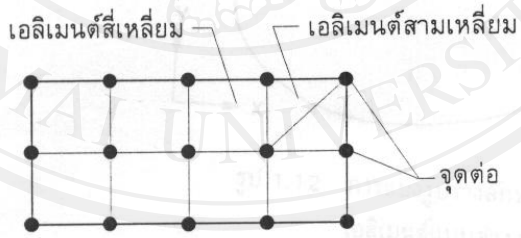
บทที่ 3
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

3.1 ทฤษฎี และลักษณะของระเบียบวิธีไฟไนต์อลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นหนึ่งในหลายวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้สำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) และเป็นวิธีที่นิยมใช้วิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์อย่างก้วางขวาง ซึ่งสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาปัญหาเรื่องการถ่ายเทความร้อน ปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของของแข็ง ทั้งทางด้านสถิตศาสตร์และทางด้านพลศาสตร์ รวมทั้งยังสามารถใช้วิเคราะห์การไหลของของไหลได้ (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2545)

หลักการของไฟไนต์เอลิเมนต์คือ การแบ่งสิ่งที่ต้องการวิเคราะห์ (Domain) ออกเป็นส่วนย่อยเล็ก ๆ เรียกว่าเอลิเมนต์ (Element) ซึ่งมักจะอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมหรือสามเหลี่ยม ดังแสดงในภาพที่ 3.1 ที่จุดตัดของเส้นกรอบเอลิเมนต์เรียกว่า “จุดต่อ” (Node) ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีการสร้างฟังก์ชั้นทางคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบ (อุณหภูมิ ความเค้น ความเร็ว ฯลฯ) ที่จุดต่อเหล่านั้นพร้อม ๆ กันโดยอาศัยเครื่องคอมพิวเตอร์ แทนที่จะแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งต้องใช้เวลามากกว่าจะหาคำตอบได้ครบทุกจุด



ภาพที่ 3.1 ลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีเชิงตัวเลข วิธีหนึ่งที่ใช้สำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ และเป็นวิธีที่นิยมใช้วิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์อย่างกว้างขวาง ซึ่งสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาด้านกลศาสตร์ของแข็ง เช่น วิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงรูปร่างและความเค้นในชิ้นส่วนของเครื่องจักรกล โครงสร้างเครื่องบิน ตัวอาคาร สะพาน และ โครงสร้างอื่นๆ ที่ซับซ้อนได้เป็นอย่างดี ไม่ว่าวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์จะอยู่ในสภาพยืดหยุ่น (Elastic) หรือในสภาพยืดตัว (Plastic) นอกจากจะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาทางด้านสถิตศาสตร์ตามที่กล่าวมาแล้ว ยังสามารถจะใช้วิธีวิเคราะห์ปัญหาทางด้านพลศาสตร์ เช่น การสั่นสะเทือนของชิ้นส่วนเครื่องจักรกล

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

การสั่นสะเทือนของโครงสร้าง รวมทั้งยังสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อนการไหลของของไหล การถ่ายเทมวล เป็นต้น

ในการวิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกลทั่วๆไปที่ไม่ซับซ้อน เราจะสามารถหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่ต้องการทราบ เช่น การกระจัดที่ตำแหน่งใดๆ ของชิ้นส่วนโดยอาศัยสมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลยที่ได้รับจะเรียกว่าผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) แต่มีชิ้นส่วนเครื่องจักรกลและโครงสร้างจำนวนมากที่มีรูปลักษณะที่ซับซ้อนที่ประกอบด้วยส่วนเว้าส่วนโค้งต่างๆ ทำให้พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนไม่สม่ำเสมอ และบางบริเวณอาจจะมีการเปลี่ยนแปลงของโหลดอย่างฉับพลัน หรือ ใช้วัสดุต่างชนิดกันเหล่านี้เป็นต้น จึงมีผลทำให้ไม่สามารถจะหาผลเฉลยแม่นตรงจากสมการอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations) หรือสมการอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations) ได้ ฉะนั้นจึงจำเป็นต้องหาวิธีอื่น เช่น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่สามารถจะประมาณค่าผลเฉลยโดยการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตแทนการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ การแก้ปัญหาโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าว ชิ้นส่วนหรือส่วนประกอบของปัญหาจะถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยๆ อย่างต่อเนื่อง ตามรูปร่างลักษณะที่แท้จริงของชิ้นส่วน เช่น ภาพที่6 เราเรียกชิ้นส่วนย่อยๆนี้ว่า **เอลิเมนต์** ผลเฉลยที่ได้รับจะเป็นผลเฉลยที่จุดต่อ (Node) ของแต่ละเอลิเมนต์ การวิเคราะห์ปัญหาโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เราจะไม่วิเคราะห์ปัญหาทีเดียวทั้งระบบเช่นวิธีทั่วๆไป แต่เราจะวิเคราะห์หาค่าทีละเอลิเมนต์แล้วนำมารวมเข้ากันเป็นผลเฉลยของระบบ เช่น ในระบบโครงสร้าง เราจะหาการกระจัด และความเค้นของแต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์ที่ประกอบเป็นโครงสร้างของระบบ

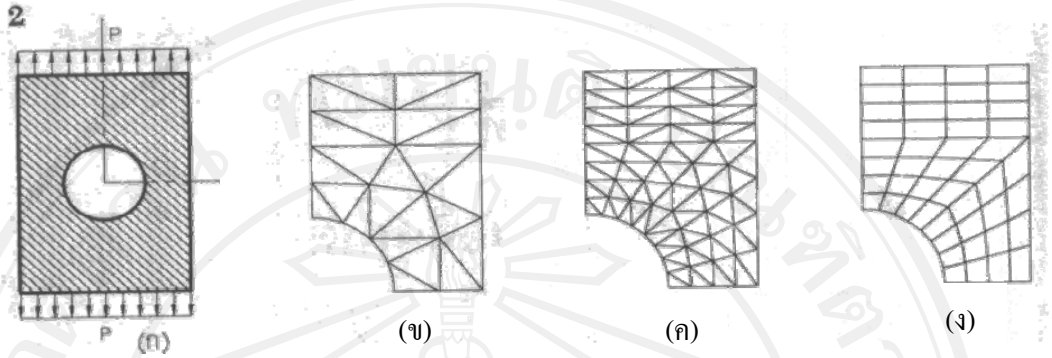
สำหรับการศึกษานี้ เป็นการศึกษาการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการประมวณผลในรูปแบบวิธีของ ไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อจะหาวิธีการที่จะประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ เกี่ยวกับการระบายอากาศ เพราะฉะนั้นในการศึกษาจะมุ่งเน้นไปที่ การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของของไหล

หลักการของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร

ในการแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ปัญหานั้นจะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ ค่าผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) ของปัญหาดังกล่าวจะประกอบด้วยค่าของตัวแปรต่างๆกันตามตำแหน่งต่างๆบนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ค่าผลเฉลยแม่นตรงจะประกอบด้วยค่าต่างๆทั้งหมดนับเป็นจำนวนอนันต์ค่า แทนที่จะทำการหาค่าแม่นตรงที่ประกอบด้วยค่าต่างๆจำนวนมากมายเช่นนี้ ซึ่งสำหรับปัญหาในทางปฏิบัติจะทำไม่ได้ หลักการก็คือทำการเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่มีจำนวนอนันต์ค่านั้นมาเป็นค่าโดยประมาณที่มีจำนวนที่

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

นับได้ (Finite) ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ (Element) ซึ่งมีขนาดต่างๆกัน ดังเช่น แสดงในตัวอย่างของแผ่นวัสดุในภาพที่ 3.2



ภาพที่ 3.2 แสดงการแบ่งเอลิเมนต์แบบต่างๆภายในวัสดุ

วิธีการดังกล่าวชี้บ่งเป็นนัยว่า ผลเฉลยของแต่ละเอลิเมนต์นั้นจำเป็นต้องสอดคล้อง กับสมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขของขอบเขตที่กำหนดมาให้ในปัญหานั้นๆ ซึ่งหมายความว่า หลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ การสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ที่ตั้งอยู่บนรากฐานที่ว่า สมการที่สร้างขึ้นมานั้นจำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่ทำอยู่นั้น จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาได้มาประกอบกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการชุดใหญ่ ซึ่งในความหมายทางกายภาพก็คล้ายกับการนำทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมเข้าด้วยกันก่อให้เกิดเป็นรูปร่างลักษณะทั้งหมดของปัญหาที่แท้จริง จากนั้นจึ่งทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ให้มาลงในระบบสมการชุดใหญ่นี้แล้วจึ่งทำการแก้สมการดังกล่าว ซึ่งจะก่อให้เกิดผลเฉลยโดยประมาณที่ต้องการ ณ ตำแหน่งต่างๆของปัญหานั้น

จากคำอธิบายนี้จะเห็นได้ว่า ความแม่นยำของค่าผลเฉลยโดยประมาณที่คำนวณออกมาได้นั้นจะขึ้นอยู่กับขนาด และ จำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหานั้น นอกจากนั้นความแม่นยำของผลเฉลยก็ยังขึ้นอยู่กับการสมมติรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในที่ใช้กับแต่ละเอลิเมนต์นั้น กล่าวคือ ฟังก์ชันการประมาณภายในที่สมมติขึ้นมานั้น มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหานั้นมากน้อยเพียงใด ลักษณะการกระจายของฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์อาจสมมติให้อยู่ในหลายรูปแบบ อาทิเช่น รูปแบบของการกระจายเชิงเส้นตรง เป็นต้น ส่วนขนาดของฟังก์ชันการประมาณภายในนี้จะขึ้นอยู่กับค่าที่จุดต่อ (Nodes) ของเอลิเมนต์ ยกตัวอย่างเช่น หากค่าอุณหภูมิที่จุดต่อที่ปลายมุมทั้งสามของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ 30, 40 และ 50 องศาเซลเซียส ตามลำดับ และ หากเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมนี้ ใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในที่อยู่ในรูปแบบของลักษณะการกระจายแบบเชิงเส้นตรงแล้ว อุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆในเอลิเมนต์รูป

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

สามเหลี่ยมนี้จะแปรผันเป็นรูปเชิงเส้นตรงโดยมีการกระจายของอุณหภูมิระหว่าง 30 ถึง 50 องศาเซลเซียส เป็นต้น

คำอธิบายที่กล่าวมาเป็นคำอธิบายในลักษณะกว้างๆ และคร่าวๆ เพื่อที่จะแสดงให้เห็นภาพรวมของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ รายระเอียดปลีกย่อยของวิธีการนี้จะอธิบายเป็นขั้นเป็นตอนพร้อมกับการยกตัวอย่างประกอบง่ายๆ เกี่ยวกับวิธีการหาผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) เพื่อทำให้เห็นภาพก่อน ซึ่งเป็นวิธีการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณวิธีหนึ่ง เช่นเดียวกับวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ และเป็นวิธีการที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจ รวมทั้งลักษณะบางอย่างที่คล้ายคลึงกับวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เราจะได้พบเห็นกันต่อไป ดังนั้นในหัวข้อต่อไปนี้ จะแสดงให้เห็นวิธีการผลต่างสืบเนื่องโดยยกตัวอย่างง่ายๆขึ้นมาก่อน ลักษณะบางอย่างที่เราจะได้พบเห็นซึ่งเกิดขึ้นจากวิธีการนี้จะช่วยเสริมความเข้าใจเมื่อเราทำการศึกษาวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในขั้นต้น

3.2 ความเป็นมาของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

แนวความคิดที่นำเอาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้วิเคราะห์โครงสร้างครั้งแรกคือ เมื่อปี 1940 ต่อมาในปี 1943 ได้เริ่มใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คำนวนหาความเค้นในปัญหามิติเดียว เช่น ความเค้นที่เกิดในท่อนโลหะในคาน แต่ในช่วงนั้นยังไม่เป็นที่นิยมแพร่หลาย ในปี 1956 Turner, Clough, Martin และ Topp ได้วิเคราะห์ปัญหาสองมิติด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นครั้งแรก และ ได้แสดงวิธีหาสทีฟเนสเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ของโครงข้อหมุน, ของเอลิเมนต์คาน และหาสทิฟเนสเมทริกซ์ของเอลิเมนต์สองมิติของเอลิเมนต์ระนาบสามเหลี่ยม และสี่เหลี่ยมโดยการสมมุติฟังชันก์การกระจัด ซึ่งเรียกกันทั่วไปว่า สทีฟเนสโดยตรง (Direct Stiffness Method) และรวมสทีฟเนสเมทริกซ์ของเอลิเมนต์เหล่านั้นเข้าด้วยกันเป็นสทีฟเนสเมทริกซ์ของโครงสร้างทั้งระบบ ในช่วงปี 1954-60 เครื่องคอมพิวเตอร์ได้รับการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น การวิเคราะห์โครงสร้างจึงนิยมใช้วิธีเมทริกซ์ และการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีไฟไนต์ก็ได้รับความนิยมมากขึ้น

