีก 3 ตัว คือ ราคาใช้สิทธิ (K), ความผันผวนของราคาหุ้น (σ) และอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง (r) ยังมีค่าคงเดิม แทนค่าตัวแปรต่างๆ เหล่านี้ลงในสมการที่ (4.24) ก็จะสามารถหาค่า American Call Options ชนิดที่มีการจ่ายเงินปันผลมากกว่า 1 ครั้งได้

ค. <u>การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ชนิด Put (American Put Options) ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล</u>

เป็นเพราะว่า American Put Options นั้นสามารถใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุได้ตลอดเวลา จึงเป็นเรื่องยากในการประเมินมูลค่า ซึ่งในทางปฏิบัติแล้วจึงจำเป็นต้องใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณ อย่างไรก็ตามในที่นี้จะอธิบายวิธีการประเมินมูลค่าพอสังเขป เพื่อที่จะได้ทำความเข้าใจขั้นตอนการหามูลค่า American Put Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ซึ่งจะใช้แบบจำลองการประมาณค่าของ Johnson (1983)[21] ในการหามูลค่าตราสารสิทธิ โดยสรุปได้ดังนี้

1. หากราคาหุ้น (S) ณ วันที่มีการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิ มีราคาต่ำกว่าหรือเท่ากับราคาวิกฤติของหุ้น (S*) แล้ว ผู้ถือ American Put Options ก็จะมีการใช้สิทธิ ซึ่งมูลค่า

---

[21] Johnson H. E., "An Analytic Approximation for the American Put Price", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, 1 (1983) : 141-148.

ตราสารสิทธิจะมีค่าเท่ากับราคาใช้สิทธิหักด้วยราคาหุ้น ณ เวลาที่มีการใช้สิทธิ (K-S) สำหรับราคาวิกฤติของหุ้น (S*) ที่จะทำให้มีการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิ หาได้จาก

$$S^* = K\left[\frac{2r/\sigma^2}{1+2r/\sigma^2}\right]^m \tag{4.28}$$

$$\text{โดย } m = \frac{\sigma^2\tau}{(1.04083)\sigma^2\tau + 0.00963}$$

2. หากราคาหุ้น (S) ณ วันที่มีการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิ มีราคาสูงกว่าราคาวิกฤติของหุ้น (S*) แล้ว มูลค่า American Put Options หาได้จาก

$$P(K) = \alpha p\left(Ke^{r\tau}\right) + (1-\alpha)p(K)$$

$$\text{โดยที่} \quad \alpha = \left[\frac{r\tau}{3.9649r\tau + 0.032325}\right]^{\lambda}, 0 \le \alpha \le 1$$

$$\lambda = \frac{\ln(S/S^*)}{\ln(K/S^*)}$$

P (K) หมายถึง American Put Options ที่ต้องการทราบค่า

p (K) หมายถึง European Put Options ที่ใช้แบบจำลอง Black-Scholes ในการหามูลค่า

จากรายละเอียดทั้ง 2 ข้อ สามารถสรุปมูลค่า American Put Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ตามสมการที่ (4.29)

$$P(K) = \begin{cases} K - S & \text{เมื่อ } S \le S^* \\ \alpha p\left(Ke^{r\tau}\right) + (1-\alpha)p(K) & \text{เมื่อ } S > S^* \end{cases} \tag{4.29}$$

จากแบบจำลองการประมาณค่า Johnson พบว่าโอกาสที่จะมีการใช้สิทธิของ American Put Options ก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิ (เมื่อ S ≤ S*) มีความเป็นไปได้น้อย เนื่องจากราคาวิกฤติของหุ้น (S*) มีค่าต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ (K) มากพอสมควร จึงเป็นไปได้ลำบากที่ราคาหุ้นจะมีการเคลื่อนไหวอยู่ในระดับที่ต่ำกว่าราคาวิกฤตของหุ้น และแบบจำลองนี้มีข้อจำกัดที่สำคัญคือ ผลคูณของอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงกับอายุตราสารสิทธิ ต้องมีค่าไม่เกิน 0.125

($r\tau \leq 0.125$) โดยปกติตราสารสิทธิจะมีอายุไม่เกิน 9 เดือน (0.75 ปี) เพื่อที่จะหาค่า American Put Options ได้อย่างถูกต้อง อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงจะต้องมีค่าต่ำกว่า 16.67%

ตัวอย่างที่ 4.6 ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ American Put Options ของหุ้นสามัญที่มีอายุ 3 เดือน ราคาหุ้น ณ ปัจจุบันมีค่า 18 บาท หากตราสารสิทธินี้มีราคาใช้สิทธิเท่ากับ 20 บาท กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับร้อยละ 10 ต่อปี และความผันผวนของราคาหุ้นมีค่าเท่ากับร้อยละ 40 ต่อปี

จากตัวอย่างที่ 4.6 กำหนดให้ S = 18บาท, K = 20บาท, τ = 0.25 ปี, r= 10%, σ = 40%

เนื่องจาก ค่า $r\tau$ = 0.025 ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 0.125 ดังนั้นจึงสามารถใช้แบบจำลองการประมาณค่าของ Johnson เพื่อหาค่า American Put Options ของตัวอย่างนี้ได้ โดยเริ่มต้นจากการหาราคาวิกฤติของหุ้น (S*) ที่จะทำให้มีการใช้สิทธิก่อนถึงวันหมดอายุของตราสารสิทธิ ดังนี้

$$S^* = 20\left[\frac{(2)(0.1)/(0.4)^2}{1+(2)(0.1)/(0.4)^2}\right]^m$$

$$m = \frac{(0.4)^2(0.25)}{(1.04083)(0.4)^2(0.25)+0.00963}$$

$$m = 0.7803$$

แทนค่า m ใน S* จะได้

$$S^* = 12.64 \text{ บาท}$$

เพราะราคาหุ้น ณ ปัจจุบัน (S) มีค่าเท่ากับ 18 บาท จึงมีค่ามากกว่าราคาวิกฤติของหุ้น (S*) ที่มีค่าเท่ากับ 12.64 บาท ดังนั้นมูลค่า American Put Options [P (K)] จะหาได้ตามสมการที่ (3-29) ในกรณีที่ S > S* กล่าวคือ

$$P(K) = \alpha p\left(Ke^{r\tau}\right)+(1-\alpha)p(K)$$

ก่อนอื่นต้องหาค่า λ ก่อน

$$\lambda = \frac{\ln(18/12.64)}{\ln(20/12.64)}$$
$$= 0.7704$$

เมื่อทราบ λ จะสามารถหาค่าของ α ได้ ดังนี้

$$\alpha = \left[\frac{(0.1)(0.25)}{(3.9649)(0.1)(0.25)+0.032325}\right]^{0.7704}$$
$$\alpha = 0.2784$$
$$1-\alpha = 0.7216$$

พจน์ $p(Ke^{r\tau})$ หมายถึง มูลค่า European Put Options ที่มีค่า $K^* = Ke^{r\tau} = 20.5063$ บาท, S = 18 บาท, $\tau = 0.25$ ปี ,r = 10% และ $\sigma = 40\%$ ซึ่งจะได้ $p(Ke^{r\tau})$ เท่ากับ 2.7178 บาท

เช่นเดียวกัน พจน์ p(K) หมายถึง มูลค่า European Put Options ที่มีค่า $K^* = K = 20$ บาท, S = 18 บาท, $\tau = 0.25$ ปี, r = 10% และ $\sigma = 40\%$ ซึ่งจะได้ p(K) เท่ากับ 2.3654 บาท

ดังนั้น American Put Options มีค่า

$$P(K) = (0.2784)(2.7178) + (0.7216)(2.3654)$$
$$= 2.46 \text{ บาท}$$

จากตัวอย่างที่ 4.6 จะได้มูลค่า American Put Options เท่ากับ 2.46 บาท

ง. <u>การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ชนิด Put (American Put Options) ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล</u>

โดยปกติแล้ว American Put Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล สามารถใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิได้ตลอดเวลา โดยเฉพาะช่วงหลังวันหมดสิทธิในเงินปันผลเล็กน้อย แต่ก็ไม่เสมอไปอาจเกิดขึ้นก่อนหน้าหรือหลังเวลาที่ระบุดังกล่าวได้ Barone, Adesi และ Whaley (1987)[22] ได้ร่วมกันศึกษาวิธีการประมาณค่าตราสารสิทธิทั้งแบบ American Call และ American Put อันเป็นที่มาของแบบจำลอง Barone-Adesi and Whaley Approximation แบบจำลองนี้เป็นที่นิยมและใช้กันในทางปฏิบัติสำหรับการหาค่าของตราสารสิทธิแบบอเมริกัน เพราะสามารถหามูลค่าตราสารสิทธิได้ทั้งแบบ American Call และ American Put ทั้งชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล

---

[22] Barone-Adesi, G., and R. E. Whaley, "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *Journal of Finance*, 42, 2 (1987) : 301-320.

และชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผลก็สามารถหาค่าได้ แต่เนื่องจากขั้นตอนการหาค่าจะต้องใช้การทดลองแทนค่าถูกผิด (Trial and Error) เพื่อหาค่าตัวแปรต่างๆ ของแบบจำลอง ทำให้มีความยุ่งยากมาก จึงจำเป็นต้องใช้คอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณ ในที่นี้จะอธิบายเฉพาะหลักการหาค่า American Put Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล ซึ่งการจ่ายเงินปันผลจะมีลักษณะเป็นแบบต่อเนื่อง (Continuous Dividend) โดยมีรายละเอียดดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> : หากราคาหุ้น (S) ณ วันที่มีการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิ มีราคาต่ำกว่าหรือเท่ากับราคาวิกฤติของหุ้น (S**) แล้ว ผู้ถือหุ้น American Put Options ก็จะมีการใช้สิทธิ ซึ่งมูลค่าตราสารสิทธิจะมีค่าเท่ากับราคาใช้สิทธิหักด้วยราคาหุ้น ณ เวลาที่มีการใช้สิทธิ(K-S) สำหรับราคาวิกฤติของหุ้น (S**) ที่จะทำให้มีการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิ หาได้จากความสัมพันธ์ตามสมการที่ (4.30)

$$K - S^{**} = p(S^{**}, K, \tau) - \{1 - e^{-q\tau} N[-d_1(S^{**})]\}(S^{**}/q_1) \qquad (4.30)$$

$p(S^{**},K,\tau)$ หมายถึง มูลค่า European Put Options โดยแทนราคาหุ้นด้วยราคาวิกฤติของหุ้น (S**) สำหรับตัวแปรอื่นๆ มีค่าคงเดิม

q หมายถึง อัตราผลตอบแทนต่อปีของหุ้นที่มีเงินปันผลจ่ายแบบต่อเนื่อง

$N[-d_1 (S^{**})]$ ต้องแทนราคาหุ้น (S) ด้วยราคาวิกฤติของหุ้น (S**) เพื่อหาค่า $N(-d_1)$

$$q_1 = \frac{-(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + 4M/K}}{2}$$

$$N = \frac{2(r-q)}{\sigma^2} \quad , \quad M = \frac{2r}{\sigma^2}$$

$$K = 1 - e^{-r\tau}$$

จะสังเกตได้ว่าการหาค่าราคาวิกฤติของหุ้น (S**) ตามสมการที่ (4.30) ต้องใช้การทดลองแทนค่าตัวเลขลงไปจนกว่าสมการทั้งสองข้างจะเป็นจริง ดังนั้นการหาค่าราคาวิกฤติของหุ้นจึงทำได้ยากมากหากปราศจากการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณ

<u>กรณีที่ 2</u> : หากราคาหุ้น (S) ณ วันที่มีการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุตราสารสิทธิ มีราคาสูงกว่าราคาวิกฤติของหุ้น (S**) แล้ว มูลค่า American Put Options จะหาได้ตามสมการที่ (4.31)

$$P(S,K,\tau) = p(S,K,\tau) + A_1\left(\frac{S}{S^{**}}\right)^{q_1} \tag{4.31}$$

$$A_1 = \frac{-S^{**}\left\{1 - e^{-q\tau}N[-d_1(S^{**})]\right\}}{q_1}$$

พจน์ P(S,K,τ) ในสมการที่ (4.31) คือมูลค่า American Put Options โดยมีค่าเท่ากับมูลค่า European Put Options [พจน์ p(S,K,τ)] บวกกับค่าธรรมเนียมที่สามารถใช้สิทธิก่อนครบอายุตราสารสิทธิ (Early Exercise Premium) ซึ่งก็คือพจน์ $A_1(S/S^{**})^{q1}$ นั่นเอง ดังนั้นมูลค่า American Put Options จะมีค่ามากกว่า European Put Options เสมอ

จากการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิทั้ง 2 กรณี ดังกล่าว สามารถสรุปมูลค่า American Put Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล ตามสมการที่ (4.32)

$$P(S,K,\tau) = \begin{cases} K - S & \text{เมื่อ } S \le S^{**} \\ p(S,K,\tau) + A_1\left(\dfrac{S}{S^{**}}\right)^{q_1} & \text{เมื่อ } S > S^{**} \end{cases} \tag{4.32}$$

สำหรับในที่นี้จะไม่แสดงการยกตัวอย่างโดยการแทนค่าลงในแบบจำลองการประมาณค่าของ Barone-Adesi and Whaley เพื่อหาค่าของ American Put Options เนื่องจากการหาราคาวิกฤติของหุ้น (S**) จำเป็นต้องใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณ ซึ่งจะแสดงรายละเอียดการหาค่า American Put Options โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปในภายหลัง

4.1.3 การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ (Currency Options)

วิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศนั้น มีลักษณะคล้ายคลึงกับการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากราคาหุ้นสามัญ เพียงแต่เปลี่ยนสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้จากราคาหุ้นสามัญเป็นอัตราแลกเปลี่ยนทันที (Spot Exchange Rate) อย่างไรก็ตามการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิจากอัตราแลกเปลี่ยน ก็มีข้อแตกต่างไปจากการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิของราคาหุ้นสามัญในส่วนของอัตราดอกเบี้ย เนื่องจากอัตราดอกเบี้ยที่จะใช้ในการหามูลค่าตราสารสิทธิในอัตราแลกเปลี่ยนนั้น จะประกอบไปด้วยอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงในประเทศ (Domestic Risk Free Rate ; r) และอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงในต่างประเทศ (Foreign Risk Free Rate; r_f) ในที่นี้จะสรุปการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ เป็น 2 รูปแบบ คือ ตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน และตราสารสิทธิแบบอเมริกัน โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียน

Garman และ Kohlhagen (1983)[23] เป็นผู้นำแบบจำลอง Black-Scholes มาดัดแปลง เพื่อให้สามารถหามูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนในวันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิ ซึ่งก็คือลักษณะของตราสารสิทธิเป็นแบบยูโรเปียน นั่นเอง แบบจำลองนี้เป็นที่รู้จักกันในชื่อแบบจำลอง Garman-Kohlhagen ซึ่งสามารถสรุปการหามูลค่า Call Options และ Put Options ได้ตามสมการที่ (4.33) และ (4.34) ตามลำดับ

$$C = Se^{-r_f\tau}N\left(d_1\right) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \tag{4.33}$$

โดย
$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r - r_f + \sigma^2/2\right)\tau}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

---

[23] Garman, M. B., and S. W. Kohlhagen, "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Money and Finance*, 2 (1983) : 231-237.

S หมายถึง มูลค่าปัจจุบันของอัตราแลกเปลี่ยนในประเทศ ต่อ 1 หน่วย ของอัตราแลกเปลี่ยนต่างประเทศ (Spot Price of FX) ดังนั้นพจน์ $Se^{-r_f\tau}$ จึงหมายถึงมูลค่าปัจจุบันของอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศที่ใช้อัตราลด (Discount Rate) เท่ากับอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงในต่างประเทศ

หากต้องการหาค่ามูลค่า Put Options ก็สามารถใช้ความสัมพันธ์ของค่าเสมอภาคระหว่าง Put กับ Call ของอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ ตามสมการที่ (4.34)

$$P = C - Se^{-r_f\tau} + Ke^{-r\tau} \tag{4.34}$$

ดังนั้น มูลค่าตราสารสิทธิ แบบ Put จะมีค่าตามสมการที่ (4.35)

$$P = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - Se^{-r_f\tau}N(-d_1) \qquad (4\text{-}35)$$

จะสังเกตได้ว่าแบบจำลอง Garman-Kohlhagen มีลักษณะคล้ายคลึงกับแบบจำลอง Merton ที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้แล้ว เพียงแต่เปลี่ยนอัตราผลตอบแทนในเงินปันผลแบบต่อเนื่อง (q) แทนด้วยอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงในต่างประเทศ (r_f)

<u>ตัวอย่างที่ 4.7</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ตราสารสิทธิ ที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบยูโรเปียน ที่มีอายุ 6 เดือน ซึ่งหนึ่งสัญญามีมูลค่าเท่ากับ 31,250 ดอลลาร์สหรัฐ โดยมีอัตราแลกเปลี่ยนของสกุลเงิน THB/USD ณ ปัจจุบัน เท่ากับ 37.00 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ ราคาใช้สิทธิของอัตราแลกเปลี่ยน THB/USD เท่ากับ 37.50 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงภายในประเทศ(ไทย) เท่ากับ 8% ต่อปี อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงในสหรัฐอเมริกา เท่ากับ 5% ต่อปี และความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนในสองสกุลเงิน เท่ากับ 30% ต่อปี

จากตัวอย่างที่ 4.7 กำหนดให้ S = 37.00 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ, K = 37.50 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ, τ = 0.5 ปี, r = 8%, r_f = 5% และ σ 30% แทนค่าลงในสมการ (3.33) เพื่อหาค่าตราสารสิทธิชนิดสิทธิในการซื้อ (Call) ดังนี้

$$\text{จาก } C = Se^{-r_f\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

$$\text{โดยที่ } d_1 = \frac{\ln(37.00/37.50) + (0.08 - 0.05 + 0.3^2/2)(0.5)}{0.3\sqrt{0.5}}$$

$$= 0.1135$$

$$d_2 = 0.1135 - 0.3\sqrt{0.5} = -0.0986$$

$$\text{จะได้ } N(d_1) = 0.5452 \quad , N(d_2) = 0.4607$$

$$\text{ดังนั้น } C = (37.00)e^{-(0.05)(0.5)}(0.5452) - (37.50)e^{-(0.08)(0.5)}(0.4607)$$

$$= 3.08 \text{ บาท/ดอลลาร์สหรัฐ}$$

ตามตัวอย่างที่ 4.7 มูลค่า Call Options มีค่าเท่ากับ 3.08 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ เนื่องจากหนึ่งสัญญามีมูลค่าเท่ากับ 31,250 ดอลลาร์สหรัฐ ดังนั้นผู้ซื้อ Call Options จะต้องจ่ายค่าธรรมเนียมเท่ากับ 96,250 บาท

สำหรับมูลค่า Put Options สามารถหาได้จากค่าเสมอภาคระหว่าง Put และ Call ดังนี้

$$P = 3.08 - (37.00)^{-(0.05)(0.5)} + (37.50)\,e^{-(0.08)(0.5)}$$

$$P = 3.02 \text{ บาท/ดอลลาร์สหรัฐ}$$

ดังนั้นมูลค่า Put Options มีค่าเท่ากับ 3.02 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ ทำให้ผู้ซื้อ Put Options จะต้องจ่ายค่าธรรมเนียมเท่ากับ 94,375 บาท ต่อหนึ่งสัญญา

2. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบอเมริกัน

วิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนของเงินตราต่างประเทศแบบอเมริกันนั้น จะนิยมใช้แบบจำลองการประมาณค่าของ Barone-Adesi-Whaley (BAW) เนื่องจากสามารถหาค่าได้ใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุด และยังสามารถใช้หาตราสารสิทธิได้ทั้งชนิด Call และชนิด Put ในที่นี้จะสรุปรายละเอียดแบบจำลองการประมาณค่าของ Barone-Adesi-Whaley เพื่อใช้สำหรับการหามูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ

ก. <u>กรณีตราสารสิทธิ ชนิด Call</u>

$$C(S,K,\tau) = \begin{cases} S-K & \text{เมื่อ } S \geq S^* \\ c(S,K,\tau)+A_2\left(\dfrac{S}{S^*}\right)^{q_2} & \text{เมื่อ } S < S^* \end{cases} \quad (4.36)$$

$C(S,K,\tau)$ หมายถึง มูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยน ชนิด American Call ที่ต้องการทราบค่า

$c(S,K,\tau)$ หมายถึง มูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิ-งจากอัตราแลกเปลี่ยน ชนิด European Call ที่สามารถหาค่าได้โดยใช้แบบจำลอง Garman–Kohlhagen

โดยที่

$$A_2 = \frac{S^*}{q_2}\left\{1-e^{-r_f\tau}N[d_1(S^*)]\right\}$$

$$d_1(S^*) = \frac{\ln(S^*/K)+(r-r_f+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$q_2 = -(N-1)+\sqrt{(N-1)^2+4M/K}$$

$$M = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad N = \frac{2(r-r_f)}{\sigma^2}, \quad K = 1-e^{-r\tau}$$

สำหรับค่าวิกฤติของอัตราแลกเปลี่ยนที่ใช้ในการหามูลค่าตราสารสิทธิ ชนิด Call (S*) หาได้จาก

$$S^*-K = C(S^*,K,\tau)+\left\{1-e^{-r_f\tau}N[d_1(s^*)]\right\}\frac{S^*}{q_2} \quad (4.37)$$

- กรณีตราสารสิทธิชนิด Put

$$P(S,K,\tau) = \begin{cases} K-S & \text{เมื่อ } S \leq S^* \\ p(S,K,\tau)+A_1(S/S^*)^{q_1} & \text{เมื่อ } S > S^* \end{cases} \quad (4.38)$$

p(S,K,τ) หมายถึง มูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยน ชนิดEuropean Put ที่สามารถหาค่าได้โดยใช้ แบบจำลอง Garman-Kohlhagen

โดยที่

$$A_1 = \frac{-S^{**}}{q_1}\left\{1 - e^{-r_f\tau}N[-d_1(S^{**})]\right\}$$

$$q_1 = \frac{-(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + 4M/K}}{2}$$

สำหรับค่าวิกฤติของอัตราแลกเปลี่ยนที่ใช้ในการหามูลค่าตราสารสทธิ ชนิด Put (S**) หาได้จาก

$$K - S^{**} = p(S^{**}, K, T) - \left\{1 - e^{-r_f\tau}N[-d_1(S^{**})]\right\}\frac{S^{**}}{q_1} \qquad (4.39)$$

4.1.4 การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ย (Interest Rate Options)

ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ย จะมีวิธีการประเมินที่แตกต่างไปจากตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากราคาหุ้นสามัญและอัตราแลกเปลี่ยนของเงินตราต่างประเทศ เนื่องจากตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ยจะมีรูปแบบการให้บริการทางการเงินหลายประเภทด้วยกัน เช่น Caps (การกำหนดเพดานของอัตราดอกเบี้ย), Floors (การกำหนดอัตราผลตอบแทนขั้นต่ำ), Swaptions (สิทธิในการที่จะทำข้อตกลง Swap อัตราดอกเบี้ย ภายในระยะเวลาที่กำหนดไว้ในสัญญา Swaptions), European Short-Term Bond Options (ตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตรระยะสั้นแบบยูโรเปียน) เป็นต้น เป็นที่น่าสังเกตรูปแบบต่างๆ ของตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ยที่ได้กล่าวไว้ในข้างต้นมีลักษณะเป็นตราสารสิทธิแบบยูโรเปียนทั้งสิ้น เป็นเพราะว่าการใช้สิทธิของบริการทางการเงินในรูปแบบต่างๆ เหล่านี้ จะมีการใช้สิทธิในวันครบกำหนดเท่านั้น ดังนั้นการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ย จึงขึ้นอยู่กับรูปแบบต่างๆ ของอัตราดอกเบี้ยที่มีวิธีการคำนวณแตกต่างกันไป ในที่นี้จะแบ่งการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิอ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ยออกเป็น 3 ประเภท คือ

1. การประเมินมูลค่าของ Caps และ Floors
2. การประเมินมูลค่าของ Swaptions
3. การประเมินมูลค่าของตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตรระยะสั้น แบบยูโรเปียน (European Short -Term Bond Options)

1. การประเมินมูลค่าของ Caps และ Floors

Caps คือ การกำหนดเพดานสูงสุดของอัตราดอกเบี้ยที่ผู้กู้ยืมจะต้องจ่ายให้แก่สถาบันการเงินที่เป็นผู้ให้กู้ยืม หากอัตราดอกเบี้ยตามตลาด (ไม่รวม Spread) ณ วันครบกำหนดชำระดอกเบี้ยจ่าย มีมูลค่าสูงกว่าอัตราดอกเบี้ยที่กำหนดไว้ (Caps Rate) ผู้กู้ยืมสามารถใช้สิทธิในการเลือกชำระดอกเบี้ยเท่ากับอัตรา Caps โดยสถาบันการเงินที่เป็นผู้จำหน่าย Caps จะต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ยส่วนที่เกินจากอัตรา Caps แทนผู้กู้ยืม แต่ถ้าหากอัตราดอกเบี้ยตามตลาด (ไม่รวม Spread) มีค่าต่ำกว่าอัตราดอกเบี้ยสูงสุดที่ได้ Caps ผู้กู้ยืมสามารถชำระอัตราดอกเบี้ยตามอัตราตลาดได้ โดยปกติแล้วอัตราดอกเบี้ยตามตลาดที่นิยมใช้จะเป็นอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงมากที่สุดสำหรับตราสารประเภทนี้ก็คือ LIBOR (London Inter Bank Offer Rate) หรือ SIBOR (Singapore Inter Bank Offer Rate) ตัวอย่างเช่น ผู้กู้ยืมได้ซื้ออัตรา Caps ของอัตราดอกเบี้ย LIBOR 3 เดือน ที่ 6% เมื่อถึงวันครบกำหนดชำระดอกเบี้ย อัตราดอกเบี้ย LIBOR มีค่าสูงขึ้นเป็น 6.5% ผู้กู้ยืมก็จ่ายชำระดอกเบี้ยที่อัตราดอกเบี้ยเท่ากับ 6% ส่วนที่เหลืออีก 0.5% สถาบันการเงินผู้ออก Caps จะเป็นผู้จ่ายชำระแทน หากอัตราดอกเบี้ย LIBOR มีค่าเท่ากับ 5% ณ วันครบกำหนดจ่ายชำระดอกเบี้ย ผู้กู้ยืมก็สามารถใช้สิทธิจ่ายดอกเบี้ยตามอัตราดอกเบี้ย LIBOR ที่ 5%

ดังนั้น มูลค่า Caps ก็คือค่าธรรมเนียม (Upfront Fee) ที่ผู้กู้ยืมจะต้องจ่ายให้แก่สถาบันการเงินที่เสนอบริการ Caps ทันทีเมื่อเริ่มสัญญา สำหรับมูลค่า Caps สามารถหาได้จากผลรวม (อนุกรม) ของตราสารสิทธิชนิดสิทธิในการซื้อแบบยูโรเปียน (European Call Options) แต่ละสัญญาที่เรียกว่า Caplet โดยกำหนดให้อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (Forward Rate; F) ณ วันครบกำหนดอายุของแต่ละ Caplet (Reset Date) เป็นสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้ และอัตรา Caps เป็นราคาใช้สิทธิ กล่าวคือ

$$\text{มูลค่า Caps} = \sum_{i=1}^{n} \text{Caplet}_i \tag{4.40}$$

โดยที่

$$\text{Caplet} = \frac{\text{จำนวนวงเงินที่ทำสัญญา} \times \text{อายุ Caplet}}{[1 + (F \times \text{อายุ Caplet})]} e^{-r\tau}\left[FN(d_1) - KN(d_2)\right] \tag{4.41}$$

$r = r(0, t_1)$ หมายถึง อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงจากเวลาปัจจุบัน ถึงเวลา t_1 โดยที่ t_1 หมายถึง เวลาครบกำหนดของ Caplet ที่ 1 ในทางปฏิบัติจะหาค่า r ได้จากผลตอบแทนตั๋วเงินคลัง (Treasury Bill)

F = $r(t_1, t_2)$ หมายถึง อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (Forward Rate) ของระยะเวลาจากวันครบกำหนด Caplet 1 ถึงวันครบกำหนด Caplet 2 ซึ่งสามารถหาค่าได้จากสัญญาซื้อขายเงินฝากยูโรดอลลาร์ล่วงหน้า (Eurodollar Future Price)

K = อัตราดอกเบี้ย Caps

σ = ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

τ = วันครบกำหนดอายุของ Caplet

สำหรับ ตัวแปร d_1 และ d_2 หาค่าได้จาก

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + (\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

จะสังเกตได้ว่า พจน์ $e^{-r\tau}[\,FN(d_1) - KN(d_2)\,]$ มีลักษณะคล้ายคลึงกับแบบจำลอง Black-Scholes ซึ่ง Fischer Black ได้ทำการปรับปรุงแบบจำลอง Black-Scholes ให้สามารถคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ยได้ โดยเป็นที่รู้จักกันในชื่อของแบบจำลอง Black-76

Floors คือ การกำหนดอัตราผลตอบแทนขั้นต่ำที่ลูกค้าเงินฝากประเภทอัตราดอกเบี้ยลอยตัวสามารถซื้อบริการ เพื่อใช้ค้ำประกันระดับผลตอบแทนที่ต้องการ หากอัตราดอกเบี้ย LIBOR มีค่าต่ำกว่าอัตรา Floor สถาบันการเงินผู้ออกจำหน่าย Floor จะจ่ายชำระอัตราดอกเบี้ยส่วนที่ขาดจนครบเท่ากับอัตรา Floor ให้แก่ผู้ฝากเงิน แต่ถ้าอัตราดอกเบี้ย LIBOR ในตลาดมีค่าสูงกว่าอัตรา Floor ลูกค้าเงินฝากก็ยังคงสามารถได้สิทธิในการรับอัตราดอกเบี้ยเท่ากับอัตราดอกเบี้ยตามตลาด

ดังนั้น มูลค่า Floor ก็คือค่าธรรมเนียม (Upfront Fee) ที่ลูกค้าเงินฝากจะต้องจ่ายให้แก่สถาบันการเงินผู้จำหน่าย Floor ทันทีเมื่อเริ่มสัญญา สำหรับมูลค่า Floor ก็สามารถหาได้จากผลรวมของตราสารสิทธิในการขายแบบยูโรเปียน (European Put Option) แต่ละสัญญาที่เรียกว่า Flooret โดยให้อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (Forward Rate; F) ณ วันครบกำหนดอายุของแต่ละ Flooret เป็นสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้ และอัตรา Floor เป็นราคาใช้สิทธิ กล่าวคือ

$$\text{มูลค่า Floors} = \sum_{i=1}^{n} \text{Flooret}_i \qquad (4.42)$$

โดยที่

$$\text{Flooret} = \frac{\text{จำนวนวงเงินที่ทำสัญญา} \times \text{อายุ Flooret}}{[1 + (F \times \text{อายุ Flooret})]} e^{-r\tau} \left[KN(-d_2) - FN(-d_1) \right] \qquad (4.43)$$

สำหรับค่าเสมอภาคระหว่าง Put กับ Call ของมูลค่า Caps และ Floors เป็นไปตามความสัมพันธ์ที่ว่า

มูลค่า Caps = มูลค่า Floors + มูล ค่าแลกเปลี่ยน (Swap Price) (4.44)

โดยที่ Caps และ Floors ต้องมีราคาใช้สิทธิที่เท่ากัน (อัตรา Caps = อัตรา Floors) สำหรับการแลกเปลี่ยน (Swap) คือข้อตกลงที่จะรับอัตราดอกเบี้ยลอยตัวและจ่ายอัตราดอกเบี้ยที่คงที่

<u>ตัวอย่างที่ 4.8</u> พิจารณาสินเชื่อที่มีการจ่ายชำระดอกเบี้ยจ่ายทุก 6 เดือน ผู้กู้เงินต้องการซื้อ Caps เพื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยจ่ายที่ 10% โดยมีจำนวนวงเงินทำสัญญาเท่ากับ 1 ล้านบาท ณ วันที่ 31 มีนาคม 42 (วันปัจจุบัน) เป็นระยะเวลา 2 ปี กำหนดความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าเท่ากับ 35% อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงและอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าในวันครบกำหนดอายุแต่ละช่วงเวลาของการชำระดอกเบี้ยจ่าย (Reset Date) เป็นไปตามข้อมูลข้างล่างนี้

วันครบกำหนดชำระดอกเบี้ยจ่าย	30 ก.ย.42	31 มี.ค.43	30 ก.ย.43	31 มี.ค.44
อายุของ Cap (τ)	0.5	1	1.5	2
อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง r(0,t)	6.3%	6.5%	6.6%	6.7%
อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $r(t_1, t_2)$	7.2%	7.7%	8.1%	8.4%

จากตัวอย่างที่ 4.8 จะได้ว่า

$$\text{มูลค่า Caps} = \sum_{i=1}^{4} \text{Caplet}_i$$

ดังนั้น มูลค่า Caps จะหาได้จากผลรวมของตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ย แบบ European Call จำนวน 4 ตราสารด้วยกัน (มี 4 Caplets) ดังนี้

- Caplet ที่ 1 ; F = 7.2%, K = 10%, τ = 0.5 ปี, σ = 35%, r = 6.3%

$$d_1 = \frac{\ln(0.072/0.1) + (0.35^2/2)(0.5)}{(0.35)(\sqrt{0.5})} = -1.2036$$

$$d_2 = -1.2036 - (0.35)(\sqrt{0.5}) = -1.4511$$

จะได้ $N(d_1) = 0.1144$, $N(d_2) = 0.0734$

$$\text{มูลค่า Caplet}_1 = \frac{1{,}000{,}000 \times 0.5}{1 + (0.072)(0.5)} e^{-(0.063)(0.5)} [(0.072)(0.1144) - (0.1)(0.0734)]$$

$$= 419.40 \text{ บาท}$$

- Caplet ที่ 2 ; F = 7.77%, K = 10%, τ = 1.0 ปี, σ = 35%, r = 6.5%

$$d_1 = \frac{\ln(0.077/0.1) + (0.35^2/2)(1.0)}{(0.35)(\sqrt{1.0})} = -0.5718$$

$$d_2 = -0.5718 - (0.35)(\sqrt{1.0}) = -0.9218$$

จะได้ $N(d_1) = 0.2837$, $N(d_2) = 0.1783$

$$\text{มูลค่า Caplet}_2 = \frac{1{,}000{,}000 \times 1.0}{1 + (0.077)(1.0)} e^{-(0.065)(1.0)} [(0.077)(0.2837) - (0.1)(0.1783)]$$

$$= 3{,}493.25 \text{ บาท}$$

- Caplet ที่ 3 ; F = 8.10%, K = 10%, τ = 1.5 ปี, σ = 35%, r = 6.6%

$$d_1 = \frac{\ln(0.081/0.1) + (0.35^2/2)(1.5)}{(0.35)(\sqrt{1.5})} = -0.2773$$

$$d_2 = -0.2773 - (0.35)(\sqrt{1.5}) = -0.7059$$

จะได้ $N(d_1) = 0.3908$, $N(d_2) = 0.2401$

$$\text{มูลค่า Caplet}_3 = \frac{1{,}000{,}000 \times 1.5}{1 + (0.081)(1.5)} e^{-(0.066)(1.5)} [(0.081)(0.3908) - (0.1)(0.2401)]$$

$$= 9{,}261.11 \text{ บาท}$$

- Caplet ที่ 4 ; F = 8.40%, K = 10%, τ = 2.0 ปี, σ = 35%, r = 6.7%

$$d_1 = \frac{\ln(0.084/0.1) + (0.35^2/2)(2.0)}{(0.35)(\sqrt{2.0})} = -0.1048$$

$$d_2 = -0.1048 - (0.35)(\sqrt{2.0}) = -0.5997$$

จะได้ $N(d_1) = 0.4583$, $N(d_2) = 0.2744$

$$\text{มูลค่า Caplet}_4 = \frac{1{,}000{,}000 \times 2.0}{1 + (0.084)(2.0)} e^{-(0.067)(2.0)} [(0.084)(0.4583) - (0.1)(0.2744)]$$

$$= 16{,}559.10 \text{ บาท}$$

ดังนั้น มูลค่า Caps = 419.40 + 3,493.25 + 9,261.11 + 16,559.10 บาท

= 29,732.86 บาท

นั่นก็แสดงว่าหากลูกหนี้ของสถาบันการเงินต้องการลดความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยให้มีค่าไม่เกิน 10% (ไม่รวม Spread) เป็นระยะเวลา 2 ปี ลูกหนี้จะต้องจ่ายค่าธรรมเนียม (Upfront Fee) เพียงครั้งเดียวในวันทำสัญญา ซึ่งมีมูลค่าเท่ากับ 29,732.86 บาท หรือคิดเป็น 2.97% ของจำนวนเงินที่ทำสัญญา Caps

2. การประเมินมูลค่าของ Swaptions

Swaptions หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Swap Options เป็นสิทธิในการที่จะทำข้อตกลง Swap อัตราดอกเบี้ย ณ วันที่กำหนดไว้ ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดไว้ในปัจจุบัน ผู้ซื้อตราสารนี้มีสิทธิ แต่จะใช้สิทธิหรือไม่ก็ได้ ถ้าสินทรัพย์ที่ระบุไว้ซึ่งก็คือ Swap นั้นเป็นผลดีต่อผู้ซื้อ Swaptions ผู้ซื้อก็จะใช้สิทธิ ในทางปฏิบัติมีคนทำ Swaptions อยู่ 2 ประเภท คือ

- Call Swaptions เป็นการให้สิทธิผู้ซื้อที่จะได้รับการชำระเงินแบบอัตราดอกเบี้ยคงที่ และจ่ายเงินตามอัตราดอกเบี้ยลอยตัว เมื่อใช้สิทธิตาม Swaptions จะทำให้ผู้ซื้อได้ผลประโยชน์ต่อเมื่ออัตราดอกเบี้ยลอยตัวมีค่าต่ำกว่าอัตราดอกเบี้ยคงที่ ดังนั้นจะพบว่า Call Swaptions จะให้ผลคล้ายกับ Floors นั่นเอง

- Put Swaptions เป็นการให้สิทธิผู้ซื้อที่จะจ่ายเงินตามอัตราดอกเบี้ยคงที่ และได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ดังนั้นผู้ซื้อ Put Swaptions จะได้ผลประโยชน์ต่อเมื่ออัตราดอกเบี้ยลอยตัวสูงกว่าอัตราดอกเบี้ยคงที่ที่กำหนดไว้ ดังนั้นจะพบว่า Put Swaptions ให้ผลคล้ายคลึงกับ Caps

ข้อแตกต่างระหว่าง Call Swaptions กับ Floors และระหว่าง Put Swaptions กับ Caps ก็คือว่า Swaptions สามารถใช้สิทธิได้เพียงครั้งเดียว แต่ Caps และ Floors ซึ่งคืออนุกรมของ Call และ Put Interest Options ตามลำดับ สามารถใช้สิทธิได้มากมายหลายครั้ง

โดยปกติแล้วมูลค่าสัญญาของตราสาร Swaptions ในการซื้อขายกันมากกว่าร้อยละ 90 เป็นแบบยูโรเปียน ในที่นี้จึงขอกล่าวเฉพาะวิธีการประเมินมูลค่า European Swaptions ที่มีการใช้สิทธิเฉพาะวันสิทธิเท่านั้น ซึ่งมีการกำหนดให้อัตรา Swap ล่วงหน้า (Forward Swap Rate ; F) ในวันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิมีการแจกแจงแบบ Log-normal สำหรับวิธีการประเมินมูลค่าจะใช้แบบจำลอง Black-76 ปรับค่าด้วยทฤษฎีของ Jamshidian (1996)[24] ซึ่งสามารถสรุปวิธีการหามูลค่า Call Swaptions (C) และ Put Swaptions (P) ได้ดังนี้

---

[24] Jamshidian , F. ,"Sorting out Swaptions", *Risk Magazine*, 9,3 (1996).

ก. <u>มูลค่า Call Swaptions</u> (ในรูป % ของวงเงิน)

$$C = \left[\frac{1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{F}{m}\right)^{tm}}}{F}\right] e^{-r\tau}\left[KN(-d_2)-FN(-d_1)\right] \qquad (4.45)$$

ซึ่งพจน์ $\left[\frac{1-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{F}{m}\right)^{tm}}}{F}\right]$ เป็นการปรับค่าอัตรา Swap ล่วงหน้า ที่มีอัตราดอกเบี้ยแบบ Flat Rate ให้เป็นอัตราดอกเบี้ยแบบทบต้น (Compound)

โดยที่ $d_1 = \dfrac{\ln(F/K)+(\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$

t หมายถึง อายุของสัญญา Swap

F หมายถึง อัตรา Swap ล่วงหน้า (เป็นสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้)

K หมายถึง ราคาใช้สิทธิของ Swaptions

r หมายถึง อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง

τ หมายถึง ระยะเวลาของ Swaptions

σ หมายถึง ค่าความผันผวนของอัตรา Swap ล่วงหน้า ในวันที่ทำสัญญา

m หมายถึง อัตรา Swap ในรูปแบบทบต้น (Compound) ต่อปี

ข. <u>มูลค่า Put Swaptions</u> (ในรูป % ของวงเงิน)

$$P = \left[\frac{1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{F}{m}\right)^{tm}}}{F} \right] e^{-r\tau} \left[FN(d_1) - KN(d_2) \right] \tag{4.46}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.9</u> พิจารณา Swaptions ที่มีอายุ 2 ปี ที่ให้สิทธิผู้ถือได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว แต่ต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่แทน โดยที่สัญญา Swap มีระยะเวลาเท่ากับ 4 ปีและอัตราดอกเบี้ยเป็นแบบทบต้นทุก 6 เดือน หากกำหนดให้อัตรา Swap ล่วงหน้า 2 ปี จนถึงสิ้นปีที่ 6 (นับจากปัจจุบัน) มีค่าเท่ากับ 7% Swaptions มีอัตราใช้สิทธิที่ 7.5% อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงมีค่าเท่ากับ 6% และค่าความผันผวนของอัตรา Swap ล่วงหน้าเท่ากับ 20% ต่อปี

จากตัวอย่างที่ 4.9 Swaptions ชนิดนี้ให้สิทธิผู้ซื้อได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว แต่จ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่แทน แสดงว่าเป็น Put Swaptions และได้กำหนดค่าตัวแปรต่างๆ คือ F = 7%, K = 7.5%, τ= 2 ปี, r = 6%, m = 2 และ σ = 20%

$$d_1 = \frac{\ln(0.07/0.05) + (0.20^2/2)(2)}{(0.20)(\sqrt{2})} = -0.1025$$

$$d_2 = -0.1025 - (0.20)(\sqrt{2}) = -0.3853$$

จะได้ $N(d_1) = 0.4592$, $N(d_2) = 0.3500$

$$P = \left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1 + \dfrac{0.07}{2})^{4\times 2}}}{0.07} \right] e^{-(0.06)(2)} [(0.07)(0.4592) - (0.075)(0.3500)]$$

$$= 1.80\%$$

ดังนั้น ผู้ซื้อ Put Swaptions จะต้องจ่ายค่าธรรมเนียมในวันทำสัญญาเท่ากับ1.80% ของวงเงินที่ทำสัญญา ให้แก่สถาบันการเงินที่ออก Put Swaptions

3. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตรระยะสั้น แบบยูโรเปียน (European Short-Term Bond Options)

แบบจำลอง Black (1976)[25] ปรับปรุงมาจากแบบจำลอง Black-Scholes เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตรระยะสั้น แบบยูโรเปียนได้ โดยได้กำหนดให้ราคาของพันธบัตรล่วงหน้าในวันหมดอายุตราสารสิทธิ (F) เป็นสินทรัพย์อ้างอิงที่ระบุไว้ ซึ่งในวันหมดอายุของตราสารสิทธินี้เองพันธบัตรจะมีมูลค่าเท่ากับต้นเงิน (Principal) ที่จ่ายไปในการซื้อพันธบัตรรวมกับดอกเบี้ย (Coupon) สำหรับค่าความผันผวนของราคาพันธบัตรล่วงหน้าในช่วงแรกจะมีค่ามาก เนื่องจากยังมีความไม่แน่นอนสูง แต่ต่อมาความผันผวนจะมีค่าลดลงเพราะสามารถประมาณราคาพันธบัตรล่วงหน้าได้ใกล้เคียงกับราคาตลาดมากขึ้น

ข้อสมมุติฐานที่สำคัญในการหามูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตรระยะสั้น คือ อายุของตราสารสิทธิต้องไม่มากกว่า 1 ใน 5 ของอายุพันธบัตร และอัตราความผันผวนของราคาพันธบัตรล่วงหน้ามีลักษณะเพิ่มขึ้นเป็นเส้นตรงตลอดอายุตราสารสิทธิ จากข้อสมมุติฐานดังกล่าวทำให้สามารถประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตรระยะสั้นแบบยูโรเปียนได้ โดยใช้แบบจำลอง Black-76 ซึ่งสามารถสรุปการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ ชนิด Call และ Put ได้ดังนี้

ก. <u>ตราสารสิทธิ ชนิด Call</u>

$$c = e^{-r\tau}\left[FN(d_1) - KN(d_2)\right] \tag{4.47}$$

โดย $$d_1 = \frac{\ln(F/K) + (\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

---

[25] Black, F., "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, 3 (1976) : 167-179.

ข. ตราสารสิทธิ ชนิด Put

$$p = e^{-r\tau}\left[KN(-d_2) - FN(-d_1)\right] \qquad (4.48)$$

หรือหาได้โดยใช้ค่าเสมอภาคระหว่าง Put กับ Call ที่กล่าวว่า

$$p = c - (F - K)e^{-r\tau} \qquad (4.49)$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.10</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตร แบบยูโรเปียน ชนิดที่ให้สิทธิในการขาย (Put) โดยที่พันธบัตรมีระยะเวลาครบกำหนดไถ่ถอนเท่ากับ 5 ปี กำหนดให้ราคาพันธบัตรล่วงหน้าในวันหมดอายุตราสารสิทธิที่มีระยะเวลาเหลืออีก 6 เดือน มีค่าเท่ากับ 1,200 บาท โดยมีราคาใช้สิทธิที่ 1,150 บาท อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงมีค่าเท่ากับ 6% และ อัตราความผันผวนของราคาพันธบัตรล่วงหน้ามีค่า 10% ต่อปี

จากตัวอย่างที่ 4.10 พันธบัตรมีระยะเวลาครบกำหนดไถ่ถอนเท่ากับ 5 ปี แต่ตราสารสิทธิมีระยะเวลาการใช้สิทธิเท่ากับ 6 เดือน ดังนั้นอายุของตราสารสิทธินี้จึงมีค่าต่ำกว่า 1ใน5 ของอายุพันธบัตร จึงถือได้ว่าพันธบัตรนี้เป็นพันธบัตรระยะสั้น และจากตัวอย่างได้กำหนดค่าตัวแปรต่าง ๆ คือ F = 1,200 บาท, K = 1,150 บาท, τ = 0.5 ปี, r = 6% และ σ = 10%

$$d_1 = \frac{\ln(1{,}200/1{,}150) + (0.1^2/2)(0.5)}{(0.1)(\sqrt{0.5})} = 0.6372$$

$$d_2 = 0.6372 - (0.1)(\sqrt{0.5}) = 0.5665$$

จะได้ $N(-d_1) = 0.262$, $N(-d_2) = 0.2855$

$$p = e^{-(0.06)(0.5)}[(1{,}150)(0.2855) - (1{,}200)(0.262)$$

$$= 13.51 \text{ บาท}$$

ดังนั้น สิทธิในการขายตราสารสิทธิในพันธบัตรระยะสั้นแบบยูโรเปียน มีมูลค่าเท่ากับ 13.51 บาท

4.2 Binomial Model

4.2.1 ที่มาของแบบจำลอง Binomial

แบบจำลอง Binomial หรือ มีชื่อเต็มว่า Binomial Option Pricing Model (BOPM) ซึ่งใช้ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ ได้ถูกค้นพบขึ้นโดยนักวิชาการด้านการเงิน 3 ท่าน คือ John Cox , Stephen Ross และ Mark Rubinstein[26] เมื่อ ปี ค.ศ. 1979 แบบจำลองนี้มีข้อดีตรงที่ทำความเข้าใจได้ง่าย และมีความยืดหยุ่นมากกว่าแบบจำลอง Black–Scholes จึงทำให้สะดวกต่อการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ ทั้งแบบยูโรเปียน, แบบอเมริกัน ทั้งชนิดที่หุ้นสามัญมีการจ่ายเงินปันผลหรือไม่มีการจ่ายเงินปันผลก็ตาม รวมไปถึงการนำไปประยุกต์ใช้กับตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากตราสารหนี้ (Options on Debt Instrument) ก็สามารถทำได้ง่ายเช่นกัน ประโยชน์ที่สำคัญอีกประการหนึ่งก็คือ แบบจำลอง Binomial สามารถใช้ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่มีการเปลี่ยนแปลงปัจจัยที่มีผลกระทบต่อราคาตราสารสิทธิได้ เช่นระหว่างอายุตราสารสิทธิ อัตราดอกเบี้ย หรือความผันผวนของสินทรัพย์อ้างอิงสามารถเปลี่ยนค่าได้ ในขณะที่แบบจำลอง Black–Scholes ไม่สามารถประเมินมูลค่าตราสารสิทธิในกรณีนี้ได้ เนื่องจากมีข้อสมมุติฐานที่ว่าอัตราดอกเบี้ยต้องมีค่าคงที่ตลอดอายุเวลาของตราสารสิทธิ ดังนั้นการศึกษาในรายละเอียดของแบบจำลอง Binomial จะทำให้ผู้ศึกษามีความเข้าใจวิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่ดีขึ้น โดยเฉพาะการเข้าใจถึงเงื่อนไขที่จะทำให้ตราสารสิทธิมีการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ (Early Exercise) และสามารถอธิบายได้ว่าทำไมการซื้อ Call Options ก็เปรียบเสมือนการซื้อหุ้น (Buying Stock) และขอกู้ยืมเงิน (Borrowing) เช่นเดียวกันการซื้อ Put Options ก็เปรียบเสมือนการขายหุ้น (Selling Stock) และการให้กู้ยืมเงิน (Lending)

ลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นโดยใช้แบบจำลองนี้เป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Time Model) ซึ่งมีการแบ่งเวลาออกเป็นส่วนๆ (Discrete Bits) เพื่อที่จะนำไปใช้ในการหามูลค่าตราสารสิทธิในแต่ละช่วงเวลาเหล่านั้นสำหรับลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นจะเป็นไปได้สองรูปแบบคือ ปรับตัวสูงขึ้น หรือปรับลดตัวลง โดยความน่าจะเป็นในการปรับตัวสูงขึ้นหรือปรับตัวลด

---

[26] John C. COX, Stephen A. ROSS and Mark Rubinstein,"Option Pricing : A Simplizicd Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, (October 1979) : 229 - 263.