คำว่า วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้ถูกแนะนำขึ้นเป็นครั้งแรกในผลงานวิจัยเกี่ยวกับการวิเคราะห์ความเค้นระนาบ โดยใช้เอลิเมนต์ชนิดสามเหลี่ยม และสี่เหลี่ยมมุมฉากของ Clough ในปี 1960 ต่อมาในปี 1961 Melosh ได้เสนอวิธีหาสทิฟเนสเมทริกซ์ของแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมสี่เหลี่ยมที่มีโมเมนต์ดัดกระทำ ในปี 1963 Grafton และ Strome ก็เสนอวิธีหาสทิฟเนสเมทริกของแผ่นโลหะโค้ง (Curved-shell) ที่มีแกนสมมาตร เช่น ถังความดัน

ทฤษฎีของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้รับความสนใจมากขึ้น ในปี 1961 Melosh แสดงให้เห็นว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีพื้นฐานมาจากวิธีของเรไลซ์-ริทช์ (Reyleigh – Ritz method) ที่ใช้หลักงาน

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

สมมติ (Principle of Virtual Work) หรือหลักของพลังงานศักย์ต่ำสุด (Principle of Minimum Potential Energy) และ ได้เริ่มนำวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับเพลา การไหลของของไหล และการนำความร้อน ต่อมาในช่วงปี 1961-1965 ได้มีผู้พยายามใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แก้ปัญหาสามมิติ เช่น ในปี 1961 Martins ได้เสนอวิธีหาสทิฟเนสเมทริกซ์ของเอลิเมนต์สามมิติทรงสี่หน้า (Tetrahedral), ปี 1965 Clough และ Rashid และ Wilson วิเคราะห์ปัญหาทรงกระบอกตันแกนสมมาตรด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในช่วงแรกวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกนำไปใช้วิเคราะห์เฉพาะปัญหาในกรณีที่ความเครียดและ การกระจัดมีค่าน้อยๆ และ วัสดุอยู่ในช่วงยืดยุ่นเชิงเส้น (Linearities) และ โหลดที่กระทำจะเป็นแบบสถิต แต่ในปี 1960 Turner, Drill, Martins และ Melson เริ่มใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาที่การกระจัดมีค่ามาก และวัสดุอยู่ในช่วงไม่ยืดยุ่นเชิงเส้น (Non-Linearities)

ในปี 1965 Archer ได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์การสั่นสะเทือน และ การตอบสนองของระบบโครงสร้าง โดยใช้เมทริกซ์ของมวลแบบนัย (Consistent Mass Matrix) ของท่อนโลหะและคานที่ประกอบขึ้นเป็นโครงสร้าง

หนังสือไฟไนต์เอลิเมนต์สองเล่มแรกได้จัดพิมพ์ขึ้นในปี 1965 และ 1966 โดย Zienkiewicz และ Cheung และ โดย Wilson และ Nickell ตามลำดับ หนังสือดังกล่าวได้แสดงวิธีประยุกต์ใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาต่างๆ เช่น การวิเคราะห์คุณสมบัติทางกลของดิน, การนำความร้อน, การไหลของของไหลเป็นต้น ส่วนหนังสือของ Oden (1972) ได้เน้นการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับวัสดุที่ไม่หยุ่นเชิงเส้น (Nonlinear material)

การประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ขยายตัวกว้างขึ้นในปี 1969 Szabo และ Lee แสดงให้เห็นว่าสามารถจะหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของโครงสร้างได้โดยวิธีเวทเรชิดิว (Weighted - Residual Method) เช่นวิธีของกาเลอร์คิน (Galerkin's Method) จากแนวความคิดดังกล่าวทำให้สามารถใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาที่ไม่ใช่โครงสร้าง (non-structure) ได้สะดวกขึ้น เช่น ในปี 1977 Lyness, Owen และ Zienkiewicz ได้ใช้วิธีเวทเรซิดิววิเคราะห์ปัญหาของสนามแม่เหล็ก (Magnetic Field) นอกจากนี้มีการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ขยายไปสาขาอื่นๆ อีกเช่น สาขาชีวะวิศวกรรม (Bioengineer) เป็นต้น

ปัจจุบันการวิเคราะห์ปัญหาด้านวิศวกรรมศาสตร์โดยเฉพาะอย่างยิ่งด้านการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์มาช่วยวิเคราะห์ผลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นที่นิยมมากขึ้นทั้งในสถาบันการศึกษาและอุตสาหกรรมขนาดเล็กทั่วไป ทั้งนี้เพราะขีดความสามารถของเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ และโปรแกรมมาตรฐานสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ขนาดเล็กได้พัฒนาขึ้น

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

อย่างมาก และกว้างขวางยิ่งขึ้น การใช้งานจึ่งทำได้สะดวก รวดเร็ว ถูกต้องแม่นยำสูง และ เสียค่าใช้จ่ายไม่มากนัก

3.3 หลักการทั่วไปสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ก่อนที่จะศึกษาในรายละเอียดของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เราจำเป็นต้องเข้าใจหลักการเบื้องต้นทั่วๆไป เกี่ยวกับชนิดต่างๆของเอลิเมนต์ วิธีการแบ่งเอลิเมนต์ การกำหนดตำแหน่งต่างๆของเอลิเมนต์ ลักษณะของฟังก์ชันการกระจัด และการจำลองแบบของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รวมทั้งจะต้องมีพื้นความรู้ด้านวิศวกรรมศาสตร์เฉพาะด้านที่จะทำการศึกษา เช่น กลศาสตร์ของแข็ง ความสัมพันธ์ของความเค้น-ความเครียดและการกระจัด กลศาสตร์การถ่ายเทความร้อน หรือ กลศาสตร์ของไหล เป็นต้น รวมทั้งควรทราบหลักการของงาน และพลังงาน เพื่อใช้ประกอบในการหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และควรทราบการประยุกต์ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณ ส่วนหลักการการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาที่ซับซ้อนมาก ๆ นั้น สามารถจะศึกษาได้จากตำราไฟไนต์เอลิเมนต์ขั้นสูงทั่วไป