ลง ขึ้นอยู่กับการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไบโนเมียล (Binomial Probability Distribution) ดังนั้นจึงอาจเรียกแบบจำลอง Binomial ในอีกชื่อหนึ่งว่า Two-State Model

1. การพิสูจน์ที่มาของแบบจำลอง Binomial

ข้อสมมุติฐานของแบบจำลอง Binomial

ก. ตลาดซื้อขายตราสารสิทธิ มีการแข่งขันกันอย่างสมบูรณ์ ซึ่งหมายความว่าไม่มีค่าใช้จ่ายในการดำเนินธุรกรรม ไม่มีการเรียกเก็บ Margin จากลูกค้า ไม่มีการจ่ายภาษี และอนุญาตให้สามารถทำ Short Sales ได้

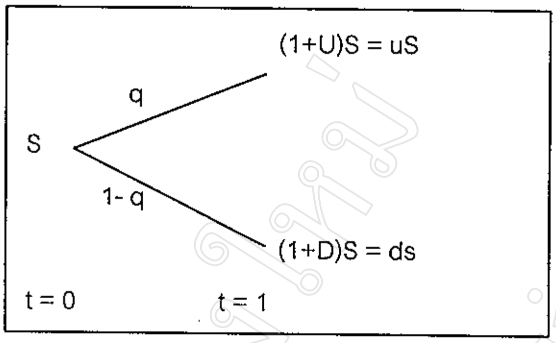
ข. อัตราดอกเบี้ยในแต่ละช่วงเวลา (r) อัตราการเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์อ้างอิงให้ปรับตัวสูงขึ้น (U)หรือปรับค่าลดลง (D) สามารถทราบค่าทุกๆ ช่วงเวลา โดยที่ค่า U, D และ r ไม่จำเป็นต้องมีค่าคงที่เท่ากันทุกช่วงเวลา

ค. ไม่มีโอกาสในการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (No Arbitrage Opportunities) ในภาวะสมดุล

ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิโดยใช้แบบจำลอง Binomial มีขั้นตอนการหาค่า 2 ขั้นตอน (Two–Step Process) คือ ขั้นตอนแรกต้องทำการสร้างลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์อ้างอิงแต่ละประเภท ซึ่งอธิบายได้โดยใช้การสร้างแผนผังรูปต้นไม้ (Binomial Tree) ขั้นตอนที่สองต้องทำการสร้างลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่าตราสารสิทธิ และคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิจาก Node ขวาสุดมาด้านซ้ายสุด (Backward) โดยใช้อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงเป็นอัตราลดค่า เพื่อทำความเข้าใจในการหาที่มาของแบบจำลอง Binomial ขอเริ่มต้นอธิบายโดยใช้แบบจำลอง Binomial แบบ 1 งวดเวลา ซึ่งเป็นรูปแบบที่สามารถทำความเข้าใจได้โดยง่ายและเป็นพื้นฐานสำคัญในการหาที่มาของแบบจำลอง Binomial แบบหลายงวดเวลาในภายหลัง โดยกำหนดให้ราคาหุ้นสามัญที่ไม่มีการจ่ายเงินปันผลเป็นตัวแทน ของราคาสินทรัพย์อ้างอิง

ก. แบบจำลอง Binomial แบบ 1 งวดเวลา (One–Period Model)

พิจารณาการเคลื่อนของราคาหุ้นสามัญ ตามแบบจำลอง Binomial จะเป็นไปได้ใน 2 ลักษณะ คือปรับตัวสูงขึ้นหรือปรับค่าลดลง หากกำหนดในราคาหุ้นสามัญ ณ ปัจจุบัน (t = 0) คือ ความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้นปรับตัวสูงขึ้น U% มีค่าเท่ากับ q และความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้นปรับตัวลดลง D% มีค่าเท่ากับ 1 – q ลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นจะเป็นไปตามรูป 4.2

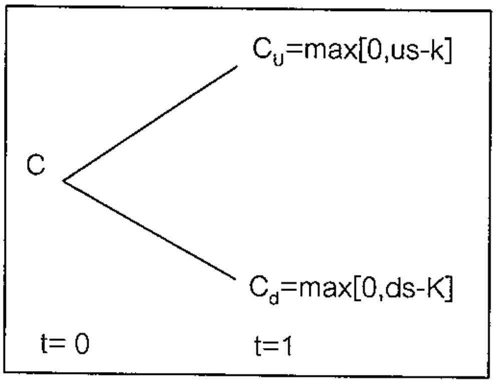


รูป 4.2 แสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ แบบ 1 งวดเวลา

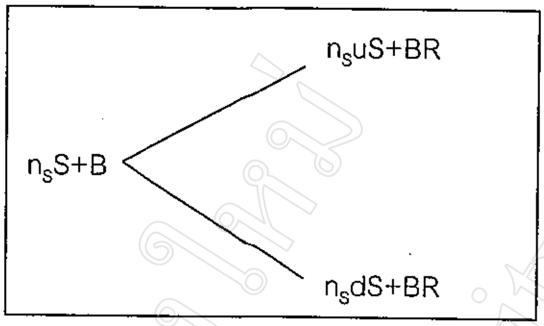
จากรูป 4.2 ได้กำหนดค่าตัวแปร u มีค่าเท่ากับ 1 + U, ตัวแปร d มีค่าเท่ากับ (1+ D) ณ เวลา t = 1 ราคาหุ้นจะมีอยู่ 2 ลักษณะ คือ uS หรือ dS

สำหรับรูป 4.3 แสดงถึง ลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่าตราสารสิทธิ ชนิด Call โดยกำหนดให้ C คือมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call ณ ปัจจุบัน ซึ่งเป็นตัวแปรที่ต้องการทราบค่า C_u และ C_d แทนค่าของมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call ที่เป็นไปได้ ณ เวลา t=1 เมื่อราคาหุ้นปรับตัวสูงขึ้นเป็น uS หรือปรับค่าลงเป็น dS และเนื่องจากว่า ณ เวลา t=1 เป็นวันที่ตราสารสิทธิหมดอายุ ดังนั้น C_u และ C_d ต้องมีค่าเท่ากับ max [0,uS–K] ในกรณีที่ราคาหุ้นมีการปรับตัวสูงขึ้น และ เท่ากับ max [0,ds–K] ในกรณีที่ราคาหุ้นมีการปรับตัวลดลง ตามลำดับ

หากทำการสร้างกลุ่มสินทรัพย์จำลองขึ้นมาโดยที่กลุ่มสินทรัพย์ประกอบด้วยจำนวนหุ้นสามัญ n_s หุ้น และหุ้นกู้ประเภทไม่มีดอกเบี้ยที่มีอัตราผลตอบแทนเท่ากับ i (i = R-1) ณ เวลา t = 1 ถ้าราคาหุ้นสูงขึ้น จะทำให้มูลค่าของกลุ่มสินทรัพย์มีค่าเท่ากับ n_SuS+BR แต่ถ้าราคาหุ้นมีค่าลดลง กลุ่มของสินทรัพย์จะมีค่าเท่ากับ n_SdS+BR ดังแสดงตามรูป 4.4



รูป 4.3 แสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่าตราสารสิทธิ ชนิด Call แบบ 1 งวดเวลา



<u>รูป 4.4</u> แสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่ากลุ่มสินทรัพย์ แบบ 1 งวดเวลา

จากรูป 4.3 และ 4.4 พบว่าอัตราผลตอบแทนของตราสารสิทธิ ชนิด Call มีค่าเทียบเท่ากับอัตราผลตอบแทนจากกลุ่มสินทรัพย์ ดังนั้นจึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$n_S uS + BR = C_u \tag{4.50}$$

$$n_S dS + BR = C_d \tag{4.51}$$

จากสมการที่ (4.50) และ (4.51) จะสามารถคำนวณหาค่า n_S และ B ได้ตามสมการที่ (4.52) และ (4.53) ตามลำดับ

$$n_S = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} \tag{4.52}$$

$$B = \frac{1}{R}\left[\frac{uC_d - dC_u}{u-d}\right] \tag{4.53}$$

ตามสมการที่ 4.53 หาก B มีค่าเป็นบวก แสดงว่าเป็นการให้กู้ยืม (Lending) แต่ถ้าผลลัพธ์ที่ได้มีค่าติดลบ แสดงว่าเป็นการขอกู้ยืมเงิน (Borrowing)

เป็นเพราะว่าค่า n_S และ B ตามสมการที่ (4.52) และ (4.53) เป็นค่าที่ทำให้อัตราผลตอบแทนที่ได้จากการลงทุนในตราสารสิทธิชนิด Call มีค่าเท่ากับอัตราผลตอบแทนจากกลุ่มสินทรัพย์ เพื่อหลีกเลี่ยงจากการแสวงหากำไร (Arbitrage) มูลค่าตราสารสิทธิ ชนิด Call ณ ปัจจุบัน ย่อมมีค่าเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของกลุ่มสินทรัพย์ ดังนั้น

$$C = n_S S + B \tag{4.54}$$

แทนค่า n_s และ B เข้าไปในสมการที่ (4.54) จะได้

$$C=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{1}{R}\left[\frac{uC_d-dC_u}{u-d}\right]$$

$$C=\frac{1}{R}\left\{\left[\frac{R-d}{u-d}\right]C_u+\left[\frac{u-R}{u-d}\right]C_d\right\} \qquad (4.55)$$

เนื่องจากสัมประสิทธิ ของ C_u และ C_d มีค่ารวมกันเท่ากับ 1 ดังนั้นหากกำหนดให้ความน่าจะเป็นที่ Call Options สูงขึ้นเป็น p จะได้ความน่าจะเป็นที่ Call Options มีมูลค่าลดลงเท่ากับ 1-p นั่นคือ

$$p=\frac{R-d}{u-d},\quad 1-p=\frac{u-R}{u-d} \quad \text{โดยที่} \quad u>R>d \qquad (4.56)$$

แทนสมการที่ (4.56) ลงไปในสมการที่ (4.55) จะได้

$$C=\frac{1}{R}\left[pC_u+(1-p)C_d\right] \qquad (4.57)$$

สมการที่ (4.57) คือ สมการแสดงมูลค่าของตราสารสิทธิชนิด Call แบบ 1 งวดเวลา ซึ่งเป็นที่น่าสังเกตว่าไม่มีตัวแปร q ในสมการแสดงมูลค่าของตราสารสิทธิชนิด Call เลย เป็นเพราะว่าในโลกของการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยง (Risk Neutral World) ความน่าจะเป็นที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงเพิ่มขึ้น (q) หรือลดลง (1-q) ย่อมมีค่าเท่ากับความน่าจะเป็นที่มูลค่าตราสารสิทธิมีค่าเพิ่มขึ้น (p) หรือลดลง (1-p) ดังนั้น

$$P \equiv q \qquad (4.58)$$

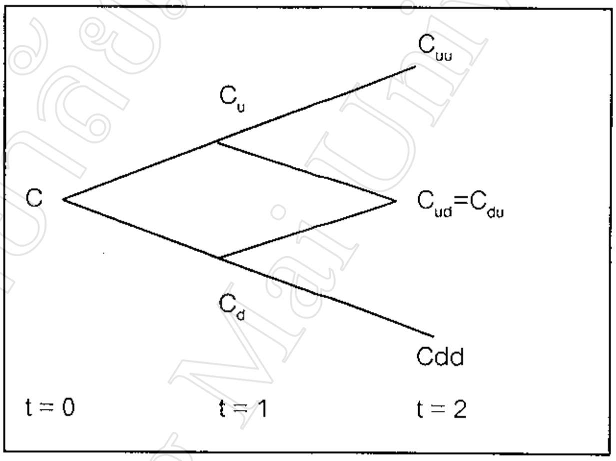
เมื่อนำสมการที่ (4.58) แทนค่าเข้าไปในสมการที่ (4.57) จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ของมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call ได้ตามสมการที่ (4.59)

$$C=\frac{1}{(1+i)}\left[qC_u+(1-q)C_d\right]=\frac{1}{R}\left[pC_u+(1-p)C_d\right] \qquad (4.59)$$

จากสมการที่ (4.59) สามารถสรุปได้ว่ามูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call จะหาค่าได้จากค่าคาดหวังในอัตราผลตอบแทนของตราสารสิทธิ ชนิด Call ที่ลดค่าด้วยอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง

ข. แบบจำลอง Binomial แบบ 2 งวดเวลา (Two-Period Model)

พิจารณา รูป 4.5 ที่แสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่าของตราสารสิทธิแบบ 2 งวดเวลา โดยมีวันหมดอายุของตราสารสิทธิที่เวลา t=2 และที่วันหมดอายุของตราสารสิทธินี้ มูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call จะมีค่าที่เป็นไปได้ใน 3 ลักษณะ คือ C_{uu}= max [0,u^2S–K],
C_{ud} = max [0,udS–K] และ C_{dd} = max [0,d^2S–K]



รูป 4.5 แสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call แบบ 2 งวดเวลา

การคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิ ชนิด Call แบบ 2 งวดเวลานี้ จะใช้วิธีที่เรียกว่า "Recursive Approach" โดยมีขั้นตอนการหาค่าเริ่มจากการหามูลค่าตราสารสิทธิ ณ เวลา t=2 ย้อนกลับทีละช่วงเวลา โดยใช้อัตราลดค่าเท่ากับอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงจนถึงเวลา t=0 ณ เวลา t=2 ในกรณีที่ node C ถูกเลือกมูลค่าของ C_u จะหาได้จากการใช้แบบจำลอง Binomial แบบ 1 งวดเวลา ในเทอมของ C_{uu} และ C_{ud} ดังนั้นจะได้

$$C_u = \frac{1}{R}\left[pC_{uu} + (1-p)C_{ud}\right] \tag{4.60}$$

เช่นเดียวกัน จะสามารถหาค่าของ C_d ในเทอมของ C_{ud} และ C_{dd} ดังสมการที่ (4.61)

$$C_d = \frac{1}{R}\left[pC_{ud} + (1-p)C_{dd}\right] \quad (4.61)$$

มูลค่าตราสารสิทธิ ณ เวลา t = 0 จะหาได้จากการใช้แบบจำลอง Binomial แบบ 1 งวดเวลาในเทอมของ C_u และ C_d ซึ่งได้ทำการหาค่าไว้แล้วตามสมการที่ (4.57) คือ

$$C = \frac{1}{R}\left[pC_u + (1-p)C_d\right]$$

แทนค่า C_u และ C_d ตามสมการที่ (4.60) และสมการที่ (4.61) ลงในสมการที่ (4.57) เพื่อหามูลค่าของตราสารสิทธิชนิด Call แบบ 2 งวดเวลา ดังสมการที่ (4.62)

$$C = \frac{1}{R^2}\left[p^2C_{uu} + 2p(1-P)C_{ud} + (1-p)^2C_{dd}\right] \quad (4.62)$$

หรือมีค่าเทียบเท่ากับ

$$C = \frac{1}{R^2}[p^2\max\{0, u^2S - K\} + 2p(1-p)\max\{0, udS - K\} + (1-p)^2\max\{0, d^2S - K\}] \quad (4.63)$$

ค. แบบจำลอง Binomial แบบ n งวดเวลา

จากสมการที่ (4.63) ซึ่งแสดงถึงมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call แบบ 2 งวดเวลา หากจัดพจน์ต่างๆ ของสมการเหล่านี้ให้อยู่ในรูปของการแจกแจงแบบ Binomial จะได้

$$C = \frac{1}{R^2}\left[\sum_{j=0}^{2}\frac{2!}{(2-j)!\,j!}\,p^j(1-p)^{2-j}\max\{0, Su^jd^{2-j} - K\}\right] \quad (4.64)$$

ในกรณีที่ตราสารสิทธิ ชนิด Call มีลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่าตราสารสิทธิแบบ n งวดเวลา การหามูลค่าก็สามารถทำได้โดยการประยุกต์จากสมการที่ (4.64) เพียงแต่เปลี่ยนค่า j จาก j=0 ถึง 2 เป็น j=0 ถึง n

$$C = \frac{1}{R^n}\left[\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \max\{0, Su^j d^{n-j} - K\}\right] \tag{4.65}$$

อย่างไรก็ตามลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call บางลักษณะ (บางค่า j) อาจทำให้ตราสารสิทธิไม่มีค่าเนื่องจากไม่มีการใช้สิทธิตลอดช่วงอายุของตราสารสิทธิเลย ดังนั้นควรมีการปรับค่า j ใหม่ ให้คิดเฉพาะลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่าตราสารสิทธิที่เป็น In-The-Money ในวันหมดอายุของตราสารสิทธิ สมมุติว่า j เริ่มต้นที่ j = a ดังนั้นที่ $j \geq a$ ณ วันหมดอายุ ตราสารสิทธิจะอยู่ในภาวะ ITM สำหรับค่า a คือ จำนวนเต็มที่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้สมการที่ (4.66) เป็นจริง

$$Su^a d^{n-a} > K \tag{4.66}$$

คำนวณหาค่า a โดยการ take logarithms ทั้งสองข้าง จะได้

$$a > \frac{\ln(K/S.d^n)}{\ln(u/d)} \tag{4.67}$$

นำสมการที่ (4.65) มาเขียนใหม่ โดยพิจารณาเฉพาะลักษณะการเคลื่อนไหวของตราสารสิทธิชนิด Call ที่อยู่ในภาวะ ITM ณ วันสิ้นสิทธิ จะได้

$$C = \frac{1}{R^n}\left[\sum_{j=a}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-j} (Su^j d^{n-j} - K)\right]$$

$$C = \frac{1}{R^n}\left[S\sum_{j=a}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j}\right]$$

$$- KR^{-n}\left[\sum_{j-a}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-j}\right] \tag{4.68}$$

นำ $\frac{1}{R^n}$ กระจายเข้าไปในเทอมแรกของสมการที่ (4.68) จะได้

$$p^j(1-p)^{n-j}\frac{u^jd^{n-j}}{R^n}=\left(\frac{pu}{R}\right)^j\left[\frac{(1-p)d}{R}\right]^{n-j}$$

สมมุติให้

$$b=\frac{pu}{R} \text{ และ } 1-b=\frac{(1-p)d}{R} \qquad (4.69)$$

นำค่า b และ 1 – b ตามสมการที่ (4.69) แทนค่าลงในสมการที่ (4.68) จะได้

$$C=S\left[\sum_{j=a}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}b^j(1-b)^{n-j}\right]-KR^{-n}\left[\sum_{j=a}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j}p^j(1-p)^{n-j}\right] \qquad (4.70)$$

สมการที่ (4.70) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Binomial ได้ตามสมาการที่ (4.71)

$$C = S.B[n,a,b]-KR^{-n}B[n,a,p] \qquad (4.71)$$

โดยที่

n คือ จำนวนงวดเวลาจนกว่าจะถึงวันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิ ชนิด Call

B(n,a,p) คือ การแจกแจงแบบ Binomial ของพารามิเตอร์ n,a,p ซึ่งบ่งบอกถึงความน่าจะเป็นของราคาหุ้นที่อยู่ในภาวะ ITM โดยมีความน่าจะเป็นที่ราคาปรับตัวสูงขึ้นเท่ากับ p

B(n,a,b) คือ การแจกแจงแบบ Binomial ของพารามิเตอร์ n,a,b, ซึ่งบ่งบอกถึงความน่าจะเป็นของราคาหุ้นที่อยู่ในภาวะ ITM โดยมีความน่าจะเป็นที่ราคาปรับตัวสูงขึ้นเท่ากับ b (b = pu/R)

สมการที่ (4.71) ก็คือรูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Binomial สำหรับใช้ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call แบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ซึ่งหาค่าได้จากราคาหุ้นสามัญที่คาดหวังไว้ในวันสิ้นสิทธิและคาดว่าจะมีลักษณะเป็น In-The-Money ที่ลดค่าโดยใช้อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง (พจน์ SB [n,a,b] หักออกด้วยมูลค่าปัจจุบันของราคาใช้สิทธิให้หุ้นสามัญ ณ วันสิ้นสิทธิ (พจน์ KR^{-n} B [n,a,p] เป็นที่น่าสังเกตว่าแบบจำลอง Binomial มี

ลักษณะคล้ายคลึงกับแบบจำลอง Black-Scholes มาก (ในหัวข้อ 4.3 จะอธิบายถึงความสัมพันธ์ของแบบจำลองทั้งสอง)

สำหรับการหามูลค่าตราสารสิทธิชนิด Put แบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ก็สามารถหาค่าได้โดยทำการสร้างกลุ่มสินทรัพย์จำลองขึ้นมาเช่นเดียวกับการหามูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call เพียงแต่เปลี่ยนมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call ณ วันสิ้นสิทธิ [max(0,S-K)] มาเป็นมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Put ณ วันสิ้นสิทธิ [max (0, K-S)]

ดังนั้นมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Put โดยใช้แบบจำลอง Binomial แบบ 1 งวดเวลา จะเป็นไปตามสมการที่ (4.72)

$$P = \frac{1}{R}\left[pP_u + (1-p)P_d\right] \tag{4.72}$$

โดยที่ $P_u = \max[0, K-uS]$

$P_d = \max[0, K-dS]$

สำหรับการหารูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Binomial เพื่อใช้ในการหามูลค่าของตราสารสิทธิชนิด Put แบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล จะใช้ความสัมพันธ์ของค่าเสมอภาคระหว่าง Put กับ Call ที่กล่าวว่า

$$P = C - S + KR^{-n} \tag{4.73}$$

แทนค่า C ตามสมการที่ (4.71) เข้าไปในสมการที่ (4.73) จะได้

$$P = SB[n,a,b] - KR^{-n}B[n,a,p] - S + KR^{-n}$$

ซึ่งมีค่าเทียบเท่า

$$P = S\left[\sum_{j=a}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}b^j(1-b)^{n-j} - 1\right] + KR^{-n}\left[1 - \sum_{j=a}^{n}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}p^j(1-p)^{n-j}\right]$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$P = KR^{-n}\left[\sum_{j=0}^{a-1}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}p^j(1-p)^{n-j}\right] - S\left[\sum_{j=0}^{a-1}\frac{n!}{(n-j)!\,j!}b^j(1-b)^{n-j}\right] \tag{4.74}$$

สมการที่ (4.74) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Binomial ได้ตามสมการที่ (4.75)

$$P = KR^{-n} \{1 - B[n,a,p]\} - S\{1 - B[n,a,b]\} \quad (4.75)$$

สมการที่ (4.75) ก็คือ รูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Binomial สำหรับใช้ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Put แบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล

เป็นที่น่าสังเกตว่า ไม่ว่าจะเป็นมูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call หรือ Put ก็ตาม จะต้องทราบตัวแปรทั้ง 6 ค่าที่จะแทนเข้าไปในแบบจำลอง Binomial ซึ่งประกอบด้วยราคาหุ้น (Stock Price ; S), ราคาใช้สิทธิ (Striking Price ; K), i = อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง (R=1+i), จำนวนงวดเวลาจนถึงวันสิ้นสิทธิของตราสารสิทธิ (n), U = อัตราผลตอบแทนที่หุ้นมีการปรับตัวสูงขึ้น (u=U+1) และ D=อัตราผลตอบแทนที่หุ้นมีการปรับตัวลดลง (d = D+1)

4.2.2 การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากราคาหุ้นสามัญ (Stock Options)

การใช้แบบจำลอง Binomial ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ สามารถกระทำได้ 2 วิธี คือ

(1) ใช้วิธี Recursive Approach ที่หามูลค่าตราสารสิทธิทีละงวดเวลา จากงวดเวลาสุดท้ายจนถึงงวดเวลาปัจจุบัน (t=0) ซึ่งวิธีนี้จะทำให้เข้าใจวิธีการประเมินมูลค่าได้เป็นอย่างดี โดยเฉพาะอย่างยิ่งสามารถอธิบายถึงการใช้สิทธิในตราสารสิทธิก่อนถึงวันหมดอายุ (Early Exercise) เพื่อนำไปใช้ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล หรือตราสารสิทธิแบบอเมริกัน รวมไปถึงสามารถสร้างกลุ่มสินทรัพย์จำลองที่มีมูลค่าเทียบเท่ากับตราสารสิทธิแต่ละชนิดได้ แต่มีข้อเสียตรงที่อาจจะต้องใช้เวลาในการประเมินค่า โดยเฉพาะตราสารสิทธิที่มีอายุการใช้สิทธิคงเหลือหลายงวดเวลากว่าจะถึงวันสิ้นสิทธิ

(2) ใช้สมการรูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Binomial เช่น สมการที่ (4.71) ใช้สำหรับประเมินมูลค่า European Call Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล เป็นต้น ซึ่งวิธีนี้เหมาะสำหรับใช้การประมวลผลทางคอมพิวเตอร์ในการหาค่า เพราะมีสูตรการคำนวณที่ยุ่งยาก ซับซ้อน โดยเฉพาะการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ที่จะไม่มีรูปแบบสมการที่แน่นอน (No Exact Formula) เป็นเพียงรูปแบบสมการโดยประมาณ (Closed-Form Approximations)

สำหรับการศึกษาการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ โดยใช้แบบจำลอง Binomial ในที่นี้จะขอใช้การยกตัวอย่างประกอบในการทำความเข้าใจตัวแบบจำลอง ซึ่งจะเลือกใช้วิธี Recursive Approach ในการหามูลค่าตราสารสิทธิเป็นหลัก สำหรับการประเมินค่าโดยใช้รูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Binomial จะอธิบายพอสังเขป (ดังแสดงตามตัวอย่างที่ 4.11) การประเมินมูลค่าตรา

สารสิทธิที่อ้างอิงจากราคาหุ้นสามัญแบ่งออกได้เป็น 2 รูปแบบ คือ ตราสารสิทธิแบบยุโรเปียนและตราสารสิทธิแบบอเมริกัน

1. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบยุโรเปียน

ในที่นี้จะแบ่งเนื้อหาของการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบยุโรเปียน ที่อ้างอิงจากราคาหุ้นสามารถโดยใช้แบบจำลอง Binomial ออกเป็น 3 ส่วน โดยมีรายละเอียดดังนี้

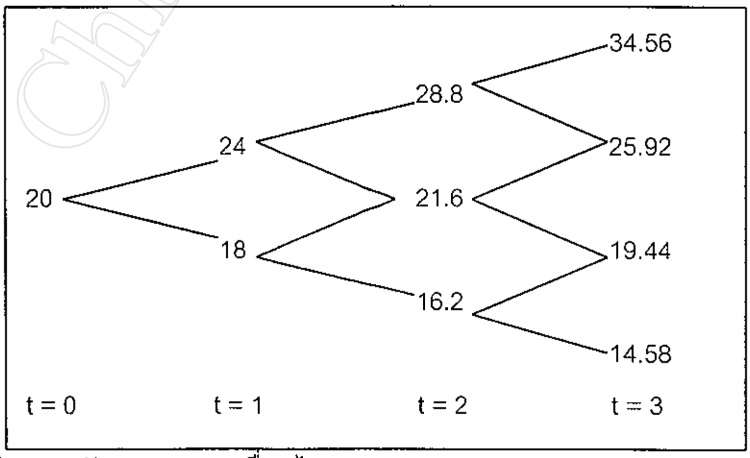
ก. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบยุโรเปียน ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล (Non-Dividend Paying Stock)

<u>ตัวอย่างที่ 4.11</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ตราสารสิทธิชนิด Call และ Put แบบยุโรเปียนของหุ้นสามัญที่มีระยะเวลาการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ 3 งวดเวลา ราคาหุ้น ณ ปัจจุบันมีค่าหุ้นละ 20 บาท โดยที่หุ้นมีการปรับตัวสูงขึ้น 20% หรือลดลง 10% ต่องวดเวลา หากตราสารสิทธินี้มีราคาใช้สิทธิที่ 20 บาท กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงมีค่าเท่ากับร้อยละ 10 ต่องวดเวลา

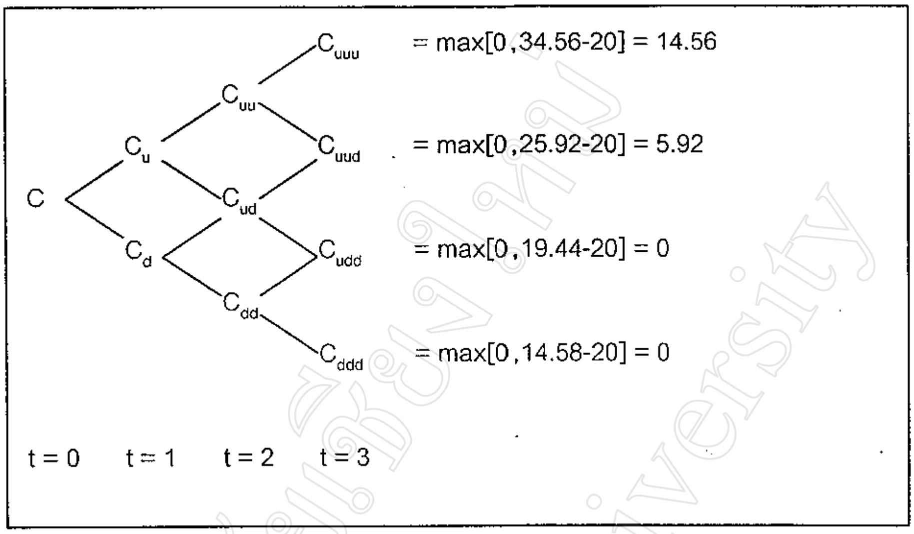
จากตัวอย่างที่ 4.11 กำหนดให้ S=20 บาท, K=20 บาท, n=3 งวดเวลา, R=1.1, u=1.20 และ d=0.90

- **<u>กรณีใช้</u>** <u>Recursive Approach</u>

สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ จำนวน 3 งวดเวลา



สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของ European Call Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล



คำนวณหาความน่าจะเป็นที่ตราสารสิทธิปรับค่าเพิ่มขึ้น (p) หรือลดลง (1-p) ได้จาก

$$p = \frac{R - d}{u - d} = \frac{1.1 - 0.9}{1.2 - 0.9} = 0.6667$$

จะได้ 1 – p = 0.3333

คำนวณหามูลค่า European Call Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล

<u>ณ เวลา t = 2</u>

C_{uu} = [(C_{uuu} Xp) + (C_{uud} X (1 – p))] / R

= [(14.56 X 0.6667) + (5.92 X 0.3333)] / (1.1)

= 10.62 บาท

C_{ud} = [(5.92 X 0.6667) + (0 X 0.3333)] / 1.1 = 3.59 บาท

C_{dd} = [(0 X 0.6667) + (0 X 0.3333)] / (1.1) = 0 บาท

<u>ณ เวลา t = 1</u>

C_u = [(10.62 X 0.6667) + (3.59 X 0.3333)] / (1.1) = 7.52 บาท

C_d = [(3.59 X 0.6667) + (0 X 0.3333)] / (1.1) = 2.18 บาท

<u>ณ เวลา t = 0</u>

$$C = [(7.52 \times 0.6667) + (2.18 \times 0.3333)] / (1.1) = 5.22 \text{ บาท}$$

ดังนั้นมูลค่า European Call Options ของหุ้นสามัญนี้ โดยใช้วิธี Recursive Approach มีค่าเท่ากับ 5.22 บาท

ผู้ลงทุนสามารถสร้างกลุ่มสินทรัพย์จำลองที่มีมูลค่าเทียบเท่า (Equivalent Portfolio) กับตราสารสิทธิชนิด Call ณ แต่ละช่วงเวลาได้ ในที่นี้จะพิจารณาส่วนประกอบของกลุ่มสินทรัพย์ที่มีมูลค่าเทียบเท่า ณ เวลาปัจจุบัน (t=0) โดยใช้สมการที่ (4.52) หาค่าจำนวนหุ้นสามัญที่จะต้องซื้อ (ค่า n_s เป็นบวก) หรือขาย (ค่า n_s เป็นลบ) และใช้สมการที่ (4.53) เพื่อหาค่าจำนวนเงินที่จะต้องขอกู้ยืมเงิน (ค่า B เป็นลบ) หรือให้กู้ยืมเงิน (ค่า B เป็นบวก)

จากสมการที่ (4.52)

$$n_s = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} = \frac{7.52 - 2.18}{(20)(1.2 - 0.9)}$$

$$= 0.89 \text{ หุ้น}$$

จากสมการที่ (4.53)

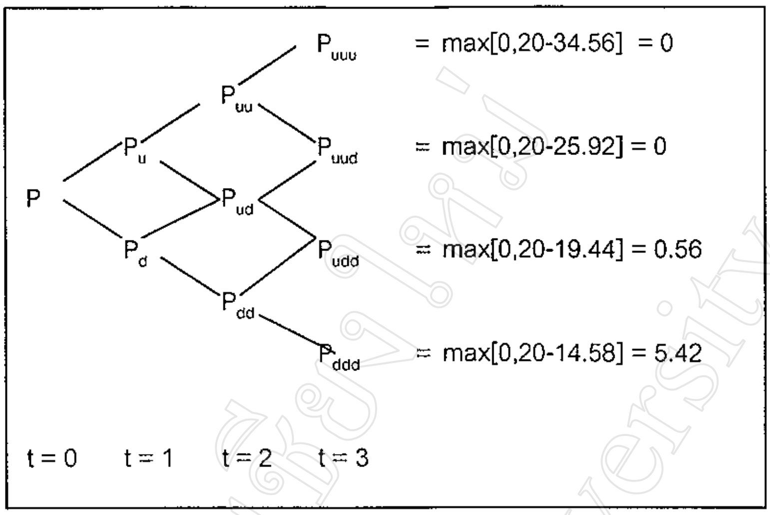
$$B = \frac{1}{R}\left[\frac{uC_d - dC_u}{u-d}\right] = \frac{1}{1.1}\left[\frac{(1.2)(2.18) - (0.9)(7.52)}{1.2 - 0.9}\right]$$
$$= -12.58 \text{บาท}$$

เป็นที่น่าสังเกตว่าการซื้อหุ้นสามัญจำนวน 0.89 หุ้น ณ เวลาปัจจุบัน ที่ราคาหุ้นมีค่าหุ้นละ 20 บาท และขอกู้ยืมเงินจำนวน 12.58 บาท ก็เปรียบเสมือนการลงทุนซื้อตราสารสิทธิชนิด Call ที่มูลค่า 5.22 บาท จำนวน 1 สัญญา[27]

สำหรับการประเมินมูลค่า European Put Options ในกรณีตัวอย่างนี้ก็สามารถทำได้โดยใช้วิธีแบบเดียวกัน เพียงแต่เปลี่ยนแผนผังแสดงลักษณะเคลื่อนไหวมูลค่าตราสารสิทธิให้เป็นชนิด Put

---

[27] รายละเอียดเพิ่มเติมสามารถศึกษาได้จากหนังสือ Options And Financial Futures ของ David A. Dubofsky หน้า 145 – 148.



คำนวณหามูลค่า European Put Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล

<u>ณ เวลา t = 2</u>

P_{uu} = [(0 X 0.6667) + (0 X 0.3333)] / 1.1 = 0 บาท

P_{ud} = [(0 X 0.6667) + (0.56 X 0.3333)] / 1.1 = 0.17 บาท

P_{dd} = [(0.56 X 0.6667) + (5.42 X 0.3333)] / (1.1) = 1.98 บาท

<u>ณ เวลา t = 1</u>

P_u = [(0 X 0.6667) + (0.17 X 0.3333)] / (1.1) = 0.05 บาท

P_d = [(0 X 0.6667) + (1.98 X 0.3333)] / (1.1) = 0.70 บาท

<u>ณ เวลา t = 0</u>

P = [(0.05 X 0.6667) + (0.70 X 0.3333)] / (1.1) = 0.24 บาท

ดังนั้นมูลค่า European Put Options ของหุ้นสามัญนี้ โดยใช้วิธี Recursive Approach มีค่าเท่ากับ 0.24 บาท

หากต้องการสร้างกลุ่มสินทรัพย์จำลองที่มีมูลค่าเทียบเท่ากับตราสารสิทธิชนิด Put ณ เวลา t = 0 ก็สามารถหาค่าได้เช่นเดียวกัน ซึ่งจะต้องมีการปรับปรุงสมการที่ (4.52) และ (4.53) ให้เป็นสมการที่ใช้สำหรับตราสารสิทธิชนิด Put โดยเปลี่ยนพจน์ C_u และ C_d เป็น P_u และ P_d ตามลำดับ ส่วนพจน์อื่นๆ ยังมีค่าคงเดิม จะได้

$$n_S = \frac{P_u - P_d}{S(u-d)} = \frac{0.05 - 0.70}{(20)(1.2 - 0.9)}$$
$$= -0.11 \text{หุ้น}$$

$$B = \frac{1}{R}\left[\frac{uP_d - dP_u}{u-d}\right] = \frac{1}{1.1}\left[\frac{(1.2)(0.70) - (0.9)(0.05)}{(1.2 - 0.9)}\right]$$
$$= +2.41 \text{ บาท}$$

ดังนั้นการขายหุ้นสามัญจำนวน 0.11 หุ้น ณ เวลาปัจจุบันที่ราคาหุ้นมีค่าหุ้นละ 20 บาท และให้กู้ยืมเงินจำนวน 2.41 บาท ก็เปรียบเสมือนการลงทุนซื้อตราสารสิทธิชนิด Put ที่มีมูลค่า 0.24 บาท จำนวน 1 สัญญา[28]

- **<u>กรณีใช้รูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Binomial</u>**

การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ โดยใช้รูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Binomial จำเป็นต้องทราบค่าความน่าจะเป็น p,b และ ค่า a ที่เป็นจำนวนเต็มที่น้อยสุดที่สอดคล้องกับสมการ (4.66)

คำนวณหาค่า p,b และ a

ค่า p หาได้จาก $p = \dfrac{R-d}{u-d} = \dfrac{1.1-0.9}{1.2-0.9} = 0.6667$

จะได้ $1-p = 0.3333$

ค่า b หาได้จาก

$$b = \frac{pu}{R} = \frac{(0.6667)(0.3333)}{1.1} = 0.73$$

จะได้ $1-b = 0.27$

ค่า a หาได้จาก

$$a > \frac{\ln(K/Sd^n)}{\ln(u/d)}$$

$$a > \frac{\ln[20/(20)(0.9)^3]}{\ln(1.2/0.9)}$$

$$a > 1.0987$$

เนื่องจาก a คือ จำนวนเต็มที่มีค่าน้อยสุด ดังนั้นค่า a มีค่าเท่ากับ = 2

มูลค่า European Call Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล หาได้จากสมการที่ (4.71) ที่กล่าวว่า

$$c \quad = \quad S.B[n,a,b] - KR^{-n} B[n,a,p]$$

[28] เรื่องเดียวกัน, หน้า 165 - 168

คำนวณหาค่า B [n,a,b] ;

$$B[3,2,0.73] = \sum_{j=2}^{3} \frac{3!}{(3-j)!\,j!}(0.73)^{j}(0.27)^{3-j}$$
$$= \left[3x(0.73)^{2}x0.27\right] + \left[1x(0.73)^{3}x1\right]$$
$$= 0.8207$$

คำนวณหาค่า B [n,a,p]

$$B[3,2,0.73] = \sum_{j=2}^{3} \frac{3!}{(3-j)!\,j!}(0.67)^{j}(0.33)^{3-j}$$
$$= \left[3x(0.67)^{2}x0.33\right] + \left[1x(0.67)^{3}x1\right]$$
$$= 0.7452$$

แทนค่า B[n,a,b] และ B[n,a,p] เพื่อหาค่า C จะได้

$C \;=\; (20)\,(0.8207) - (20)\,(1.1)^{-3}\,(0.7452)$

$C \;=\;$ 5.22 บาท

สำหรับการประเมินมูลค่า European Put Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล หาได้จากสมการที่ (4.75) ที่กล่าวว่า

$P \;=\; KR^{-n}\,\{1\text{-}B[n,a,p]\} - S\{1\text{-}B[n,a,b]\}$

โดยที่ 1 - B[n,a,p] = 1 - 0.7452 = 0.2548

1 - B[n,a,b] = 1 - 0.8207 = 0.1793

แทนค่า 1 - B[n,a,p] และ 1 - b[n,a,p] เพื่อหาค่า P จะได้

$P \;=\; (20)(1.1)^{-3}\,(0.2548) - (20)(0.1793)$

$=\;$ 0.24 บาท

การประเมินมูลค่าตามตัวอย่างที่ 4.11 โดยใช้รูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Binomial จะได้มูลค่า European Call Options ของหุ้นสามัญ เท่ากับ 5.22 บาท และ European Put Options

ของหุ้นสามัญเท่ากับ 0.24 บาท ซึ่งจะพบว่ามูลค่าตราสารสิทธิโดยใช้แบบจำลอง Binomial ทั้ง 2 วิธีมีมูลค่าเท่ากัน

ข. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลที่ทราบค่า (Known Discrete Dividends)

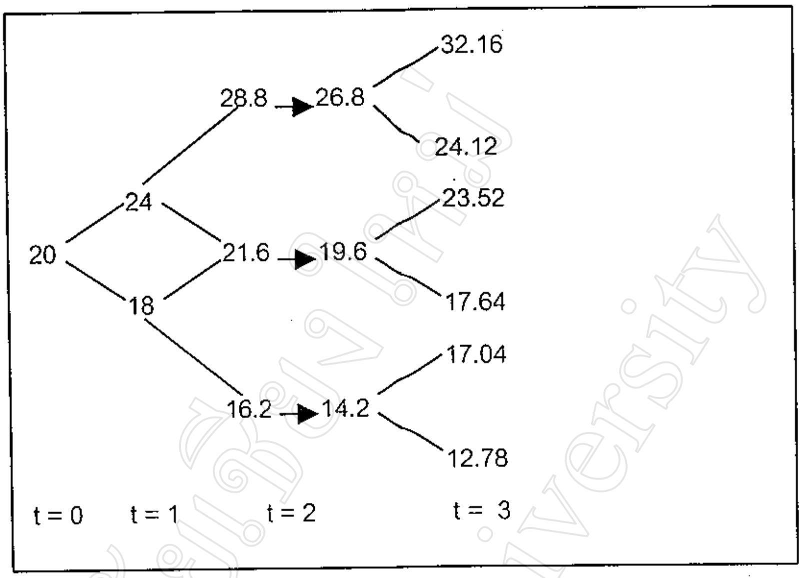
โดยทั่วไปแล้วภายหลังวันหมดสิทธิได้รับเงินปันผล ราคาหุ้นจะมีค่าลดลงเท่ากับเงินปันผลที่ได้จ่ายไป ดังนั้นในการสร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ ณ สิ้นงวดเวลาที่มีการจ่ายเงินปันผล ราคาหุ้นก็จะมีค่าลดลงเท่ากับจำนวนเงินปันผลที่ได้จ่ายไป (สมมุติให้วันที่มีการจ่ายเงินปันผลและวันหมดสิทธิได้รับเงินปันผลอยู่ในวันเดียวกัน) ซึ่งในกรณีนี้จำนวนเงินปันผลจ่ายมีค่าที่ทราบแน่นอน สำหรับงวดเวลาอื่นๆ ที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นก็ยังคงมีลักษณะเดิม

การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิในกรณีนี้ก็สามารถทำได้ โดยใช้วิธีเดียวกับการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล เพียงแต่เปลี่ยนแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นให้ปรับค่าด้วยเงินปันผลจ่าย ดังแสดงรายละเอียดการคำนวณทางตัวเลขตามตัวอย่างที่ 4.12

<u>ตัวอย่างที่ 4.12</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ European Call Options ของหุ้นที่มีระยะเวลาการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ 3 งวดเวลา และมีการจ่ายเงินปันผล ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 จำนวน 2 บาทต่อหุ้น โดยมีรายละเอียดอื่นๆ ตามตัวอย่างที่ 4.11

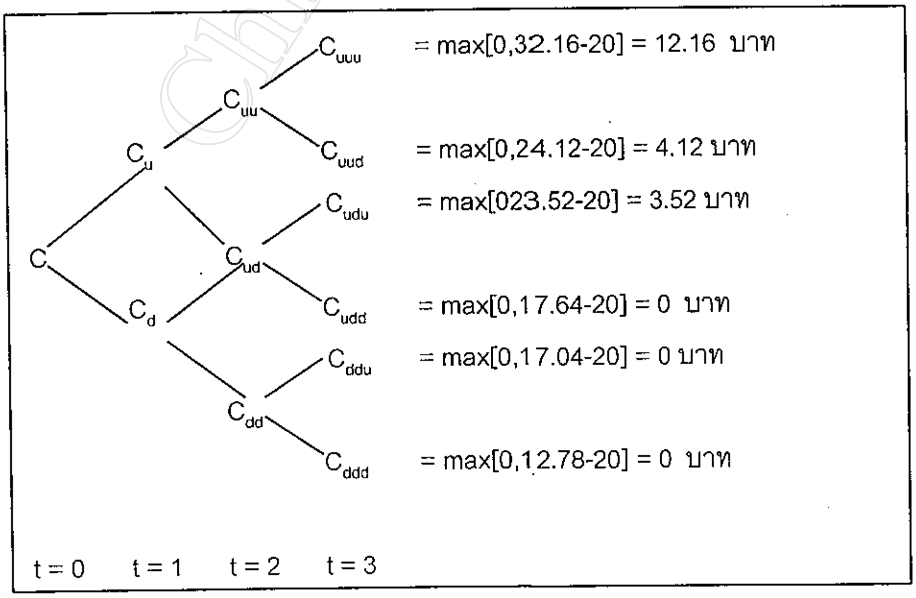
จากตัวอย่างที่ 4.11 และ 4.12 ได้กำหนด $S = 20$ บาท, $K = 20$ บาท, $n = 3$ งวดเวลา, $D = 2$ บาท ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2, $R=1.1$, $u = 1.20$ และ $d = 0.9$

สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ จำนวน 3 งวดเวลา โดยที่สิ้นงวดเวลาที่ 2 จะมีการจ่ายเงินปันผล เท่ากับ 2 บาท (ใช้สัญลักษณ์ → แสดงมูลค่าที่ลดลงเหลือ) ดังนั้นราคาของหุ้นสามัญ ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 จะมีค่าลดลงเท่ากับ 2 บาท

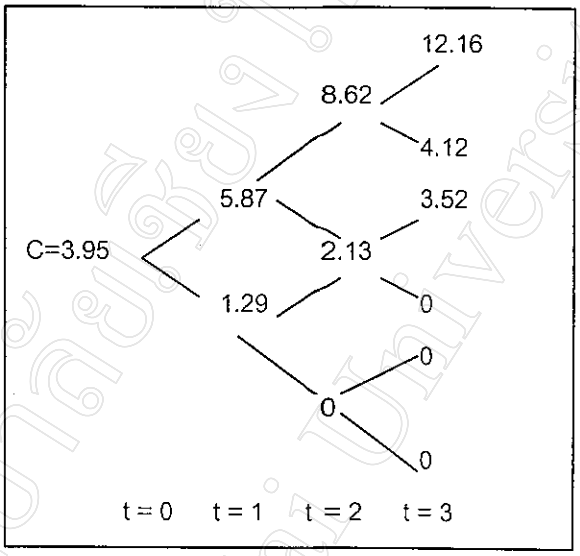


เป็นที่น่าสังเกตว่า ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 ซึ่งหุ้นมีการจ่ายเงินปันผล ราคาหุ้นที่มีค่าสูงกว่า 1 ขั้นที่ปรับตัวลดลงด้วยค่า d มีค่าไม่เท่ากันกับราคาหุ้นที่มีระดับราคาถัดลงไป 1 ขั้นที่ปรับตัวเพิ่มขึ้นด้วยค่า u สาเหตุที่เป็นเช่นนั้นเพราะว่าอัตราผลตอบแทนที่ได้รับจากเงินปันผล (Yield) มีค่าไม่เท่ากัน เช่น ถ้าราคาหุ้นมีค่าเท่ากับ 28.8 บาท หากได้รับเงินปันผล 2 บาทต่อหุ้น อัตราผลตอบแทนจากเงินปันผลมีค่า 6.94% ในขณะที่ราคาหุ้นที่มีค่า 21.6 บาท อัตราผลตอบแทนจากเงินปันผลจะมีค่า 9.26%

สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่า European Call Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลที่ทราบค่า



คำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิชนิด Call ณ แต่ละงวดเวลา โดยใช้แบบจำลอง Binomial แบบ 1 งวดเวลา ทำทีละเวลา ย้อนกลับ (Backward) จากขวาไปซ้ายจนถึงที่ node C วิธีการคำนวณหาค่าสามารถทำได้เช่นเดียวกันกับตัวอย่างที่ 4.11 จะได้แผนผังแสดงมูลค่า European Call Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลที่ทราบค่า แต่ละงวดเวลา ดังนี้



ดังนั้นมูลค่า European Call Options ของหุ้นสามัญที่มีการจ่ายเงินปันผล 2 บาท ต่อหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 จะมีมูลค่าเท่ากับ 3.95 บาท

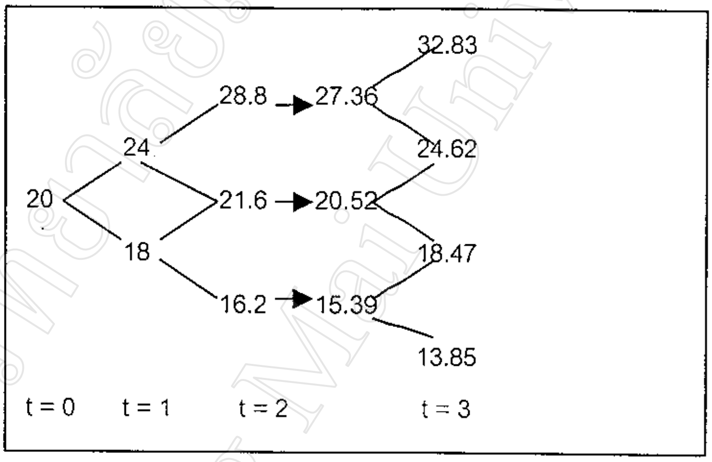
ค. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียน ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลในอัตราคงที่ (Constant Dividend Yield)

วิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิในกรณีนี้ ก็เหมือนกับการประเมินมูลค่า European Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลที่ทราบค่า เพียงแต่แตกต่างกันในส่วนของจำนวนเงินปันผลจ่าย แทนที่จะเป็นจำนวนเงินที่ทราบเป็นตัวเลขแน่นอน ก็เปลี่ยนเป็นการจ่ายเงินปันผลในอัตราคงที่แทน ดังนั้นเมื่ออัตราผลตอบแทนจากเงินปันผลจ่ายมีค่าคงที่ จะทำให้ระดับราคาหุ้นสามัญที่สูงกว่า 1 ขั้นที่ปรับตัวลดลงด้วยค่า d มีค่าเท่ากันกับราคาหุ้นที่มีระดับราคาถัดลงไป 1 ขั้นที่ปรับตัวเพิ่มขึ้นด้วยค่า u รายละเอียดการคำนวณทางตัวเลข แสดงตามตัวอย่าง 4.13

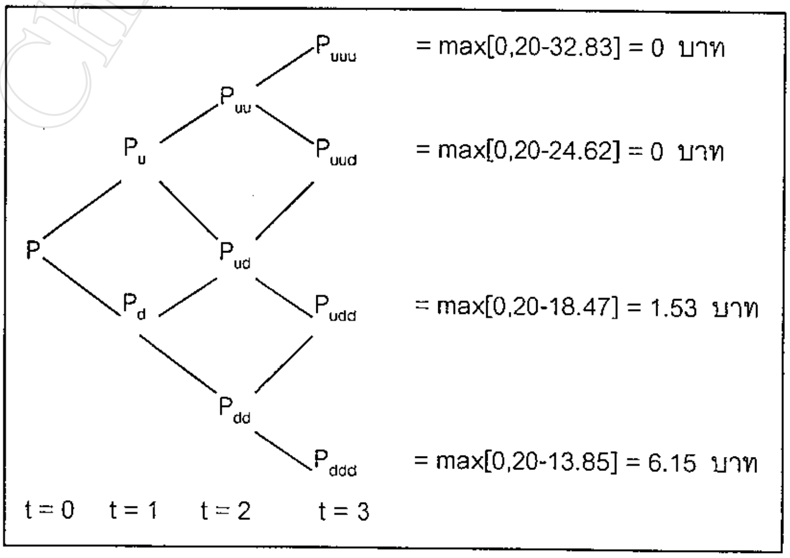
<u>ตัวอย่างที่ 4.13</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ European Put Options ของหุ้นที่มีระยะเวลาการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ 3 งวดเวลา และมีการจ่ายเงินปันผลเท่ากับร้อยละ 5 ของราคาหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 โดยมีรายละเอียดอื่นๆ ตามตัวอย่างที่ 4.11

จากตัวอย่างที่ 4.11 และ 4.13 ได้กำหนดให้ S = 20 บาท, K = 20 บาท, n = 20 งวดเวลา, D = 5% ของราคาหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2, R = 1.1,u = 1.20 และ d = 0.9