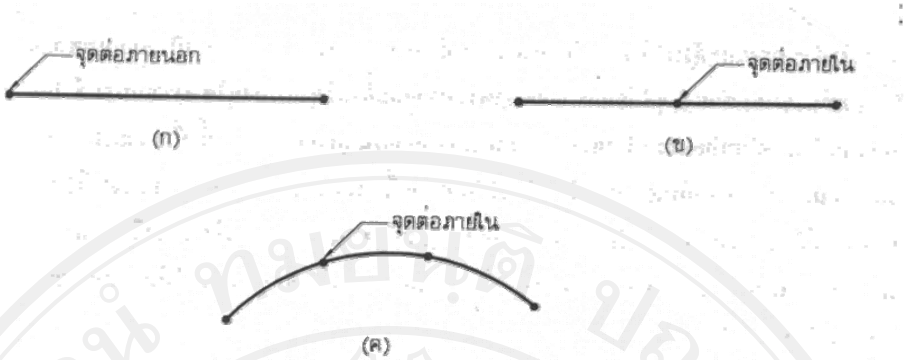
3.3.1 ชนิดของเอลิเมนต์

การวิเคราะห์โครงสร้าง หรือ ชิ้นส่วนเครื่องจักรกลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องแบ่งโครงสร้าง หรือชิ้นส่วนออกเป็นส่วนเล็กๆ และเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับรูปร่าง ลักษณะของงาน และการกระทำของโหลด ชนิดของเอลิเมนต์อาจจะแบ่งออกได้ 3 ประเภทตามมิติ คือ เอลิเมนต์สำหรับปัญหามิติเดียว สองมิติ และสามมิติ

<u>เอลิเมนต์มิติเดียว</u> เป็นเอลิเมนต์ที่นิยมนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหามิติเดียว เช่น ชิ้นส่วนที่มีแรงกระทำในแนวแกน ชิ้นส่วนที่รับแรงบิด การโก่งของคาน การนำความร้อนในทิศทางเดียวกันเป็นต้น

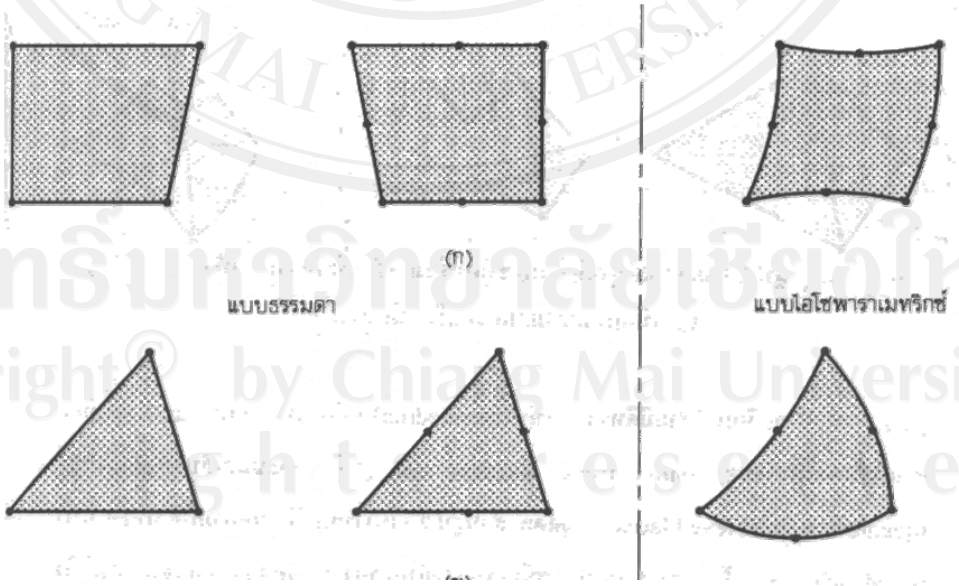
ภาพที่ 3.3 (ก) คือเอลิเมนต์มิติเดียวที่ประกอบด้วยจุดต่อที่ปลายทั้งสองด้านของแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งเรียกว่าจุดต่อภายนอก ภาพที่ 3.3 (ข) เป็นเอลิเมนต์มิติเดียวที่ประกอบด้วยสามจุดต่อ คือจุดต่อภายนอกสองจุดต่อ และจุดต่อภายในหนึ่งจุดต่อ และ ภาพที่ 3.3 (ค) คือเอลิเมนต์มิติเดียวที่เป็นเส้นโค้งประกอบด้วยสี่จุดต่อ คือสองจุดต่อภายนอก และสองจุดต่อภายใน ซึ่งเหมาะสำหรับใช้วิเคราะห์ปัญหาของโครงสร้างหรือ ชิ้นงานที่มีการยืดตัวไม่เป็นเส้นตรง เช่นการยืดตัวของท่อนโลหะ อันเนื่องจากมวลของท่อนโลหะเอง เป็นต้น

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



ภาพที่ 3.3 เอลิเมนต์แบบมิติเดียวแบบต่างๆ

เอลิเมนต์สองมิติ มักใช้กับการวิเคราะห์ความเค้น-ความเครียดระนาบ โดยทั่วไปเอลิเมนต์สองมิติจะมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม และ สี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยด้านที่เป็นเส้นตรง หรือเส้นโค้ง เช่น ภาพที่ 3.4(ก) เป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยสี่จุดต่อ และ8จุดต่อชนิดด้านตรง และด้านโค้งแบบไอโซพาราเมทริกซ์ ส่วน ภาพที่3.4(ข) เป็นเอลิมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ และ 6 จุดต่อด้านตรง และด้านโค้งแบบไอโซพาราเมทริกซ์ โดยทั่วไปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะได้รับความนิยมมากกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ทั้งนี้เพราะในกรณีที่ระดับขั้นความเสรีเท่ากับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ให้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำกว่า ส่วนจะเลือกใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม หรือด้านโค้งนั้นย่อมขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างของชิ้นงานจริง และโดยทั่วไปจะสมมติให้ความหนาของเอลิเมนต์มีค่าคงตัว แต่อาจจะกำหนดให้ความหนาเป็นฟังชันก์กับพิกัดก็ได้

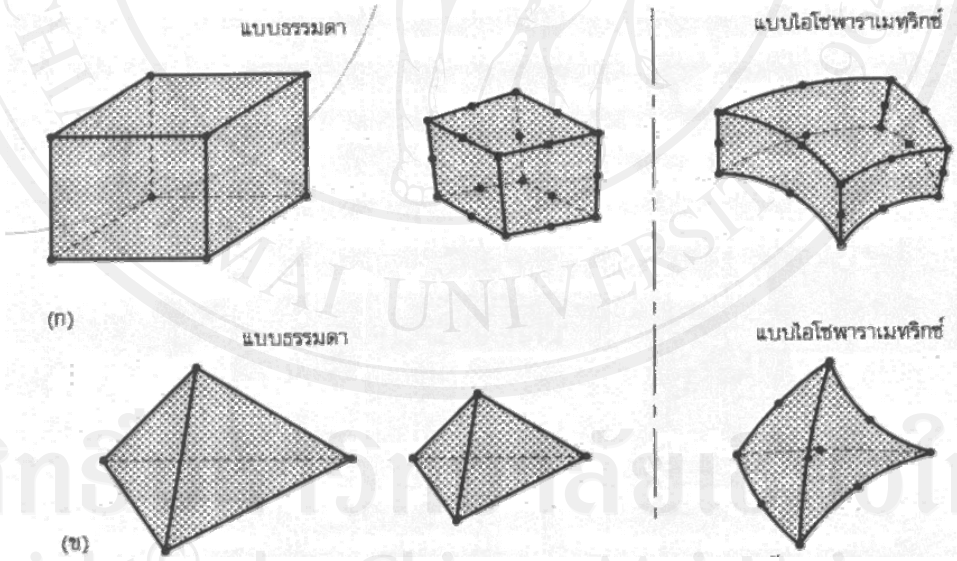


ภาพที่ 3.4 เอลิเมนต์สองมิติแบบต่างๆ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