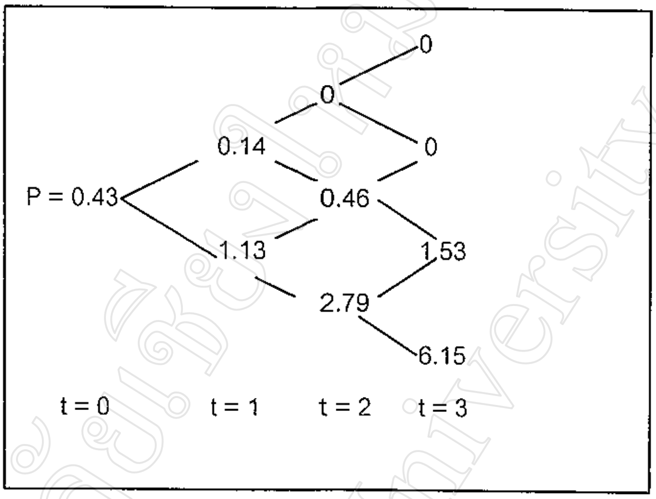
สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ จำนวน 3 งวดเวลา โดยที่สิ้นงวดเวลาที่ 2 จะมีการจ่ายเงินปันผลเป็นจำนวน 5% ของราคาหุ้น ดังนั้นราคาหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 จะมีมูลค่าคงเหลือ 95% ของราคาหุ้นเดิม



สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่า European Put Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลในอัตราคงที่



คำนวณหามูลค่า European Put Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลในอัตราคงที่ ณ แต่ละงวดเวลา จะได้แผนผังแสดงมูลค่าตราสารชนิด Put ดังนี้



ดังนั้นมูลค่า European Put Options ของหุ้นสามัญที่มีการจ่ายเงินปันผลเป็นจำนวนร้อยละ 5 ของราคาหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 จะมีมูลค่าเท่ากับ 0.43 บาท

2. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบอเมริกัน

วิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบอเมริกัน โดยใช้แบบจำลอง Black-Scholes ที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อน มีความยุ่งยากมากกว่าการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียนมาก สาเหตุที่เป็นเช่นนั้นก็เพราะว่า ตราสารสิทธิแบบอเมริกัน สามารถใช้สิทธิก่อนถึงวันครบกำหนดอายุตราสิทธิได้ (Early Exercise) ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้รูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Black-Scholes ได้ จึงต้องมีการปรับปรุงแบบจำลอง Black-Scholes ให้คำนึงถึงผลจาก Early Exercise ดังนั้น รูปแบบการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกันที่ได้ จึงมีความยุ่งยากและซับซ้อนสำหรับการคำนวณหาค่า ซึ่งตรงกันข้ามกับการใช้แบบจำลอง Binomial ในการหามูลค่าตราสารสิทธิที่มีวิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ทำได้ง่ายเช่นเดียวกับการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน เพียงแต่ทำการปรับปรุงมูลค่าตราสารสิทธิที่แต่ละ node ของแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของมูลค่าตราสารสิทธิใหม่ โดยมีรายละเอียดดังนี้

- มูลค่า American Call Options ที่แต่ละ node หาได้จาก

$$C = \max\left[\frac{pC_u + (1-p)C_d}{R}, \max(0, S-K)\right] \qquad (4.76)$$

- มูลค่า American Put Options ที่แต่ละ node หาได้จาก

$$P = \max\left[\max(0, K-S), \frac{pP_u + (1-p)p_d}{R}\right] \qquad (4.77)$$

จากสมการที่ (4.76) และ (4.77) จะพบได้ว่ามูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ทั้งชนิด Call และ Put ที่แต่ละ node นั้นเกิดจากการเปรียบเทียบค่าทางตัวเลขของมูลค่า 2 ส่วน คือ

(1) Holding Value คือ มูลค่าตราสารสิทธิที่ยังคงถือไว้อยู่ ณ เวลานั้น โดยที่ยังไม่มีการใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิ ซึ่งก็คือพจน์ $\frac{pC_u + (1-p)C_d}{R}$ สำหรับตราสารสิทธิ ชนิด Call และพจน์ $\frac{pP_u + (1-p)P_d}{R}$ สำหรับตราสารสิทธิชนิด Put ซึ่งมูลค่านี้ก็คือมูลค่าตราสารสิทธิ แบบยูโรเปียน ณ ตำแหน่งที่หาค่านั่นเอง

(2) Intrinsic Value คือ มูลค่าตราสารสิทธิที่แท้จริงอันเกิดจากการใช้สิทธิในทันที (ใช้สิทธิ Early Exercise) ซึ่งสามารถหาค่าได้จากความแตกต่างระหว่างราคาหุ้นกับราคาใช้สิทธิหรือเท่ากับ “0" ขึ้นอยู่กับว่ามูลค่าใดมีค่ามากกว่ากัน ซึ่งก็คือพจน์ max [0,S-K] สำหรับตราสารสิทธิชนิด Call และพจน์ max [0,K-S] สำหรับตราสารสิทธิ ชนิด Put

ดังนั้นในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบอเมริกัน จึงสามารถใช้วิธี Recursive Approach ของแบบจำลอง Binomial เช่นเดียวกับการประมูลค่าตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน เพื่อทำการหามูลค่าตราสารสิทธิทีละงวดเวลาจากงวดเวลาสุดท้ายย้อนจนถึงงวดเวลาปัจจุบัน (จากขวาไปซ้าย) ซึ่งเป็นวิธีการหามูลค่า Holding Value นั่นเอง จากนั้นจึงคำนวณหามูลค่าตราสารสิทธิแต่ละ node ที่หาได้จากค่ามากสุดระหว่าง Holding Value กับ Intrinsic Value

เป็นที่น่าสังเกตว่ามูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกันจะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับตราสารสิทธิแบบยูโรเปียนเสมอ โดยค่าความแตกต่างของมูลค่าทั้งสองนี้จะถูกเรียกว่าค่าธรรมเนียมสำหรับการใช้สิทธิของตราสารสิทธิได้ก่อนถึงวันครบกำหนดอายุ (Early Exercise Premium) หากค่าธรรมเนียมนี้มีค่าเท่ากับ 0 แสดงว่ามูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกันมีค่าเท่ากับตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน เพื่อทำความเข้าใจวิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ แบบอเมริกันทางตัวเลข จะแบ่งเนื้อหาออกเป็น 4 ส่วน ดังนี้

ก. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ชนิดCall (American Call Option) ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล

เป็นเพราะว่าหุ้นที่ไม่มีการจ่ายเงินปันผล จะทำให้ Call Options ไม่ถูกใช้สิทธิก่อนกำหนดเลย (ไม่มีโอกาสใช้สิทธิ Early Exercise) ดังนั้นมูลค่า American Call Options ชนิดที่ไม่มีการจ่ายเงินปันผลจะมีค่าเท่ากับมูลค่า European Call Options เสมอ ดังรายละเอียดการคำนวณตามตัวอย่างที่ 4.14

<u>ตัวอย่างที่ 4.14</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ American Call Options ของหุ้นที่มีระยะเวลาการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ 3 งวดเวลา โดยที่หุ้นนี้ไม่มีการจ่ายเงินปันผลตลอดอายุของตราสารสิทธิ และมีรายละเอียดอื่นๆ ตามตัวอย่างที่ 4.11

จากตัวอย่างที่ 4.11 และ 4.14 ได้กำหนดให้ $S = 20$ บาท, $K = 20$ บาท, $n = 3$ งวดเวลา, $D = 0$ บาท, $R = 1.1$, $u = 1.20$ และ $d = 0.9$

สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญจำนวน 3 งวดเวลา ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ดังแสดงตามตัวอย่างที่ 4.11

คำนวณหามูลค่า American Call Options ณ แต่ละงวดเวลา

<u>ณ เวลา t = 3</u> เป็นเวลาที่ตราสารสิทธิหมดอายุ ดังนั้นมูลค่าตราสารสิทธิที่แต่ละ node จะมีค่า Holding Value เท่ากับ Intrinsic Value ดังนั้นจะได้ $C_{uuu} = 14.56$ บาท, $C_{uud} = 5.92$, $C_{udd} = 0$ บาท และ $C_{ddd} = 0$ บาท

<u>ณ เวลา t = 2</u> มูลค่าตราสารสิทธิ ณ เวลาก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ จะหาได้จากการเปรียบเทียบค่าระหว่าง Holding Value และ Intrinsic Value ซึ่งเขียนโดยใช้สัญลักษณ์ [Holding Value, Intrinsic Value] หากค่าใดมีค่ามากกว่ากันก็จะถือเป็นมูลค่า American Call Options ที่ node นั้น (สังเกตได้จากตัวเลขที่ขีดเส้นใต้)

$$
\begin{aligned}
C_{uu} &= \max\left[\frac{pC_{uuu} + (1-p)C_{uud}}{R}, \max[0, S-K]\right] \\
&= \max\left[10.62, \max[0, (28.8-20)\right] \\
&= \max[\underline{10.62}, 8.8] \\
&= 10.62 \text{บาท}
\end{aligned}
$$

เช่นเดียวกัน จะได้

$C_{ud} =$ max [$\underline{3.59}$, 1.6] = 3.59 บาท

$C_{dd} =$ max [0, 0] = 0 บาท

<u>ณ เวลา t = 1</u>

$C_u =$ max [$\underline{7.52}$, 4] = 7.52 บาท

$C_d =$ max [$\underline{2.18}$, 0] = 2.18 บาท

<u>ณ เวลา t = 0</u>

$C =$ max [$\underline{5.22}$, 4] = 5.22 บาท

จากตัวอย่างที่ 4.14 จะพบว่ามูลค่าตราสารสิทธิแต่ละ Node ก่อนถึงเวลาสิ้นสิทธิ (t = 0 ถึง t = 2) นั้นเกิดจากมูลค่าในส่วนของ Holding Valueทั้งสิ้น ไม่มีมูลค่า Intrinsic Value ณ ตำแหน่งใดเลยที่มีค่ามากกว่า Holding Value ดังนั้นมูลค่า American Call Options ของหุ้นที่ไม่มีการจ่ายเงินปันผลตามตัวอย่างนี้จะไม่มีการ Early Exercise จึงทำให้มีมูลค่าเท่ากับ European Call Options ซึ่งเท่ากับ 5.22 บาท ดังแสดงตามตัวอย่างที่ 4.11

ข. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ชนิด Call (American Call Options) ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล

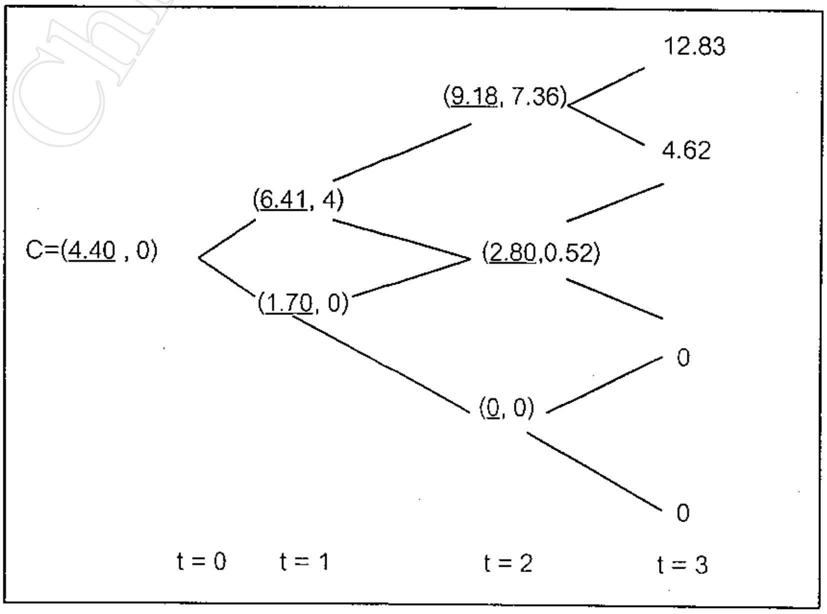
โดยทั่วไปแล้วการใช้สิทธิของ American Call Options อาจมีการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ (Early Exercise) ของตราสารสิทธิได้ โดยจะสมเหตุสมผลเมื่อเป็นการใช้สิทธิก่อนที่จะถึงเวลาสิ้นสิทธิในเงินปันผลครั้งสุดท้าย แต่อาจจะไม่มีการใช้ Early Exercise ได้ หากว่ามูลค่า Holding Value มีค่ามากกว่า Intrinsic Value เสมอ ดังรายละเอียดการคำนวณทางตัวเลข ตามตัวอย่าง 4.15

<u>ตัวอย่างที่ 4.15</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ American Call Options ของหุ้นที่มีระยะเวลาการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ 3 งวดเวลา โดยหุ้นนี้มีรายการจ่ายเงินปันผลเท่ากับร้อยละ 5 ของราคาหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 และมีรายละเอียดอื่นๆ ตามตัวอย่างที่ 4.11

จากตัวอย่างที่ 4.11 และ 4.15 ได้กำหนดให้ S = 20 บาท, K = 20 บาท, n = 3 งวดเวลา, D = 5% ของราคาหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 , R = 1.1 , u = 1.20 และ d = 0.9

สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ จำนวน 3 งวดเวลา ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลในอัตราร้อยละ 5 ของราคาหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 ดังแสดงตามตัวอย่างที่ 4.13

คำนวณหามูลค่า American Call Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล ณ แต่ละงวดเวลา จะได้แผนผังแสดงรูปดังนี้



จากตัวอย่าง 4.15 จะได้มูลค่า American Call Options ของหุ้นที่มีการจ่ายเงินปันผลในอัตราร้อยละ 5% ของราคาหุ้น ณ งวดเวลาที่ 2 เท่ากับ 4.40 บาท ซึ่งจะพบว่ามีมูลค่าเท่ากับ European Call Options ที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลในอัตราเดียวกัน เนื่องจากมูลค่าของ American Call Options นี้เกิดจากมูลค่าในส่วน Holding Value เพียงอย่างเดียว จึงทำให้ไม่มีการใช้สิทธิก่อนถึงวันครบกำหนดอายุตราสารสิทธิ

ค. การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิแบบอเมริกัน ชนิด Put (American Call Option) ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล

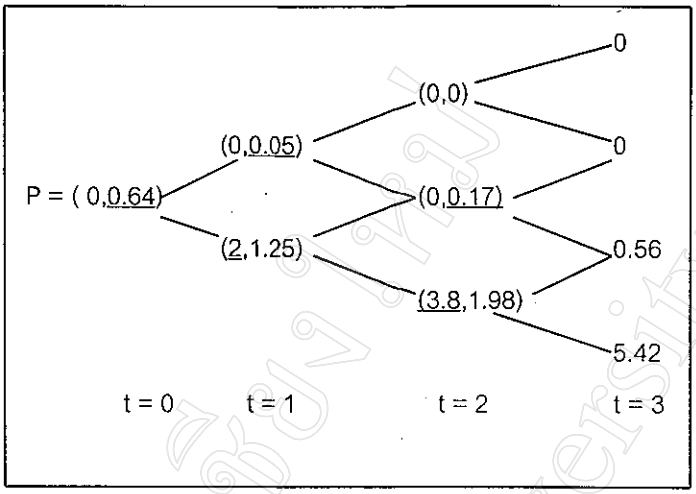
เนื่องจาก American Put Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล นั้นสามารถใช้สิทธิก่อนถึงวันหมดอายุได้ตลอดเวลา จึงทำให้ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปของแบบจำลอง Binomial ได้ง่าย จึงต้องใช้วิธี Recursive Approach เพื่อคำนวณหาค่า Holding Value จากนั้นนำไปเปรียบเทียบกับ Intrinsic Value หากค่าใดมีค่ามากกว่ากันก็จะเป็นมูลค่า American Put Options ณ node นั้น ซึ่งจะพบได้ว่า มีวิธีการประเมินมูลค่าเหมือนกับ American Call Options ดังแสดงรายละเอียดการคำนวณตามตัวอย่างที่ 4.15

<u>ตัวอย่างที่ 4.15</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ American Call Options ของหุ้นที่มีระยะเวลาการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ 3 งวดเวลา โดยที่หุ้นนี้ไม่มีการจ่ายเงินปันผลตลอดอายุของตราสาร-สิทธิ และมีรายละเอียดอื่นๆ ตามตัวอย่างที่ 4.11

จากตัวอย่างที่ 4.11 และ 4.15 ได้กำหนดให้ S = 20 บาท, K = 20 บาท, n = 5 งวดเวลา, D = 0 บาท, R = 1.1, u = 1.20 และ d = 0.9

สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ จำนวน 3 งวดเวลา ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ดังแสดงตามตัวอย่างที่ 4.11

คำนวณมูลค่า American put Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ณ แต่ละงวดเวลา โดยเขียนสัญลักษณ์ [,] แทนด้วยมูลค่า Intrinsic Value และ Holding Value ตามลำดับ (ตรงกันข้ามกับการเขียนสัญลักษณ์ในการประเมินมูลค่า American Call Options) จะได้แผนผังแสดง ดังรูป



จากตัวอย่างที่ 4.15 จะได้มูลค่า American Put Options ของหุ้นที่ไม่มีการจ่ายเงินปันผลเท่ากับ 0.64 บาท และมีค่าธรรมเนียมสำหรับการใช้สิทธิ Early Exercise เท่ากับ 0.40 บาท/หุ้น (มูลค่า European Put Options ของหุ้นที่ไม่มีการจ่ายเงินปันผลเท่ากับ 0.24 บาท ดังแสดงรายละเอียดตามตัวอย่างที่ 4.11)

ง. **การประเมินมูลค่าสารสิทธิแบบอเมริกัน ชนิด** Put (American Put Options) **ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล**

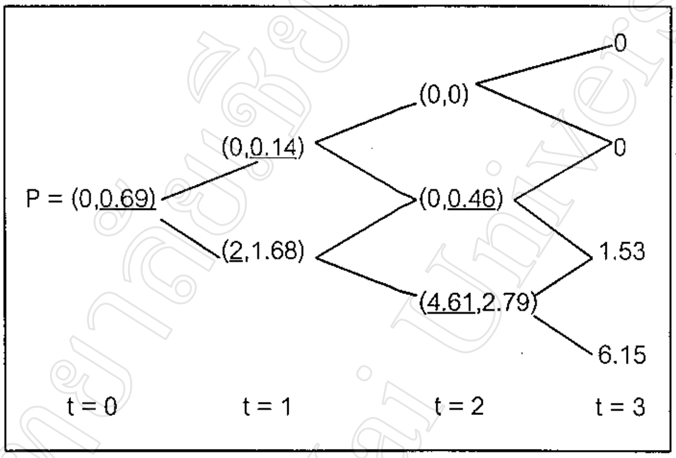
โดยปกติแล้ว American Put Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล สามารถใช้สิทธิก่อนวันหมดอายุของตราสารสิทธิได้ตลอดเวลา โดยเฉพาะช่วงหลังวันหมดสิทธิในเงินปันผลเล็กน้อย แต่ก็ไม่เสมอไปอาจเกิดขึ้นก่อนหน้าหรือหลังเวลาที่ระบุดังกล่าวได้ ในการประเมินมูลค่าโดยใช้แบบจำลอง Binomial ก็สามารถทำได้ โดยใช้วิธีแบบเดียวกับการคำนวณหาค่า American Put Options ชนิดที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ดังแสดงรายละเอียดการคำนวณ ตามตัวอย่างที่ 4.16

<u>ตัวอย่าง 4.16</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ American Put Options ของหุ้นที่มีระยะเวลาการใช้สิทธิก่อนถึงวันสิ้นสิทธิ 3 งวดเวลา โดยที่หุ้นนี้มีการจ่ายเงินปันผลเท่ากับร้อยละ 5 ของราคาหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 โดยมีรายละเอียดอื่นๆ ตามตัวอย่างที่ 4.11

จากตัวอย่างที่ 4.11 และ 4.16 ได้กำหนดให้ S = 20 บาท, K = 20 บาท, n = 3 งวดเวลา, D = 5 % ของราคาหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 ,R = 1.1, u = 1.20 และ d = 0.9

สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามัญ จำนวน 3 งวดเวลา ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผลในอัตราร้อยละ 5 ของราคาหุ้น ณ สิ้นงวดเวลาที่ 2 ดังแสดงตามตัวอย่างที่ 4.13

คำนวณหามูลค่า American Put Options ชนิดที่หุ้นมีการจ่ายเงินปันผล ณ แต่ละงวดเวลา จะได้แผนผังแสดงรูปดังนี้



จากตัวอย่างที่ 4.16 จะได้มูลค่า American Put Options ของหุ้นที่มีการจ่ายเงินปันผลในอัตราร้อยละ 5 % ของราคาหุ้น ณ งวดเวลาที่ 2 เท่ากับ 0.69 บาท และเนื่องจากตราสารสิทธินี้ ณ เวลา t = 1 หรือ t = 2 บาง Node จะมีมูลค่าของ Intrinsic Value มากกว่า Holding Value จึงทำให้อาจมีการใช้สิทธิของตราสารสิทธิก่อนครบกำหนดอายุได้ โดยสามารถคำนวณหาค่า Early Exercise Premium ได้เท่ากับ 0.26 บาท (มูลค่า European Put Options ของหุ้นที่มีการจ่ายเงินปันผลในอัตราร้อยละ 5 ของราคาหุ้น เท่ากับ 0.43 บาท ดังแสดงรายละเอียดตามตัวอย่างที่ 4.13)

4.2.3 การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ (Currency Options)

แบบจำลอง Binomial โดยใช้วิธี Recursive Approach สามารถใช้ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ ได้ทั้งแบบยูโรเปียน และแบบอเมริกัน โดยวิธีการคำนวณก็ทำได้เช่นเดียวกับการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากราคาหุ้นสามัญ เพียงแต่มีการปรับค่าตัวแปรให้สอดคล้องกับสินทรัพย์อ้างอิงที่เป็นอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ กล่าวคือ

S = มูลค่าปัจจุบันของอัตราแลกเปลี่ยนในประเทศ ต่อหนึ่งหน่วยของอัตราแลกเปลี่ยนต่างประเทศ (Spot Price of FX)

K = ราคาใช้สิทธิของอัตราแลกเปลี่ยน

r = อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงในประเทศของแต่ละงวดเวลา ซึ่งจะใช้เป็นอัตราลดค่า สำหรับการหาค่าตราสารสิทธิ ที่แต่ละ Node

r_f = อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงในต่างประเทศ ของแต่ละงวดเวลา

$$p = \frac{R^{/} - d}{u - d}$$

$$R = 1 + i$$

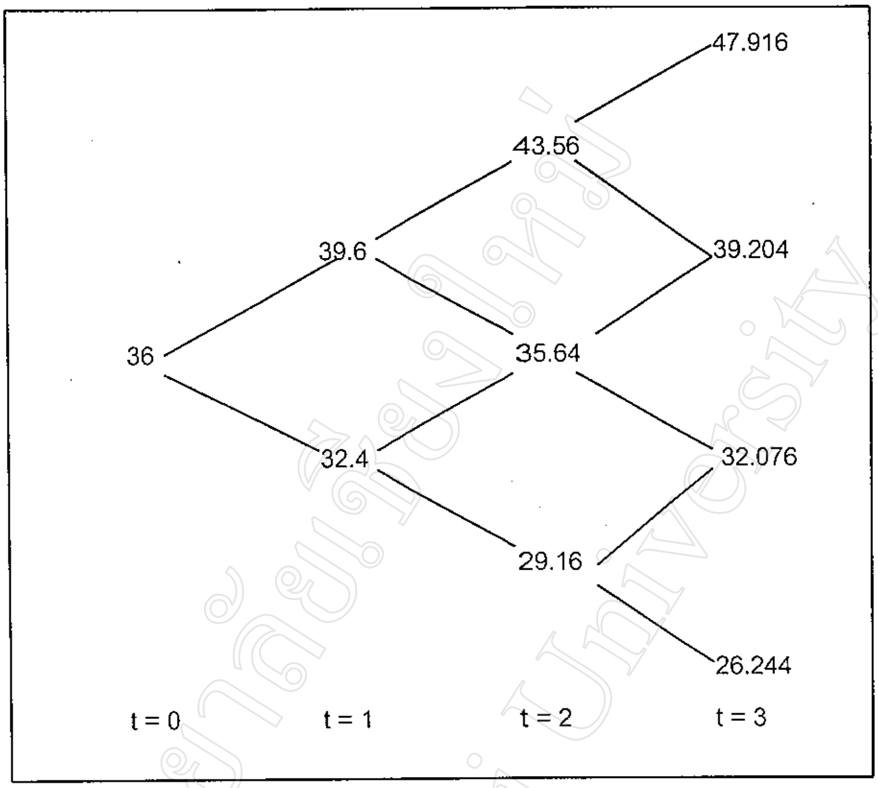
$$R^{/} = 1 + (i - i_f)$$

ในการแสดงวิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศ จะขออธิบายโดยการยกตัวอย่างการคำนวณตาม ตัวอย่างที่ 4.17 สำหรับตราสารสิทธิแบบยูโรเปียน และตัวอย่างที่ 4.18 สำหรับตราสารสิทธิแบบอเมริกัน

ตัวอย่างที่ 4.17 ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ European Call Options ที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยน THB/USD ที่มีอายุ 9 เดือน โดยใช้แบบจำลอง Binomial แบบ 3 งวดเวลา ณ ปัจจุบัน อัตราแลกเปลี่ยนของสกุลเงิน THB/USD เท่ากับ 36 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ ตราสารสิทธิมีราคาใช้สิทธิที่ 38 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ กำหนดให้อัตราแลกเปลี่ยน THB/USD มีการปรับตัวสูงขึ้น 10% หรือลดลง 10% ต่องวดเวลา อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงในประเทศเท่ากับ 8% ต่อปี และอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงในต่างประเทศ เท่ากับ 6% ต่อปี

จากตัวอย่างที่ 4.17 กำหนดให้ S = 36 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ, K = 38 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ, n = 3 งวดเวลา ๆ ละ 3 เดือน, i = 8 % ต่อปี หรือ 2 % ต่อ 3 เดือน, i_f = 6 % ต่อปี หรือ 1.5 % ต่อ 3 เดือน, u = 1.1 และ d = 0.9

สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของอัตราแลกเปลี่ยน บาท/ดอลลาร์สหรัฐ จำนวน 3 งวดเวลา



คำนวณหาค่าตัวแปรต่างๆ ดังนี้

$$R = 1 + i = 1.02 \qquad \text{(1งวดเวลา)}$$

$$R' = 1 + (i - i_f) = 1 + (0.02 - 0.015) = 1.005 \qquad \text{(1งวดเวลา)}$$

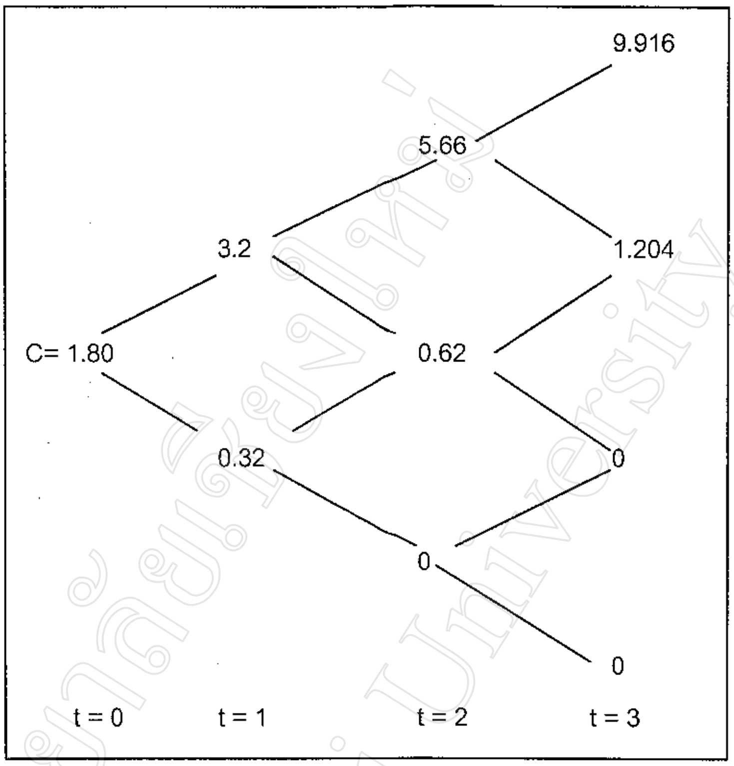
$$p = \frac{R' - d}{u - d} = \frac{1.005 - 09}{1.1 - 09} = 0.525$$

$$1 - p = 0.475$$

$$C_{uuu} = \max[0, S - k] = 9.916 \ \text{บาท}, \ C_{uud} = 1.204 \ \text{บาท}$$

$$C_{udd} = 0 \ \text{บาท}, \ C_{ddd} = 0 \ \text{บาท}$$

คำนวณหามูลค่า European Call Options ของอัตราแลกเปลี่ยน THB/USD ณ แต่ละช่วงเวลา โดยใช้แบบจำลอง Binomial แบบ 1 งวดเวลา ย้อนกลับ (Backward) โดยใช้อัตราลดค่าเป็น R ทำทีละงวดเวลาจนถึงเวลา t = 0 จะได้แผนผังแสดงรูป ดังนี้



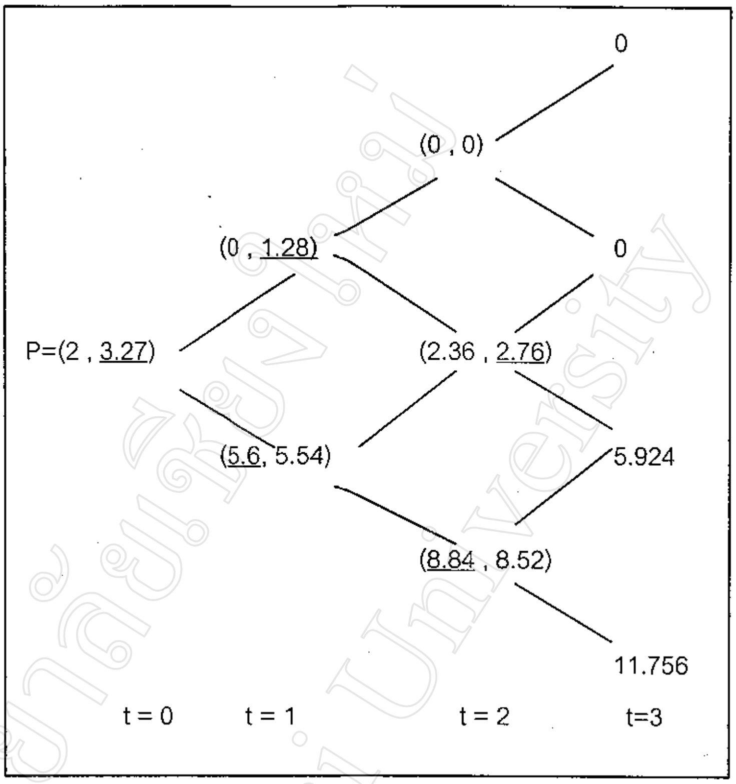
จากตัวอย่างที่ 4.17 จะได้มูลค่า European Call Options ที่อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยน THB/USD เท่ากับ 1.80 บาท

<u>ตัวอย่างที่ 4.18</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ American Put Options ที่อ้างอิงจากอัตราแลก-เปลี่ยน THB/USD ที่มีอายุ 9 เดือน โดยใช้แบบจำลอง Binomial แบบ 3 งวดเวลา และมีรายละเอียดอื่น ๆ ตามตัวอย่างที่ 4.17

จากตัวอย่างที่ 4.17 และ 4.18 กำหนดให้ S = 36 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ, K = 38 บาท/ดอลลาร์สหรัฐ, n = 3 งวดเวลา, i = 2 % ต่อ 1 งวดเวลา, i_f = 1.5 % ต่อ 1 งวดเวลา, u = 1.1, d = 0.9, R = 1.02, R' = 1.005, p = 0.525 และ 1 – p = 0.475

สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของอัตราแลกเปลี่ยนบาท/ดอลลาร์สหรัฐ จำนวน 3 งวดเวลา ดังแสดงตามตัวอย่างที่ 4.17

คำนวณหามูลค่า American Put Options ของอัตราแลกเปลี่ยน THB/USD ณ แต่ละช่วงเวลา โดยเขียนสัญลักษณ์ [,] แทนด้วยมูลค่า Intrinsic Value และ Holding Value ตามลำดับ จะได้แผนผังแสดงรูปดังนี้



จากตัวอย่างที่ 4.18 จะได้มูลค่า American Put Options ของอัตราแลกเปลี่ยน THB/USD เท่ากับ 3.27 บาท ซึ่งจากแผนผังแสดงมูลค่าของตราสารสิทธินี้ จะพบว่ามูลค่าตราสารสิทธิแต่ละตำแหน่งมีทั้งที่เกิดจาก Holding Value และ Intrinsic Value จึงทำให้ European Put Options มีค่าไม่เท่ากับ American Put Options หากทำการคำนวณหาค่า European Put Options (เกิดจาก Holding Value เพียงอย่างเดียว) จะได้ค่าเท่ากับ 3.17 บาท ดังนั้น มูลค่า Early Exercise Premium จะมีค่าเท่ากับ 0.10 บาท

4.2.4 **การประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ย (Interest Rate Options)**

ดังที่กล่าวไว้แล้วว่า วิธีการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ย จะมีวิธีการประเมินที่แตกต่างไปจากตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากราคาหุ้นสามัญและอัตราแลกเปลี่ยนของเงินตราต่างประเทศมากทีเดียว เนื่องจากการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิ โดยใช้แบบจำลอง Black–Scholes และแบบจำลอง Binomial ไม่ค่อยเหมาะสมเท่าที่ควร นั่นเป็นเพราะ

- ความผันผวนของสินทรัพย์อ้างอิงประเภทอัตราดอกเบี้ย ไม่สามารถตั้งข้อสมมุติฐานให้มีค่าคงที่ได้ เช่นความผันผวนของอัตราผลตอบแทนในพันธบัตรจะมีค่าลดลงเรื่อยๆ หากพันธบัตรใกล้ถึงวันครบกำหนดไถ่ถอน เนื่องจากมูลค่าพันธบัตรจะมีค่าไม่แตกต่างไปจากมูลค่าครบกำหนดไถ่ถอน (Redemption Value) มากนัก
- อัตราดอกเบี้ยมีค่าไม่คงที่ เช่นในกรณีของพันธบัตร อัตราดอกเบี้ยจะหมายถึง Yield to Maturity หากพันธบัตรมีระยะเวลาครบกำหนดไถ่ถอนนานขึ้น Yield to Maturity ก็จะมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย

ดังนั้นหากต้องการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ยโดยใช้แบบจำลอง Binomial จะต้องมีการปรับปรุงในส่วนของลักษณะการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยให้ถูกต้อง โดยใช้แนวความคิด Arbitrage–Free, One–Period Interest Rate Tree ซึ่งในที่นี้จะไม่กล่าวถึงรายละเอียดของทฤษฎี แต่จะใช้การประยุกต์ของทฤษฎีนี้ในการประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากอัตราดอกเบี้ย โดยการยกตัวอย่างทางตัวเลขใน 2 รูปแบบ คือ

1. การประเมินมูลค่าของตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตร
2. การประเมินมูลค่าของ Caps และ Floor

1. การประเมินมูลค่าของตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตร

Black, Derman และ Toy (1990)[29] เป็นผู้ร่วมกันปรับปรุงแบบจำลอง Binomial ให้สามารถประเมินมูลค่าตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตรได้ ซึ่งรายละเอียดการคำนวณแสดงตามตัวอย่างที่ 4.19

<u>ตัวอย่างที่ 4.19</u> ผู้ลงทุนกำลังวิเคราะห์ตราสารสิทธิที่อ้างอิงจากพันธบัตร แบบทบต้น (Zero–Coupon Bond) แบบอเมริกัน ชนิดที่ให้สิทธิในการซื้อ (Call) พันธบัตรที่มีระยะเวลาครบกำหนดไถ่ถอนในอีก 3 ปี ข้างหน้า โดยที่ตราสารสิทธิมีระยะเวลาการใช้สิทธิ 2 ปี และมีราคาใช้สิทธิที่ 88 บาท (พันธบัตรมีราคาหน้าตั๋วเท่ากับ 100 บาท) กำหนดให้ความน่าจะเป็นที่ราคา

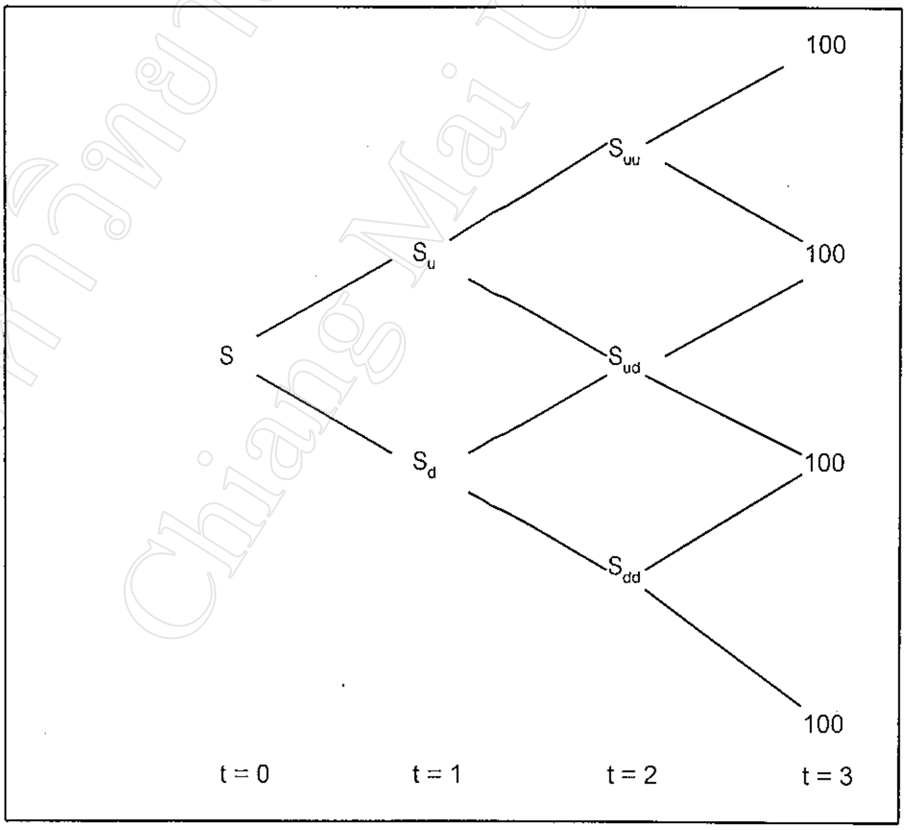
---

[29] Black, F., E. Derman, and W. Toy,"A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, (1990) : 33-39.

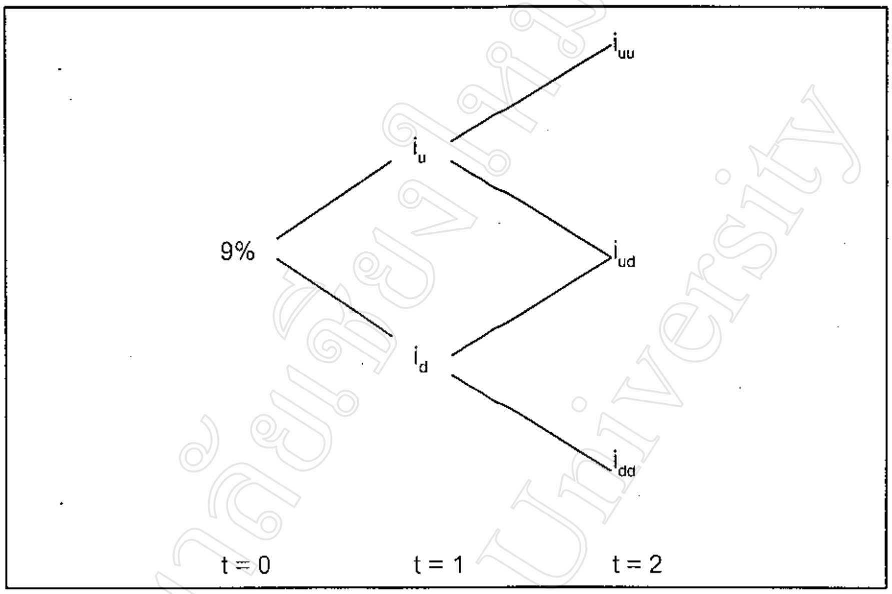
พันธบัตรมีค่าสูงขึ้นและลดลงมีค่าเท่ากัน, โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยแบบทบต้น และความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย ณ แต่ละงวดเวลา (1 งวดเวลามีค่าเท่ากับ 1 ปี) แสดงตามข้อมูลข้างล่างนี้

ระยะเวลาครบกำหนดไถ่ถอน (ปี)	อัตราดอกเบี้ย (%)	ประมาณการความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย
1	9 %	24 %
2	9.5 %	22 %
3	10 %	20 %

สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาพันธบัตรแบบทบต้น 3 งวดเวลา



สร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยในพันธบัตร

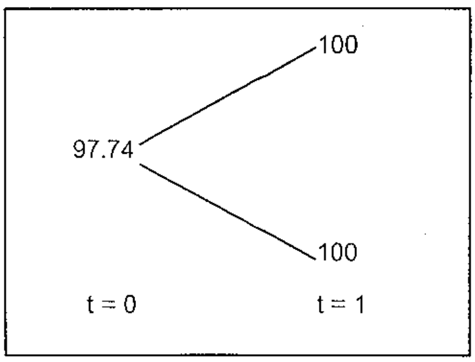


เพื่อที่จะคำนวณหามูลค่าของพันธบัตรได้ จะต้องทราบค่าของอัตราดอกเบี้ย ณ แต่ละ Node จนครบทุก Node ก่อน โดยมีขั้นตอนการคำนวณหาค่าดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : คำนวณหามูลค่าของพันธบัตรแบบทบต้น ณ ปัจจุบัน ที่มีระยะเวลาการครบกำหนดไถ่ถอนในอีก 1 ปี ข้างหน้า (ใช้อัตราดอกเบี้ย 1 ปี คือ 9 % เป็นอัตราลดค่า) จะได้

$$S = \frac{(100)(0.5) + (100)(0.5)}{(1 + 0.09)} = 91.74 \text{ บาท}$$

ดังนั้น สามารถสร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาพันธบัตรแบบ 1 งวดเวลา ดังนี้

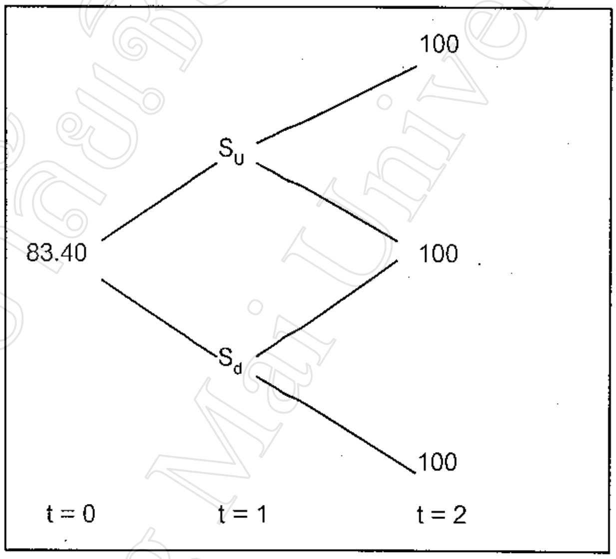


<u>ขั้นตอนที่ 2</u> : คำนวณหามูลค่าของพันธบัตรแบบทบต้น ณ ปัจจุบัน ที่มีระยะเวลาการครบกำหนดไถ่ถอนในอีก 2 ปีข้างหน้า (อัตราดอกเบี้ย 2 ปี คือ 9.5 %) จะได้

$$S = \frac{(100)(0.5) + (100)(0.5)}{(1 + 0.95)^2} = \frac{100}{(1 + 0.095)^2}$$

$$= 83.40 \text{ บาท}$$

หากทำการสร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาพันธบัตร แบบ 2 งวดเวลา ดังกล่าว จะได้ตามรูป ข้างล่างนี้



จากรูปสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าพันธบัตร ณ ปัจจุบัน (t = 0) และมูลค่าพันธบัตร ณ เวลา (t = 1) ได้ โดยใช้แบบจำลอง Binomial แบบ 1 งวดเวลา (อัตราดอกเบี้ย = 9%) จะได้

$$83.40 = \frac{0.5S_u + 0.5S_d}{(1 + 0.09)}$$ <1>

โดยที่ $S_u = \dfrac{100}{(1+i_u)}, S_d = \dfrac{100}{(1+i_d)}$ นำไปแทนค่าในสมการที่(1)จะได้

$$\frac{100}{1+(0.095)^2} = \frac{(0.5)\left(\dfrac{100}{1+i_u}\right) + (0.5)\left(\dfrac{100}{1+i_d}\right)}{(1+0.09)}$$

$$\frac{1}{(1+0.095)} = \frac{1}{1.09}\left[(0.5)\left(\frac{1}{1+i_u}\right) + (0.5)\left(\frac{1}{1+i_d}\right)\right]$$ <2>

จากสมการที่ 2 พบว่ามีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 2 ตัว คือ i_u และ i_d ดังนั้นหากต้องการคำนวณหาค่าตัวแปรทั้งสอง จะต้องหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง i_u กับ i_d เพิ่มเติมอีก 1 สมการ ซึ่งจะหาได้จากการใช้ค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในพันธบัตรที่มีระยะเวลาครบกำหนดไถ่ถอนเท่ากับ 2 ปี ที่สรุปไว้ว่า

$$\sigma_2 = \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}\,\ell n\left(\frac{i_n}{i_d}\right)$$

Δt = ระยะเวลาห่างแต่ละงวดเวลา

ตัวอย่างที่ 4.19 กำหนดให้ Δt = 1 ปี, σ = 22 % แทนค่าเข้าไปในสมการ (4.78) จะได้

$$0.22 = 0.5\left(\frac{i_n}{i_d}\right) \qquad \text{<3>}$$

จากสมการที่ 2 และ 3 สามารถแก้สมการเพื่อคำนวณหาค่า i_u และ i_d ได้ ซึ่งจะได้

i_u = 12.11 % , i_d = 7.87 %

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> : ทำเช่นเดียวกับขั้นตอนที่ 2 เพื่อคำนวณหาค่า i_{uu}, i_{ud} และ i_{dd} ดังนั้นจะต้องใช้สมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสามเป็นจำนวน 3 สมการ โดยสมการแรก (สมการที่ 4) มีวิธีการสร้างได้เช่นเดียวกับสมการที่ 2 ซึ่งจะได้สมการแรกคือ

$$\frac{1}{(1+0.1)^3} = \frac{1}{0.9}\begin{bmatrix} 0.5\left(\frac{1}{1.1222}\left\{0.5\left[\frac{1}{1+i_{uu}}\right]+0.5\left[\frac{1}{1+i_{ud}}\right]\right\}\right) \\ 0.5\left(\frac{1}{1.0787}\left\{0.5\left[\frac{1}{1+i_{ud}}\right]+0.5\left[\frac{1}{1+i_{dd}}\right]\right\}\right) \end{bmatrix} \qquad \text{<4>}$$

สำหรับอีก 2 สมการ หาได้จากการใช้ค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในพันธบัตรที่มีระยะเวลาครบกำหนดในอีก 3 ปี ที่มีค่าเท่ากับ 20% จะได้

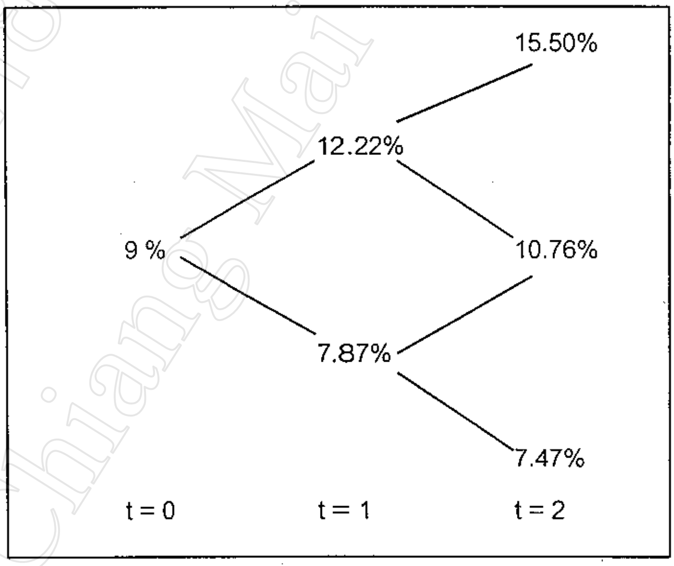
$$0.20 = 0.5\,\ell n\left(\frac{i_{uu}}{i_{ud}}\right) \qquad <5>$$

$$0.20 = 0.5\,\ell n\left(\frac{i_{ud}}{i_{uu}}\right) \qquad <6>$$

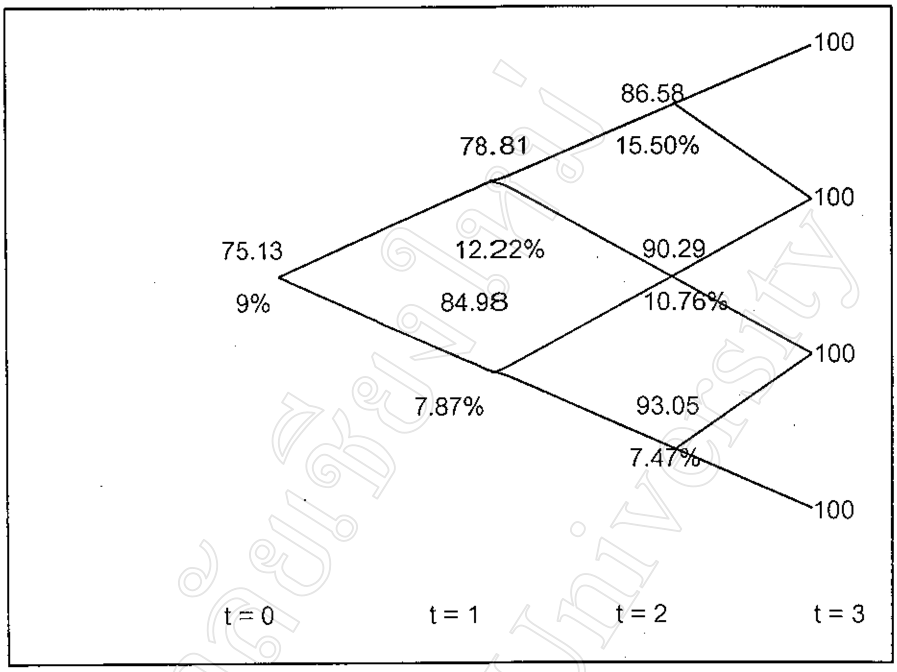
จากสมการที่ 4, 5 และ 6 สามารถแก้สมการเพื่อคำนวณหาค่า i_{uu}, i_{ud} และ i_{dd} ได้ คือ

i_{uu} = 15.50% , i_{ud} = 10.76% , i_{dd} = 7.47%

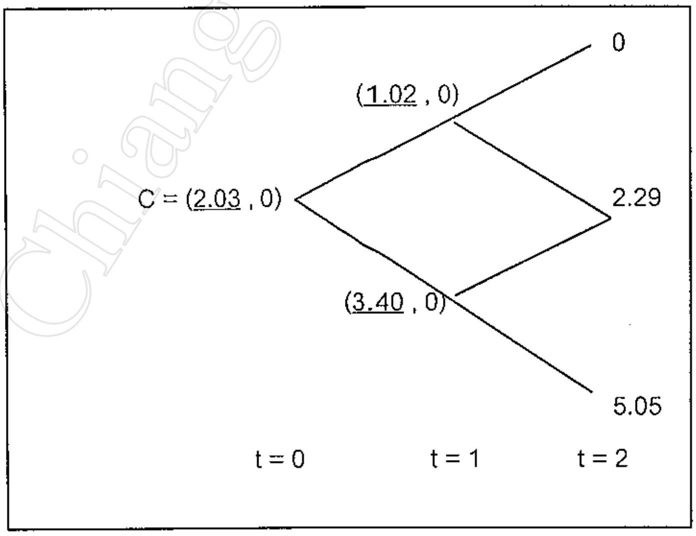
นำผลลัพธ์จากขั้นตอนที่ 1 ถึง 3 ไปสร้างแผนผังแสดงลักษณะการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยในพันธบัตร