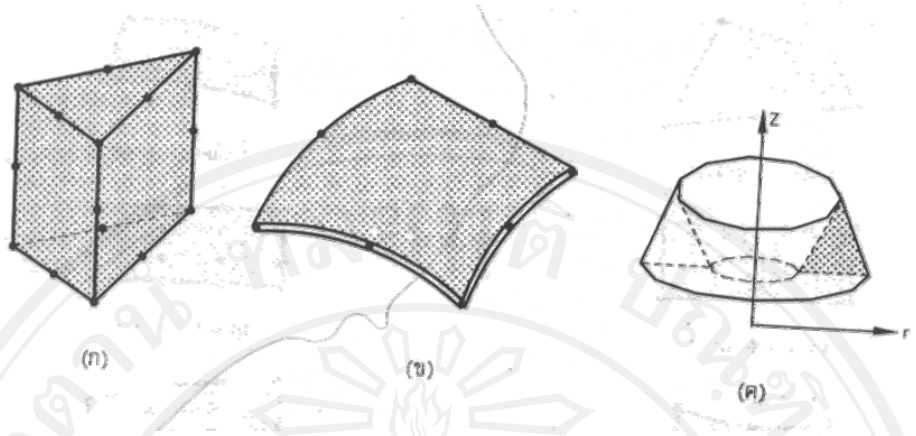
เอลิเมนต์สามมิติ จะใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาสามมิติทั่วๆไป ลักษณะของเอลิเมนต์จะเป็นสี่เหลี่ยมปริซึม และรูปกรวยสามเหลี่ยม เช่นใน ภาพที่ 3.5(ก) และ (ข) ตามลำดับ ภาพที่ 3.5(ก) เป็นเอลิเมนต์สามมิติทรง 6หน้า (Hexahedron) ชนิดด้านตรง (Linear) 8 จุดต่อ, ชนิดเส้นตรงกำลังสอง (Straight-Line Quadratic) 20จุดต่อ และชนิดเส้นโค้งกำลังสอง (Quadratic with Curve Faces) 20 จุดต่อ ส่วนภาพที่ 3.5(ข) เป็นเอลิเมนต์สามมิติทรง 4 หน้า (Tetrahedral) ชนิดด้านตรง 4 จุดต่อ ชนิดเส้นตรงกำลังสอง 10 จุดต่อ, และชนิดเส้นโค้งกำลังสอง 10 จุดต่อตามลำดับ

นอกจากเอลิเมนต์สามมิติตามที่กล่าวแล้ว ยังมีเอลิเมนต์อีกกลุ่มหนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะรูปทรงกระบอก เช่นใน ภาพที่ 3.6(ก) ปัญหาในลักษณะแผ่นโค้ง (Shell) เช่นในภาพที่ 3.6(ข) และเอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหารูปกรวยสมมาตร ซึ่งอาจจะเป็นเอลิเมนต์ชนิดสามเหลี่ยม หรือสี่เหลี่ยมหมุนรอบแกนสมมาตร (360°) เช่นรูปภาพที่ 3.6(ค) โดยทั่วไปเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจุดต่อมากๆ จะให้ผลเฉลยใกล้เคียงกับค่าแม่นตรงมากกว่าเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจำนวนจุดต่อน้อย แต่จะเพิ่มความยุ่งยากในการแก้สมการ และใช้เวลาในการคำนวณมาก (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2545) ตัวอย่าง เช่น เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสองมิติ



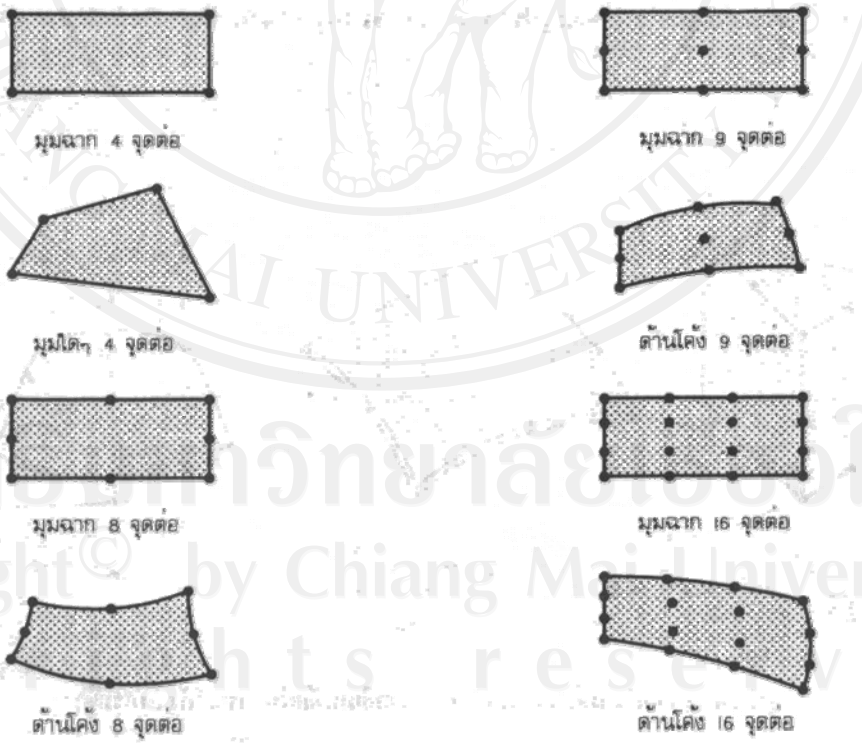
ภาพที่ 3.5 เอลิเมนต์สามมิติแบบต่างๆ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