คำนวณหามูลค่าพันธบัตรในแต่ละ Node ซึ่งหาได้จากมูลค่าคาดหวังของ 1 งวดเวลาถัดไป โดยใช้อัตราลดค่าเป็นอัตราดอกเบี้ย ณ Node นั้น โดยมีวิธีคำนวณดังแสดงตามขั้นตอนที่ 1 ดังนั้นจะได้ลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาพันธบัตรแบบทบต้น 3 งวดเวลา ดังรูปข้างล่างนี้



คำนวณหามูลค่า American Call Options ของพันธบัตรแบบทบต้นที่มีระยะเวลาการใช้สิทธิ 2 ปี ณ แต่ละช่วงเวลา โดยเขียนสัญลักษณ์ [,] แทนด้วยมูลค่า Holding Value และ Intrinsic Value ตามลำดับ จะได้แผนผังแสดงดังรูป

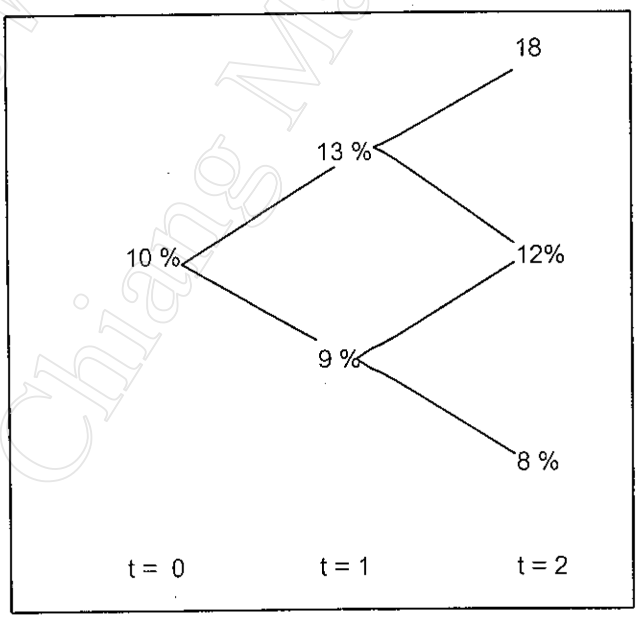


จากตัวอย่างที่ 4.19 จะได้มูลค่าของ American Call Options ของพันธบัตรแบบทบต้นที่มีอายุครบกำหนดไถ่ถอน 3 ปี และมีระยะเวลาการใช้สิทธิ 2 ปี เท่ากับ 2.03 บาท

2. การประเมินมูลค่าของ Caps และ Floors

ในการประเมินมูลค่าของ Caps โดยใช้แบบจำลอง Binomial Model สามารถคำนวณหาค่าได้จากผลรวม(อนุกรม) ของตราสารสิทธิชนิดสิทธิในการซื้อแบบยูโรเปียน (European Call Options) แต่ละงวดเวลา ในทำนองเดียวกันมูลค่าของ Floors คำนวณหาค่าได้จากผลรวม (อนุกรม) ของตราสารสิทธิชนิดสิทธิในการขายแบบยูโรเปียน (European Put Options) โดยทั่วไปมูลค่าของ Caps และ Floors นิยมกำหนดเป็น % ของจำนวนเงินในวงเงินสัญญา ซึ่งรายละเอียดการคำนวณ แสดงตามตัวอย่างที่ 4.20

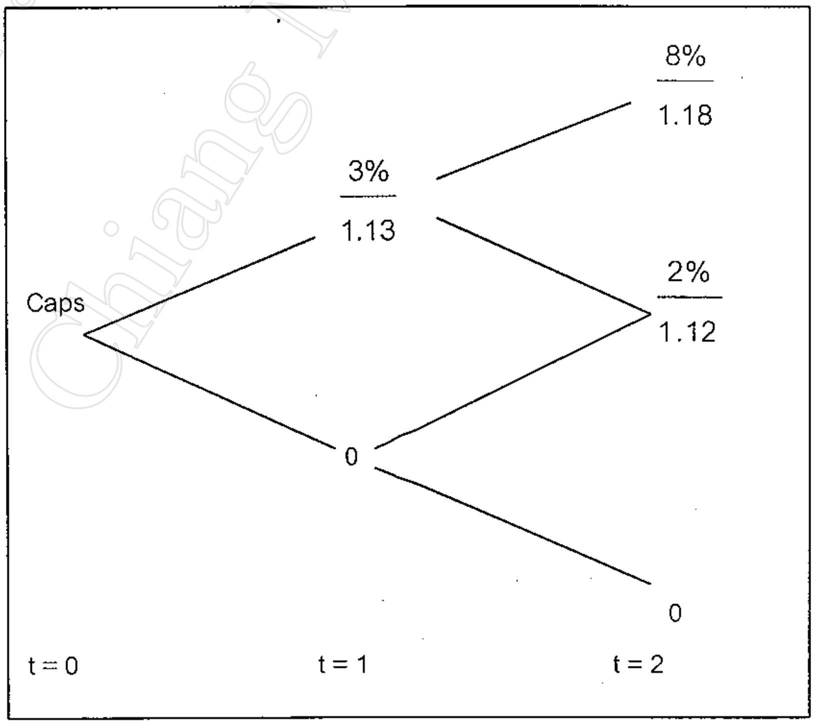
ตัวอย่างที่ 4.20 ผู้กู้ยืมซื้อ Caps แบบ 3 งวดเวลา (งวดเวลาละ 1 ปี) เพื่อใช้สำหรับป้องกันภาระจากอัตราดอกเบี้ยไม่ให้เกิน 10 % ของวงเงินสินเชื่อ 1 ล้านบาท กำหนดให้ความน่าจะเป็นที่ Caps มีค่าสูงขึ้นและลดลงเท่ากันและมีโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยอ้างอิง MLR ณ แต่ละช่วงเวลาแสดงตามรูปข้างล่างนี้



จากตัวอย่างที่ 4.20 กำหนดให้อัตราดอกเบี้ย Caps (Caps Rate = 10%) แสดงว่าหากอัตราดอกเบี้ย ณ วันครบกำหนดชำระดอกเบี้ยจ่าย ณ แต่ละช่วงเวลา มีมูลค่าสูงกว่า 10% ผู้กู้ยืมสามารถใช้สิทธิในการเลือกชำระดอกเบี้ยเท่ากับ 10% โดยสถาบันการเงินที่เป็นผู้จำหน่าย Caps จะต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ยส่วนเกินจาก 10% ให้ผู้กู้ยืม ซึ่งการจ่ายอัตราดอกเบี้ยส่วนที่เกินให้แก่ผู้ยืมนั้นจะเกิดขึ้นภายหลังจากวันครบกำหนดการใช้สิทธิ Caps ไปอีก 1 งวดเวลา

- ณ เวลา t = 0 อัตราดอกเบี้ย Caps เท่ากับ อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง MLR แสดงว่าสถาบันการเงินไม่ต้องจ่ายดอกเบี้ยให้แก่ผู้กู้ยืม ณ เวลา t = 1
- ณ เวลา t = 1 อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง MLR มี 2 ระดับ คือ 13% และ 9% ดังนั้นสถาบันการเงินต้องจ่ายดอกเบี้ยส่วนเพิ่มแทนผู้กู้ยืม เฉพาะกรณีแรก เท่ากับ 3 % (13-10) ซึ่งจะจ่ายในงวดเวลาที่ t = 2 ดังนั้นมูลค่าเมื่องวดเวลาที่ t = 1 จึงเท่ากับ 3%/1.13 ของวงเงินในสัญญา ณ เวลา t = 2
- ณ เวลา t = 2 อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง MLR มี 3 ระดับ คือ 18%, 12% และ 8% ดังนั้นสถาบันการเงินต้องจ่ายดอกเบี้ยส่วนเพิ่มแทนผู้กู้ยืม เฉพาะ 2 กรณีแรก เท่ากับ 8% (18-10) และ 2% (12-10) ซึ่งจะจ่ายในงวดเวลาที่ t = 3 ดังนั้นมูลค่าเมื่องวดเวลาที่ t = 2 จึงเท่ากับ 8%/1.18 และ 2%/1.12 ของวงเงินในสัญญา ณ เวลา t =3

จากข้อมูลดังกล่าวข้างต้นสามารถเขียนลักษณะการเคลื่อนไหวของอัตราผลตอบแทนของ Caps คือ



ดังนั้นมูลค่า Caps นี้จะประกอบด้วย European Call Options จำนวน 2 สัญญา คือ

ตราสารสิทธิที่หมดอายุ ณ เวลา t = 1 ซึ่งมีการจ่ายดอกเบี้ยส่วนเพิ่มโดยสถาบันการเงินที่ผู้ทำสัญญา Caps ด้วย ณ เวลา t = 2 และตราสารสิทธิที่หมดอายุ ณ เวลา t = 2 ซึ่งมีการจ่ายดอกเบี้ยส่วนเพิ่ม ณ เวลา t = 3 คำนวณหามูลค่า European Call Options แต่ละสัญญาโดยใช้แบบจำลอง Binomial

<u>สัญญาที่ 1</u> (t=1)

$$C_1 = \frac{1}{1.1}\left[(0.5)\left(\frac{3\%}{1.13}\right) + (0.5)(0)\right]$$

$$C_1 = 1.21\%$$

<u>สัญญาที่ 2</u> (t=2)

$$C_2 = \frac{1}{1.1}\left(\begin{array}{l} 0.5\left\{\dfrac{1}{1.13}\left[(0.5)\left(\dfrac{8\%}{1.18}\right) + (0.5)\left(\dfrac{2\%}{1.12}\right)\right]\right\} \\ +0.5\left\{\dfrac{1}{1.09}\left[(0.5)\left(\dfrac{2\%}{1.12}\right) + (0.5)(0)\right]\right\} \end{array}\right)$$

$$= 2.10\%$$

มูลค่า Caps จะมีค่าเท่ากับผลรวมของ European Call Options ทั้งสองสัญญา ซึ่งมีค่าเท่ากับ 3.31% ของวงเงินทำสัญญา ดังนั้นหากลูกหนี้ของสถาบันการเงินต้องการลดความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย MLR ให้มีค่าไม่เกิน 10% เป็นระยะเวลา 3 ปี ลูกหนี้จะต้องจ่ายค่าธรรมเนียมเท่ากับ 33,100 บาท

4.3 ความสัมพันธ์ของแบบจำลอง Black–Scholes และ แบบจำลอง Binomial

Cox, Ross และ Rubinstein[30] เป็นผู้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลอง Black–Scholes และแบบจำลอง Binomial ได้เป็นผลสำเร็จเมื่อปี คศ. 1979 โดยมีรายละเอียดสรุปได้ดังนี้

1. ความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้น (S) ปรับตัวสูงขึ้นเป็นus (ความน่าจะเป็น q) หาได้จาก

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[(\mu/\sigma)\left(\sqrt{\tau/n}\right)\right] \tag{4.78}$$

2. จำนวนเท่าที่ราคาหุ้นปรับตัวสูงขึ้น (u) หาได้จาก

$$u = e^{\sigma\sqrt{\tau/n}} \tag{4.79}$$

---

[30] Cox et al., "Option Pricing : A Simplizicd Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, (October 1979) : 229 - 263.

3. จำนวนเท่าที่ราคาหุ้นปรับตัวลดลง (d) หาได้จาก

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\tau/n}} \tag{4.80}$$

หรือ
$$d = \frac{1}{u} \tag{4.81}$$

4. ความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนของสินทรัพย์อ้างอิง (σ) กับ u และ d หาได้จาก

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\tau/n}}\ell n\left(\frac{u}{d}\right) \tag{4.82}$$

หรือ
$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}\ell n\left(\frac{u}{d}\right) \tag{4.83}$$

5. หากกำหนดให้จำนวนงวดเวลา (n) ของแบบจำลอง Binomial มีค่ามากๆ (เข้าใกล้ ∞) มูลค่าที่คำนวณได้จากแบบจำลอง Binomial จะมีค่าลู่เข้าใกล้ (Converge) กับแบบจำลอง Black–Scholes ดังนั้น

$$\begin{aligned} B[n,a,b] &\equiv N\left[\frac{\ell n(S/KR^{-\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}\right] \\ &\equiv N(d_1) \end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned} B[n,a,p] &\equiv N\left[\frac{\ell n(S/KR^{-\tau})}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}\right] \\ &\equiv N(d_2) \end{aligned} \tag{4.85}$$

นำสมการที่ (4.84) และ (4.85) แทนค่าลงในสมการที่ (4.71) จะได้สมการของ European Call Options คือ

$$C = SN(d_1) - KR^{-n}N(d_2) \tag{4.86}$$

เนื่องจาก

$$r = \ell n\,(1+i) = \ell n\;R \tag{4.87}$$

$$R = e^{r} \tag{4.88}$$

และจำนวนงวดเวลา (n) ก็เปรียบเสมือน ระยะเวลาจากปัจจุบันจนถึงวันสิ้นสิทธิ (τ)

$$n \equiv \tau \tag{4.89}$$

นำสมการที่ (4.87) , (4.88) และ (4.89) แทนค่าลงในสมการ (4.86)

$$C = S\,N(d_1) - Ke^{-r\tau}\,N\,(d_2)$$

ซึ่งจะพบว่ารูปแบบของสมการนี้ก็คือการประเมินมูลค่า European Call Options ที่หาค่าได้จากการใช้แบบจำลอง Black–Scholes นั่นเอง

เป็นที่น่าสังเกตว่าแบบจำลอง Black–Scholes ก็คือ รูปแบบจำกัดของแบบจำลอง Binomial ในกรณีที่ค่า n มีค่าเข้าใกล้อนันต์ ซึ่งในที่นี้จะขออธิบายข้อสรุปดังกล่าว โดยการยกตัวอย่างการคำนวณตามตัวอย่างที่ 4.21

<u>ตัวอย่างที่ 4.21</u> พิจารณาการ Convergent ของแบบจำลอง Binomial ที่มีจำนวนงวดเวลามากขึ้น จะมีค่าลู่เข้าสู่มูลค่าที่ได้จากการประเมินมูลค่าโดยใช้แบบจำลอง Black-Scholes โดยจะทำการยกตัวอย่างทางตัวเลขเพื่ออธิบายปรากฏการณ์นี้ สมมุติกำหนดให้ตราสารสิทธิ ทั้งชนิด Call และPut แบบยุโรเปียนของหุ้นสามัญ มีอายุการใช้สิทธิคงเหลือ 182 วัน, มีราคาใช้สิทธิเท่ากับ 55 บาท, อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงแบบต่อเนื่อง มีค่าเท่ากับร้อยละ 8 ต่อปี และความผันผวนของราคาหุ้นมีค่าเท่ากับ 30% ต่อปี ให้ทำการคำนวณหาค่ามูลค่าตราสารสิทธิ ทั้งชนิด Call และ Put ของราคาหุ้นสามัญใน 3 ลักษณะ คือ 50 บาท, 55 บาท และ 60 บาท

1. ณ ระดับราคาหุ้น เท่ากับ 50 บาท

- กรณี European Call Options

มูลค่า European Call Options ในกรณีนี้มีราคาหุ้นน้อยกว่าราคาใช้สิทธิ แสดงว่ามูลค่าตราสารสิทธิอยู่ในสภาวะ Out-Of-The-Money ซึ่งสามารถคำนวณหามูลค่าได้โดยใช้แบบจำลอง Binomial (BOPM) ที่มีการเพิ่มค่าจำนวนงวดเวลาเพิ่มขึ้นทีละ 5 งวดเวลา จนถึง 150 งวดเวลา (ยกเว้นที่จุดเริ่มต้น จะใช้ n=1 แทน n=0) เปรียบเทียบกับมูลค่าที่ได้จากแบบจำลอง Black-Scholes (BS) ดังแสดงตามตารางที่ 4.1

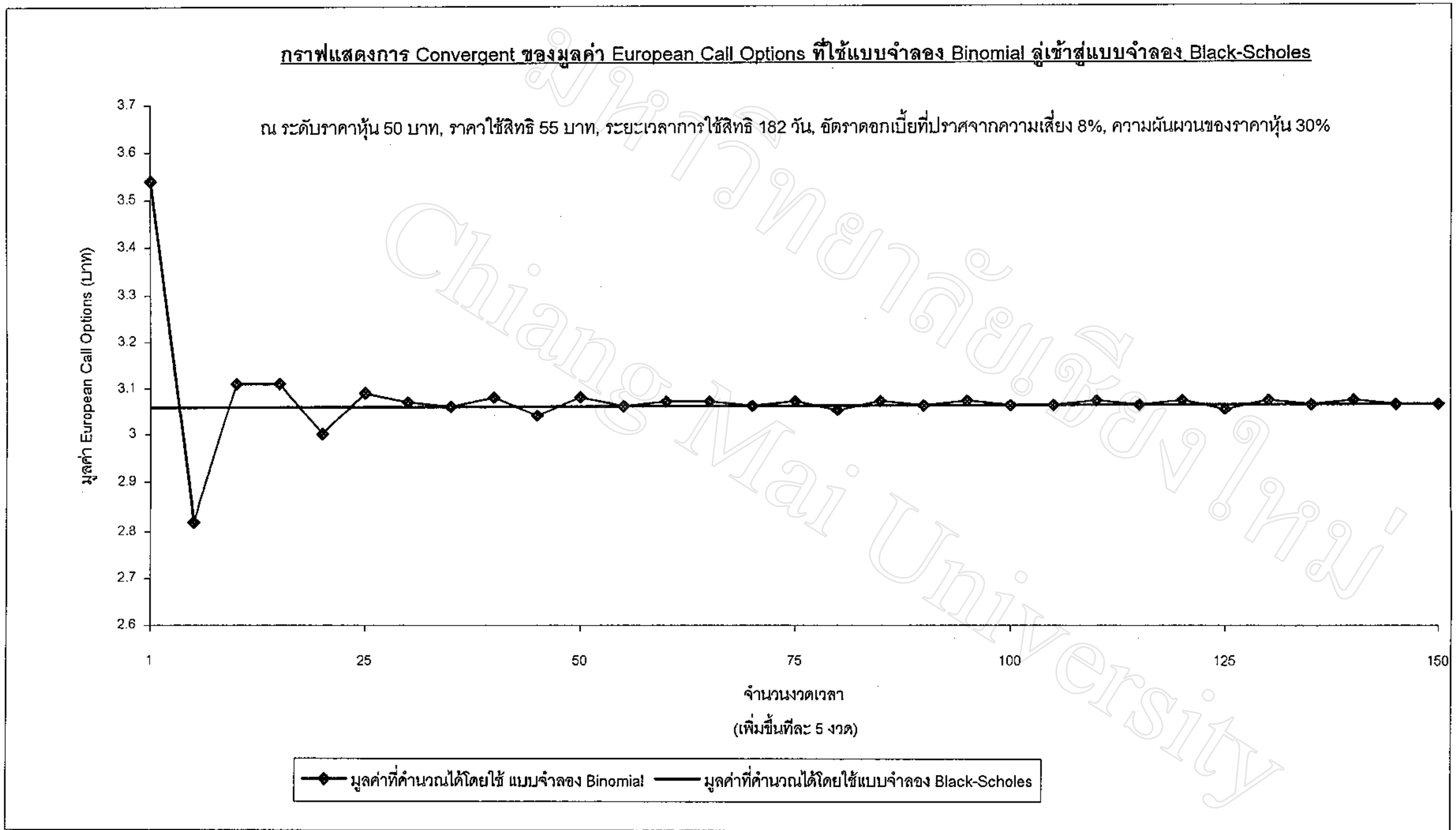
ตารางที่ 4.1 แสดงมูลค่า European Call Options ณ ระดับราคาหุ้นเท่ากับ 50 บาท

งวดเวลา (n)	n = 1	n = 5	n = 10	n = 15	n = 20	n = 25	n = 30	n = 35
มูลค่า BOPM	3.54	2.85	3.11	3.11	3.00	3.09	3.07	3.06
มูลค่า BS	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06
งวดเวลา (n)	n = 40	n = 45	n = 50	n = 55	n = 60	n = 65	n = 70	n = 75
มูลค่า BOPM	3.08	3.04	3.08	3.06	3.07	3.07	3.06	3.07
มูลค่า BS	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06
งวดเวลา (n)	n = 80	n = 85	n = 90	n = 95	n = 100	N = 105	n = 110	n = 115
มูลค่า BOPM	3.05	3.07	3.06	3.07	3.06	3.06	3.07	3.06
มูลค่า BS	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06
งวดเวลา (n)	n = 120	n = 125	n = 130	n = 135	n = 140	N = 145	n = 150	
มูลค่า BOPM	3.07	3.05	3.07	3.06	3.07	3.06	3.06	
มูลค่า BS	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	3.06	

ที่มา : ใช้โปรแกรม Option![1] คำนวณหามูลค่า

นำผลจากตารางที่ 4.1 มาสร้างรูปกราฟ ดังแสดงตามรูป 4.6

[1] เป็นโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นโดย Robert W. Kolb (1997)



รูป 4.6 กราฟแสดงการ Convergent ของมูลค่า European Call Options ณ ระดับราคาหุ้นสามัญ เท่ากับ 50 บาท (สภาวะ OOTM)

- <u>กรณี European Put Options</u>

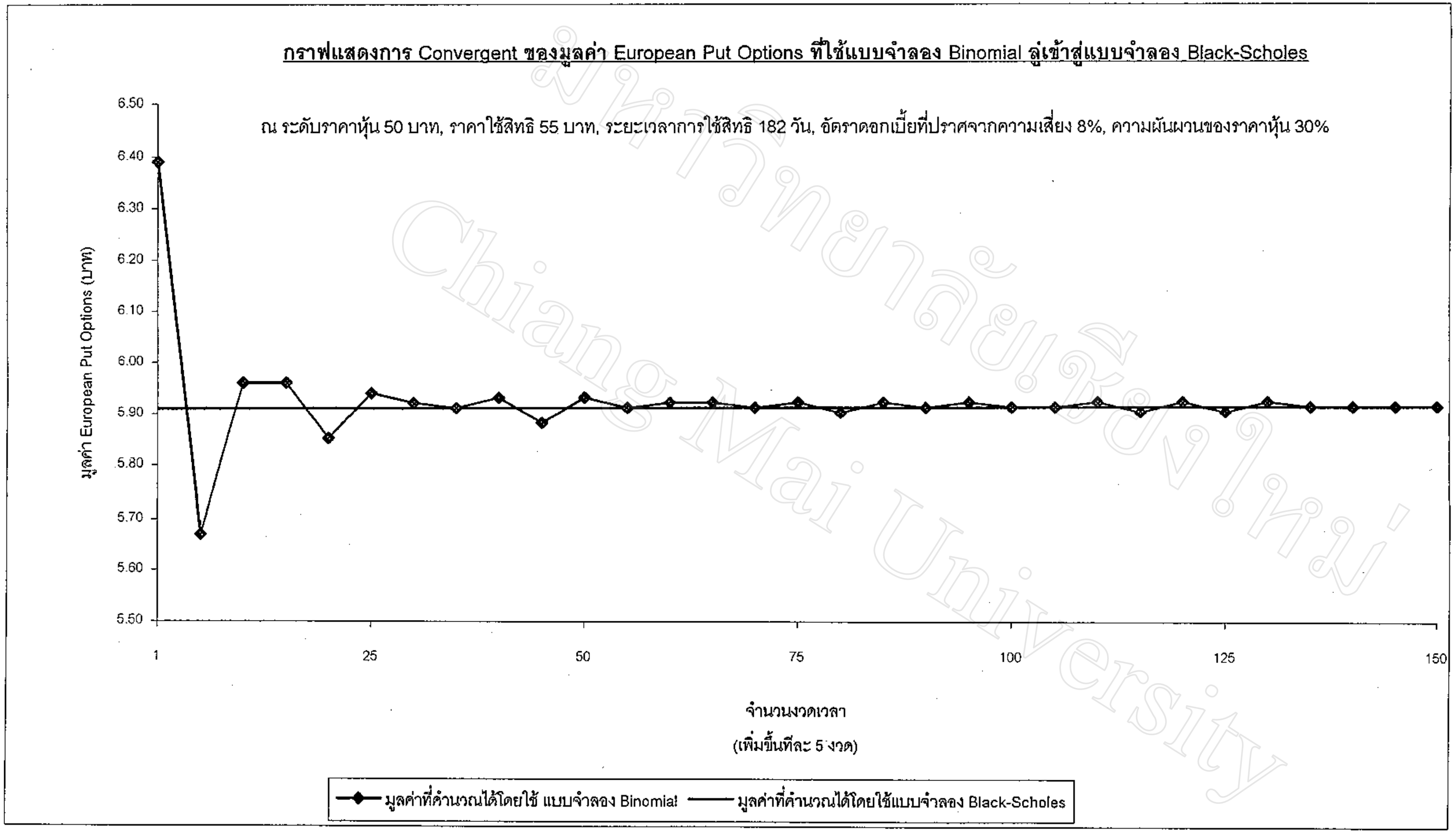
มูลค่า European Put Options ในกรณีนี้มีราคาหุ้นน้อยกว่าราคาใช้สิทธิ แสดงว่ามูลค่าตราสารสิทธิอยู่ในสภาวะ In-The-Money ซึ่งสามารถคำนวณหามูลค่าได้โดยใช้แบบจำลอง Binomial (BOPM) ที่มีการเพิ่มค่าจำนวนงวดเวลาเพิ่มขึ้นทีละ 5 งวดเวลา จนถึง 150 งวดเวลา (ยกเว้นที่จุดเริ่มต้น จะใช้ n=1 แทน n=0) เปรียบเทียบกับมูลค่าที่ได้จากแบบจำลอง Black-Scholes (BS) ดังแสดงตามตารางที่ 4.2

<u>ตารางที่ 4.2</u> แสดงมูลค่า European Put Options ณ ระดับราคาหุ้นเท่ากับ 50 บาท