ภาพที่ 3.6 เอลิเมนต์หลายมิติแบบต่างๆ

เอลิเมนต์ในภาพที่ 3.7 ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 4 จะให้ผลเฉลยคลาดเคลื่อนมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วย 8 และ 16 จุดต่อ เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจุดต่อมากๆ จะให้ผลเฉลยใกล้เคียงกับค่าแม่นตรงมากกว่าเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจำนวนจุดต่อน้อย

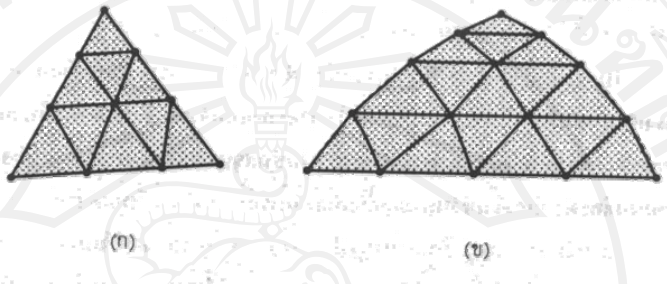


ภาพที่ 3.7 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสองมิติที่ประกอบด้วยจุดต่อต่างๆ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

3.3.2 การแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย

การวิเคราะห์ชิ้นส่วนเครื่องจักรกลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยที่เกี่ยวโยงกันด้วยจุดต่อ เพื่อความสะดวกจะพิจารณาปัญหา 2 มิติโดยเลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านตรงที่ประกอบ 3จุดต่อ เช่นในภาพที่2.13(ก) ส่วนปัญหาสามมิติก็ใช้หลักการเดียวกัน



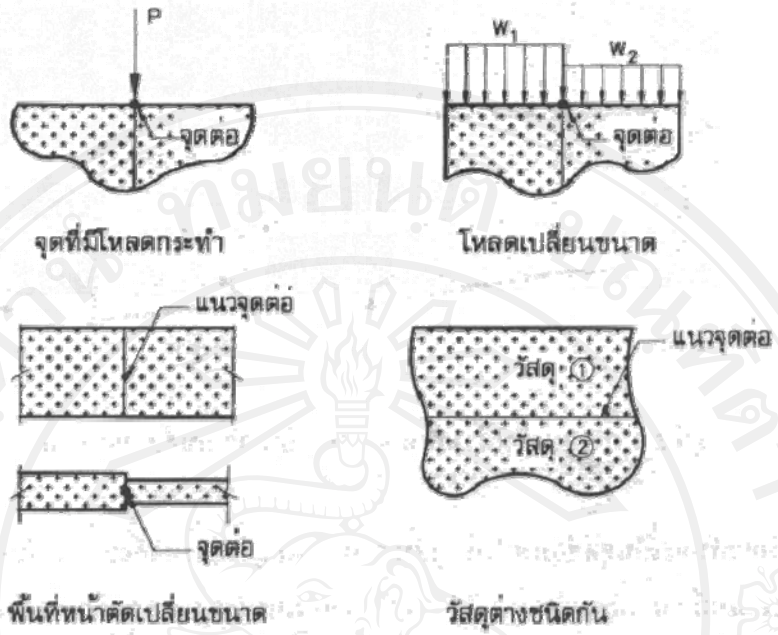
ภาพที่ 3.8 การแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยมในรูป ภาพที่ 3.8(ก) ค่อนข้างจะแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยได้ง่าย คือ กำหนดจุดต่อในแต่ละด้านของสามเหลี่ยมให้มีจำนวนเท่ากัน ลากเส้นโยงระหว่างจุดต่อจะได้จุดต่อตรงที่เส้นตัดกันเพิ่มขึ้นตามภาพที่3.8(ก) ชิ้นส่วนจะถูกแบ่งออกเป็น 9 เอลิเมนต์ แต่ละด้านจะมีสี่จุดต่อ ระยะรหว่างจุดต่อของแต่ละด้านของสามเหลี่ยมไม่จำเป็นต้องเท่ากัน ขนาดของเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ จึ่งมีขนาดแตกต่างกันตามต้องการ ถ้าเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยกัน เอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่าจะให้ผลเฉลยที่ดีที่สุด แต่ถ้าจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมใดๆ มุมภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมควรจะอยู่ระหว่าง 30° ถึง 120°

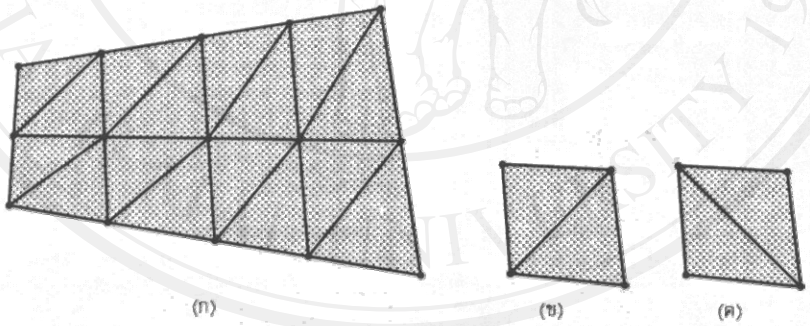
กรณีของชิ้นส่วนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านโค้ง อาจใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านตรงแทน เช่นในภาพที่ 3.8(ข) ซึ่งทำให้ขนาดของแบบจำลองคลาดเคลื่อนไปเล็กน้อยตามเส้นไข่ปลา ส่วนจำนวนของเอลิเมนต์ทั้งหมดในชิ้นส่วนจะเท่ากับ $(n-1)^2$ โดยที่ n คือจำนวนจุดต่อของแต่ละด้านของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ต้องการจะแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อย

การแบ่งชิ้นส่วนอาจจะเริ่มแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม หรือสามเหลี่ยมที่มีขนาดใหญ่ๆ ก่อน แล้วจึ่งแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยอีกครั้งหนึ่ง ตำแหน่งของจุดต่อ (Node) ภายนอกของเอลิเมนต์ย่อยควรจะอยู่ในตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วน หรือตำแหน่งที่มีโหลดกระทำ หรือตำแหน่งที่มีการใช้วัสดุต่างกัน ตำแหน่งจุดต่อเหล่านั้นดูได้จากภาพที่ 3.9

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



ภาพที่ 3.9 การแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

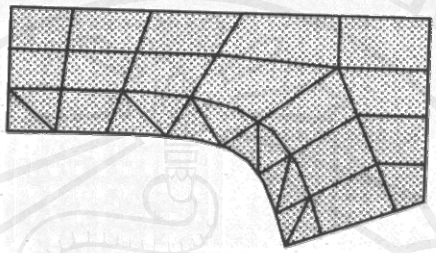


ภาพที่ 3.10 การแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

สำหรับชิ้นส่วนรูปสี่เหลี่ยมในภาพที่ 3.10(ก) การแบ่งเอลิเมนต์ย่อยๆนั้นทำได้สะดวกคือ กำหนดจุดต่อในแต่ละด้านของสี่เหลี่ยมลากเส้นระหว่างจุดต่อที่อยู่ตรงข้าม, จุดตัดของแต่ละเส้นจะเป็นจุดต่อภายในชิ้นส่วน และถ้าประสงค์จะแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยก็ทำได้ โดยลากเส้นทแยงมุมของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม การลากเส้นทแยงมุมนั้นควรจะเลือกเส้นทแยงมุมที่สั้นที่สุด เพราะจะทำให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมมีสัดส่วนใกล้สามเหลี่ยมด้านเท่ามากขึ้น ดูตัวอย่างในภาพที่ 3.10(ข) และ (ค) ในกรณีที่เลือกใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม สัดส่วนด้านยาวสุดต่อด้านสั้นสุดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมควรจะเท่ากับ 1 จึงจะทำให้ผลเฉลยใกล้เคียงกับค่าแม่นตรงมากขึ้น

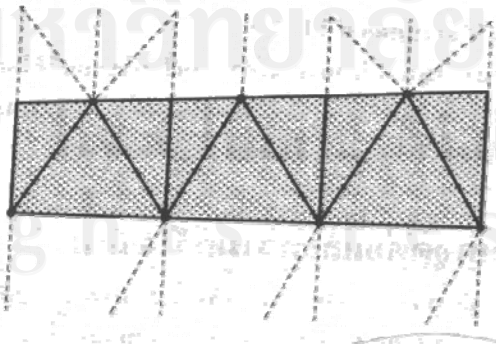
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

จำนวนจุดต่อบนด้านที่ใกล้กันของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมอาจจะแตกต่างกันแต่ในจำนวนจุดต่อที่ด้านตรงข้ามจะต้องมีจำนวนที่เท่ากัน เว้นแต่ต้องการลด หรือขยายขนาดของเอลิเมนต์ระยะระหว่างจุดต่ออาจจะแตกต่างกันซึ่งทำให้เอลิเมนต์มีขนาดเล็กใหญ่ตามต้องการจำนวนจุดต่อบนด้านประกอบมุมของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมที่ต้องแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย



ภาพที่ 3.11 การแบ่งชิ้นส่วนสี่โค้งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม และสามเหลี่ยมย่อย

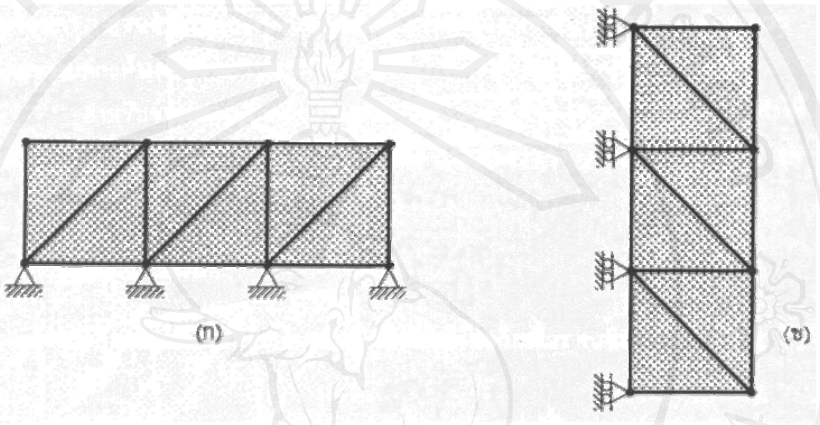
ในภาพที่ 3.11 ระยะระหว่างจุดต่อของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมจะมีขนาดต่างกัน ทั้งนี้เพื่อให้เอลิเมนต์ในบริเวณขอบที่เป็นส่วนโค้งมีขนาดเล็ก คือพยายามทำให้แบบจำลองมีขนาดใกล้เคียงกับขนาดของชิ้นส่วนจริงมากที่สุด ปกติไม่นิยมแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดเท่ากัน และมีรูปร่างเหมือนกันตลอดชิ้นส่วน เพราะบริเวณที่มีความเค้นสูง หรือบริเวณที่มีความแตกต่างของอุณหภูมิ ควรจะแบ่งให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ ส่วนบริเวณที่ไกลออกไปจะแบ่งให้มีขนาดโตขึ้น การเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์มีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน วิธีที่ง่ายที่สุดของการเปลี่ยนแปลงขนาดของเอลิเมนต์ก็คือ กำหนดให้จำนวนจุดต่อบนด้านตรงข้ามของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมให้แตกต่างกันเช่น ภาพที่ 3.12 เป็นต้น



ภาพที่ 3.12 การขยายขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

การวิเคราะห์ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็งจำเป็นต้องกำหนดลักษณะการเคลื่อนที่ของจุดต่อต่างๆด้วย โดยทั่วไปจุดต่อที่ไม่มีการเคลื่อนที่จะแทนด้วยการยึดแบบสลัก (Pin Connection) เช่น ในภาพที่ 3.13(ก) แต่ถ้าจุดต่อเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวจะแทนด้วยการยึดแบบล้อหมุนดังแสดงในภาพที่ 3.13(ข) ซึ่งชิ้นส่วนนี้สามารถเคลื่อนที่ในแนวดิ่งได้ แต่ไม่สามารถเคลื่อนที่ในแนวระดับได้ ส่วนการที่จะกำหนดให้จุดต่อเคลื่อนที่อย่างไรนั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา ซึ่งจะต้องศึกษากันอย่างละเอียด



ภาพที่ 3.13 การยึดจุดต่อ (ก) ยึดแบบสลัก (ข) ยึดล้อแบบหมุน

3.3.3 ข้อแนะนำสำหรับการจำลองแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2545)

ตามที่กล่าวมาแล้ว การวิเคราะห์ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็งด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เราจำเป็นต้องกำหนดแบบจำลองขึ้นให้เหมือนกับรูปร่างลักษณะเดิมของปัญหาให้มากที่สุด อย่างไรก็ตามข้อเสนอแนะต่อไปนี้จะช่วยให้การกำหนดแบบจำลองมีประสิทธิภาพสูงขึ้น หรือให้ผลการคำนวณที่ใกล้เคียงกับค่าแม่นตรง หรือทำให้เชื่อมั่นได้ว่าผลการคำนวณมีความเป็นไปได้ตามสภาพการใช้งานจริงของชิ้นส่วนนั้น (ในกรณีที่ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงมาเปรียบเทียบได้) ข้อเสนอแนะดังกล่าวคือ