งวดเวลา (n)	n = 1	n = 5	n = 10	n = 15	n = 20	n = 25	n = 30	n = 35
มูลค่า BOPM	6.39	5.67	5.96	5.96	5.85	5.94	5.92	5.91
มูลค่า BS	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91
งวดเวลา (n)	n = 40	n = 45	n = 50	n = 55	n = 60	n = 65	n = 70	n = 75
มูลค่า BOPM	5.93	5.88	5.93	5.91	5.92	5.92	5.91	5.92
มูลค่า BS	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91
งวดเวลา (n)	n = 80	n = 85	n = 90	n = 95	n =100	N = 105	n = 110	n = 115
มูลค่า BOPM	5.90	5.92	5.91	5.92	5.91	5.91	5.92	5.90
มูลค่า BS	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91
งวดเวลา (n)	n = 120	n = 125	n = 130	n = 135	n = 140	N = 145	n = 150	
มูลค่า BOPM	5.92	5.90	5.92	5.91	5.91	5.91	5.91	
มูลค่า BS	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	5.91	

<u>ที่มา</u> : ใช้โปรแกรม Option! คำนวณหามูลค่า

นำผลจากตารางที่ 4.2 มาสร้างรูปกราฟ ดังแสดงตามรูป 4.7



รูป 4.7 กราฟแสดงการ Convergent ของมูลค่า European Put Options ณ ระดับราคาหุ้นสามัญ เท่ากับ 50 บาท (สภาวะ ITM)

2. ณ ระดับราคาหุ้น เท่ากับ 55 บาท

- <u>กรณี European Call Options</u>

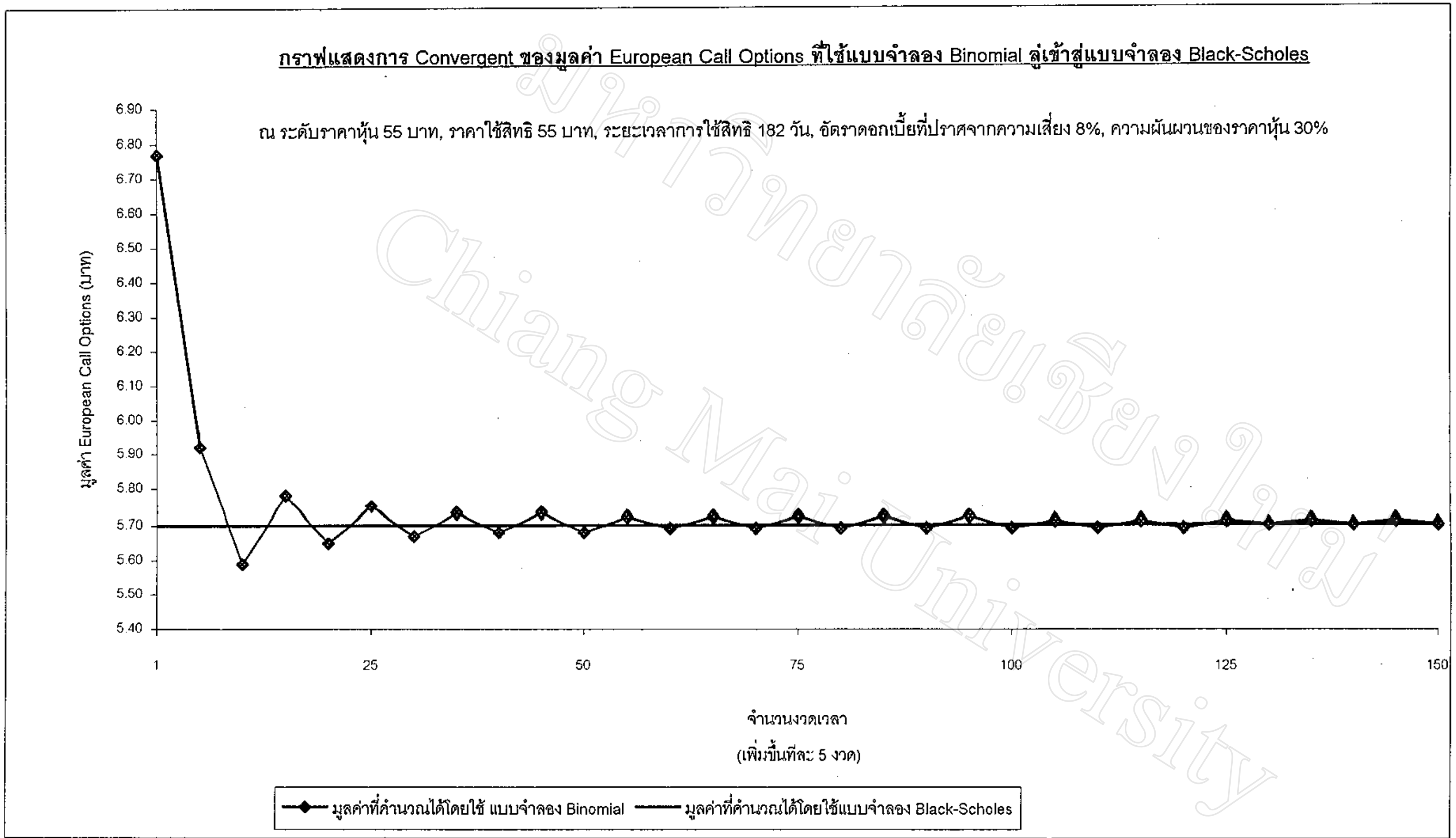
มูลค่า European Call Options ในกรณีนี้มีราคาหุ้นเท่ากับราคาใช้สิทธิ แสดงว่ามูลค่าตราสารสิทธิอยู่ในสภาวะ At-The-Money ซึ่งสามารถคำนวณหามูลค่าได้โดยใช้แบบจำลอง Binomial (BOPM) ที่มีการเพิ่มค่าจำนวนงวดเวลาเพิ่มขึ้นทีละ 5 งวดเวลา จนถึง 150 งวดเวลา (ยกเว้นที่จุดเริ่มต้น จะใช้ n=1 แทน n=0) เปรียบเทียบกับมูลค่าที่ได้จากแบบจำลอง Black-Scholes (BS) ดังแสดงตามตารางที่ 4.3

<u>ตารางที่ 4.3</u> แสดงมูลค่า European Call Options ณ ระดับราคาหุ้นเท่ากับ 55 บาท

งวดเวลา (n)	n = 1	n = 5	n = 10	n = 15	n = 20	n = 25	n = 30	n = 35
มูลค่า BOPM	6.77	5.92	5.59	5.78	5.65	5.75	5.67	5.73
มูลค่า BS	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70
งวดเวลา (n)	n = 40	n = 45	n = 50	n = 55	n = 60	n = 65	n = 70	n = 75
มูลค่า BOPM	5.68	5.73	5.68	5.72	5.69	5.72	5.69	5.72
มูลค่า BS	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70
งวดเวลา (n)	n = 80	n = 85	n = 90	n = 95	n = 100	n = 105	n = 110	n = 115
มูลค่า BOPM	5.69	5.72	5.69	5.72	5.69	5.71	5.69	5.71
มูลค่า BS	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70
งวดเวลา (n)	n = 120	n = 125	n = 130	n = 135	n = 140	n = 145	n = 150	
มูลค่า BOPM	5.69	5.71	5.70	5.71	5.70	5.71	5.70	
มูลค่า BS	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	5.70	

<u>ที่มา</u> : ใช้โปรแกรม Option! คำนวณหามูลค่า

นำผลจากตารางที่ 4.3 มาสร้างรูปกราฟ ดังแสดงตามรูป 4.8



รูป 4.8 กราฟแสดงการ Convergent ของมูลค่า European Call Options ณ ระดับราคาหุ้นสามัญ เท่ากับ 55 บาท (สภาวะ ATM)

- <u>กรณี European Put Options</u>

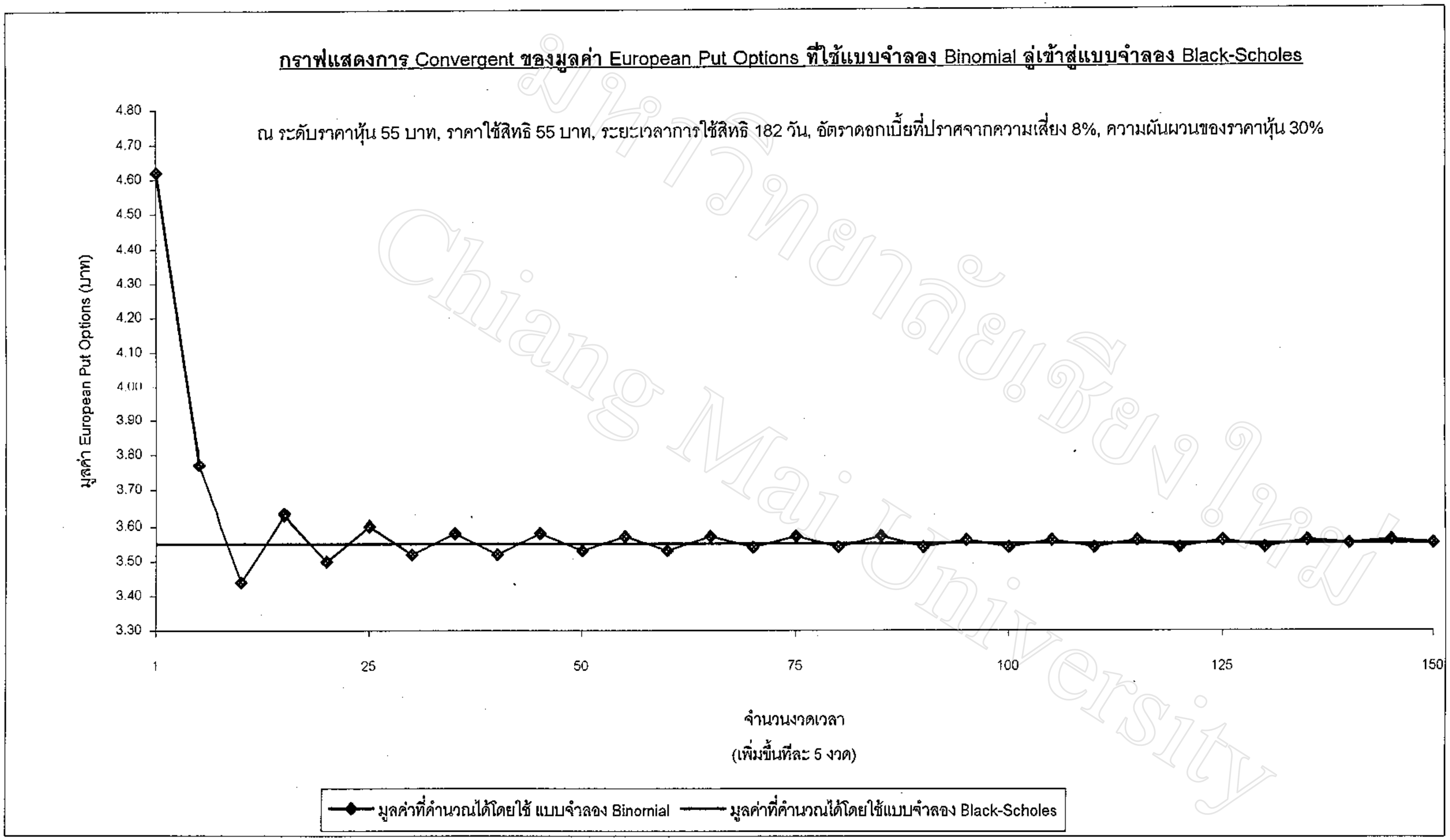
มูลค่า European Put Options ในกรณีนี้มีราคาหุ้นเท่ากับราคาใช้สิทธิ แสดงว่ามูลค่าตราสารสิทธิอยู่ในสภาวะ At-The-Money ซึ่งสามารถคำนวณหามูลค่าได้โดยใช้แบบจำลอง Binomial (BOPM) ที่มีการเพิ่มค่าจำนวนงวดเวลาเพิ่มขึ้นทีละ 5 งวดเวลา จนถึง 150 งวดเวลา (ยกเว้นที่จุดเริ่มต้น จะใช้ n=1 แทน n=0) เปรียบเทียบกับมูลค่าที่ได้จากแบบจำลอง Black-Scholes (BS) ดังแสดงตามตารางที่ 4.4

<u>ตารางที่ 4.4</u> แสดงมูลค่า European Put Options ณ ระดับราคาหุ้นเท่ากับ 55 บาท

งวดเวลา (n)	n = 1	n = 5	n = 10	n = 15	n = 20	n = 25	n = 30	n = 35
มูลค่า BOPM	4.62	3.77	3.44	3.63	3.50	3.60	3.52	3.58
มูลค่า BS	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55
งวดเวลา (n)	n = 40	n = 45	n = 50	n = 55	n = 60	n = 65	n = 70	n = 75
มูลค่า BOPM	3.52	3.58	3.53	3.57	3.53	3.57	3.54	3.57
มูลค่า BS	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55
งวดเวลา (n)	n = 80	n = 85	n = 90	n = 95	n = 100	n = 105	n = 110	n = 115
มูลค่า BOPM	3.54	3.57	3.54	3.56	3.54	3.56	3.54	3.56
มูลค่า BS	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55
งวดเวลา (n)	n = 120	n = 125	n = 130	n = 135	n = 140	n = 145	n = 150	
มูลค่า BOPM	3.54	3.56	3.54	3.56	3.55	3.56	3.55	
มูลค่า BS	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	3.55	

<u>ที่มา</u> : ใช้โปรแกรม Option! คำนวณหามูลค่า

นำผลจากตารางที่ 4.4 มาสร้างรูปกราฟ ดังแสดงตามรูป 4.9



รูป 4.9 กราฟแสดงการ Convergent ของมูลค่า European Put Options ณ ระดับราคาหุ้นสามัญ เท่ากับ 55 บาท (สภาวะ ATM)

3. ณ ระดับราคาหุ้น เท่ากับ 60 บาท

- <u>กรณี European Call Options</u>

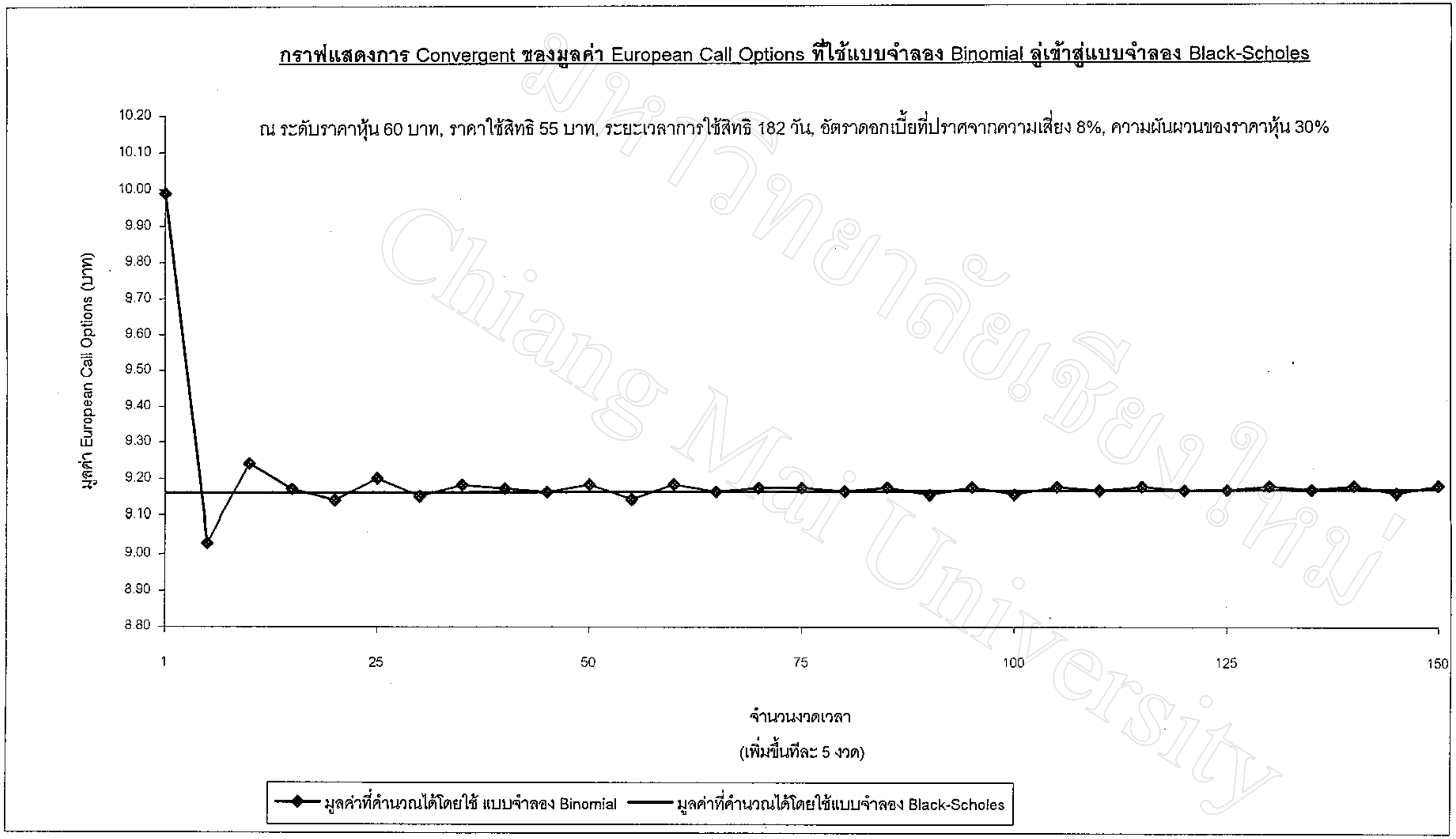
มูลค่า European Call Options ในกรณีนี้มีราคาหุ้นมากกว่าราคาใช้สิทธิ แสดงว่ามูลค่าตราสารสิทธิอยู่ในสภาวะ In-The-Money ซึ่งสามารถคำนวณหามูลค่าได้โดยใช้แบบจำลอง Binomial (BOPM) ที่มีการเพิ่มค่าจำนวนงวดเวลาเพิ่มขึ้นทีละ 5 งวดเวลา จนถึง 150 งวดเวลา (ยกเว้นที่จุดเริ่มต้น จะใช้ n=1 แทน n=0) เปรียบเทียบกับมูลค่าที่ได้จากแบบจำลอง Black-Scholes (BS) ดังแสดงตามตารางที่ 4.5

<u>ตารางที่ 4.5</u> แสดงมูลค่า European Call Options ณ ระดับราคาหุ้นเท่ากับ 60 บาท

งวดเวลา (n)	n = 1	n = 5	n = 10	n = 15	n = 20	n = 25	n = 30	n = 35
มูลค่า BOPM	9.99	9.03	9.24	9.17	9.14	9.20	9.15	9.18
มูลค่า BS	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16
งวดเวลา (n)	n = 40	n = 45	n = 50	n = 55	n = 60	n = 65	n = 70	n = 75
มูลค่า BOPM	9.17	9.16	9.18	9.14	9.18	9.16	9.17	9.17
มูลค่า BS	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16
งวดเวลา (n)	n = 80	n = 85	n = 90	n = 95	n = 100	n = 105	n = 110	n = 115
มูลค่า BOPM	9.16	9.17	9.15	9.17	9.15	9.17	9.16	9.17
มูลค่า BS	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16
งวดเวลา (n)	n = 120	n = 125	n = 130	n = 135	n = 140	n = 145	n = 150	
มูลค่า BOPM	9.16	9.16	9.17	9.16	9.17	9.15	9.17	
มูลค่า BS	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	

<u>ที่มา</u> : ใช้โปรแกรม Option! คำนวณหามูลค่า

นำผลจากตารางที่ 4.5 มาสร้างรูปกราฟ ดังแสดงตามรูป 4.10



รูป 4.10 กราฟแสดงการ Convergent ของมูลค่า European Call Options ณ ระดับราคาหุ้นสามัญ เท่ากับ 60 บาท (สภาวะ ITM)

- <u>กรณี European Put Options</u>

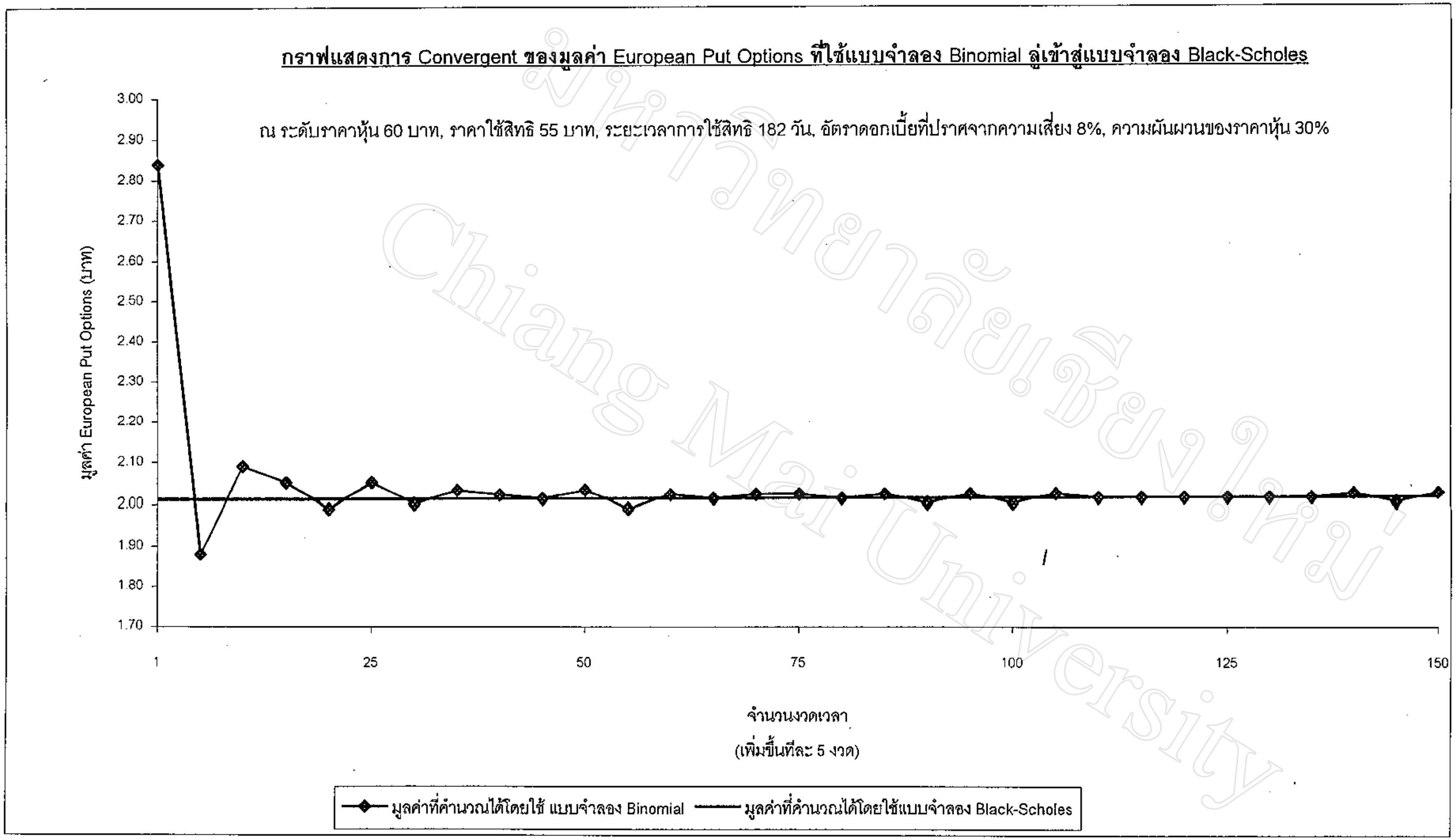
มูลค่า European Put Options ในกรณีนี้มีราคาหุ้นมากกว่าราคาใช้สิทธิ แสดงว่ามูลค่าตราสารสิทธิอยู่ในสภาวะ Out-Of-The-Money ซึ่งสามารถคำนวณหามูลค่าได้โดยใช้แบบจำลอง Binomial (BOPM) ที่มีการเพิ่มค่าจำนวนงวดเวลาเพิ่มขึ้นทีละ 5 งวดเวลา จนถึง 150 งวดเวลา (ยกเว้นที่จุดเริ่มต้น จะใช้ n=1 แทน n=0) เปรียบเทียบกับมูลค่าที่ได้จากแบบจำลอง Black-Scholes (BS) ดังแสดงตามตารางที่ 4.6

<u>ตารางที่ 4.6</u> แสดงมูลค่า European Put Options ณ ระดับราคาหุ้นเท่ากับ 60 บาท

งวดเวลา (n)	n = 1	n = 5	n = 10	n = 15	n = 20	n = 25	n = 30	n = 35
มูลค่า BOPM	2.84	1.88	2.09	2.05	1.99	2.05	2.00	2.03
มูลค่า BS	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01
งวดเวลา (n)	n = 40	n = 45	n = 50	n = 55	n = 60	n = 65	n = 70	n = 75
มูลค่า BOPM	2.02	2.01	2.03	1.99	2.02	2.01	2.02	2.02
มูลค่า BS	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01
งวดเวลา (n)	n = 80	n = 85	n = 90	n = 95	n = 100	n = 105	n = 110	n = 115
มูลค่า BOPM	2.01	2.02	2.00	2.02	2.00	2.02	2.01	2.01
มูลค่า BS	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01
งวดเวลา (n)	n = 120	n = 125	n = 130	N = 135	n = 140	n = 145	n = 150	
มูลค่า BOPM	2.01	2.01	2.01	2.01	2.02	2.00	2.02	
มูลค่า BS	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01	

<u>ที่มา</u> : ใช้โปรแกรม Option! คำนวณหามูลค่า

นำผลจากตารางที่ 4.6 มาสร้างรูปกราฟ ดังแสดงตามรูป 4.11



รูป 4.11 กราฟแสดงการ Convergent ของมูลค่า European Put Options ณ ระดับราคาหุ้นสามัญ เท่ากับ 60 บาท (สภาวะ OOTM)