1. ในกรณีที่แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างกัน ความแตกต่างของขนาด (โดยปริมาตร) ของเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกันไม่ควรเกินสามเท่า
2. พยายามใช้เอลิเมนต์ที่มีรูปร่างหรือสัดส่วนของรูปร่างธรรมดาให้มากที่สุดคือพยายามทำให้สัดส่วนของรูปร่างเอลิเมนต์ด้านยาวสุดต่อด้านสั้นสุดไม่เกิน 10:1 เอลิเมนต์ที่มีสัดส่วนดังกล่าวใกล้เคียงกันจะให้ผลเฉลยแม่นยำมากขึ้น ส่วนมุมภายในเอลิเมนต์ เช่น ในกรณีของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม มุมไม่ควรเกิน 150° และ ไม่ควรน้อยกว่า 30° และจุดต่อ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ภายในของด้านของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม (ในกรณีจำเป็นต้องกำหนดจุดต่อภายใน) ควรจะอยู่ในตำแหน่งที่ไม่น้อยกว่า 1/3 ของด้านของสี่เหลี่ยม

3. การเลือกใช้เอลิเมนต์ต้องพยายามให้มีการต่อเนื่องของการกระจัดระหว่างเอลิเมนต์ อาทิเช่น ไม่ควรเชื่อมต่อเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสอง ซึ่งประกอบด้วย 8 จุดต่อ เข้ากับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย 4 จุดต่อ 2 เอลิเมนต์ เพราะขณะยืด/หดตัวจะเกิดช่องว่างระหว่างเอลิเมนต์ขึ้น ทั้งนี้เพราะการกระจัดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมกำลังสอง และอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเชิงเส้น จำลองมาจากฟังชันก์การกระจัดที่มีกำลังต่างกัน
4. ใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กตรงบริเวณที่มีความแตกต่างของความเค้นสูง เช่น ตรงบริเวณที่คาดว่าความเค้นจะมีความเค้นสูง ส่วนบริเวณที่มีความแตกต่างของความเค้นต่ำ ควรใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น
5. การกำหนดหมายเลขจุดต่อของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ต้องพยายามให้ความกว้างแถบ หรือครึ่งความกว้างแถบมีค่าน้อยสุด
6. พยายามใช้ประโยชน์จากการสมมาตรของรูปร่างโครงสร้าง หรือชิ้นส่วน และการสมมาตรของโหลด เพื่อให้ได้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กที่สุด
7. การกำหนดเงื่อนไขขอบ หรือเงื่อนไขบังคับของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ จะต้องคำนึงถึงสภาพความเป็นจริงของปัญหา

3.3.4 ขั้นตอนของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตามที่กล่าวมาแล้ว เราสามารถจะใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาของโครงสร้าง เช่น หาการกระจัด, ความเค้น-ความเครียด และใช้วิธีวิเคราะห์ปัญหาของการถ่ายเทความร้อน การไหลของของเหลวเป็นต้น ในที่นี้จะเน้นการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิเคราะห์ปัญหาของโครงสร้างทางกล และชิ้นส่วนของเครื่องจักรกลที่ซับซ้อนที่ไม่สามารถจะหาผลเฉลยจากวิธีธรรมดา ๆ ได้

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง สามารถหามาได้จากวิธีพื้นฐาน 2 วิธีคือวิธีแรงหรือวิธียืดยุ่น (Force or Flexibility Method) และ วิธีการกระจัดหรือวิธีสทิฟเนส (Displacement or Stiffness Method) วิธีแรกจะสามารถหาแรงภายใน และ แรงปฏิกริยาโดยอาศัยสมการสมดุลของแรง และ สมการเงื่อนไขการกระจัด (Compatibility Equation)

ส่วนวิธีที่สองจะสามารถหาการกระจัดที่สมมุติขึ้นโดยมีเงื่อนไขของความต่อเนื่องของเอลิเมนต์ที่แต่ละจุดต่อ หรือที่ขอบบริเวณที่สัมผัสกันไม่ว่าก่อน และหลังโหลดกระทำยังคงมีความ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ต่อเนื่องเหมือนเดิม ดังนั้นสมการสมดุลจะเขียนอยู่ในเทอมของการกระจัดของแต่ละจุดต่อ และค่าของการกระจัดก็สามารถจะหาได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างแรง และการกระจัด

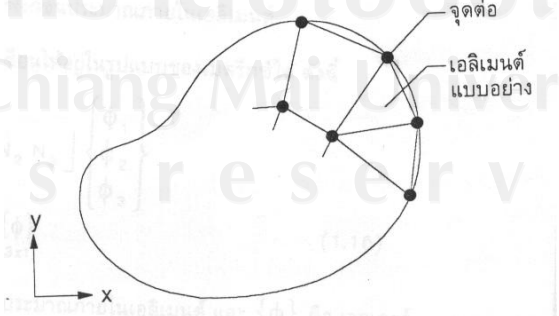
การวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น นิยมใช้วิธีการกระจัด หรือวิธีสทิฟเนสหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์มากกว่า ทั้งนี้จะสามารถหาสมการสมดุลและหาผลเฉลยได้สะดวกกว่า รวมทั้งโปรแกรมของคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวส่วนใหญ่ก็นิยมใช้วิธีการกระจัดด้วย

หลักการทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือ จะแบ่งโครงสร้างออกเป็นส่วนย่อย ๆ เช่นภาพที่ 3.2 ซึ่งเรียกว่า ไฟไนต์เอลิเมนต์ ฟังก์ชันการกระจัด (Displacement Function) ที่นำมาแทนเอลิเมนต์จะต้องเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง แต่ละเอลิเมนต์จะโยงกันด้วยจุดต่อ (Node) หรือเส้นขอบ หรือผิวรอบเอลิเมนต์สัมผัสกัน และ อาศัยคุณสมบัติทางกล ของวัสดุที่ใช้ทำโครงสร้าง หรือชิ้นงาน เราสามารถจะหาการกระจัด, ความเค้น-ความเครียด ที่เกิดขึ้นที่จุดต่อต่างๆของแต่ละเอลิเมนต์ที่ประกอบเป็นโครงสร้าง หรือชิ้นงาน

ขั้นตอนต่างๆ ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง หรือชิ้นส่วน เช่น สปริง, ท่อนโลหะ, เพลา, โครงข้อหมุน, โครงข้อแขง, แผ่นโลหะ, ถังความดัน ฯลฯ ภายใต้สภาวะต่างๆของโหลดซึ่งมีขั้นตอนทั่วๆไปคล้ายๆกัน

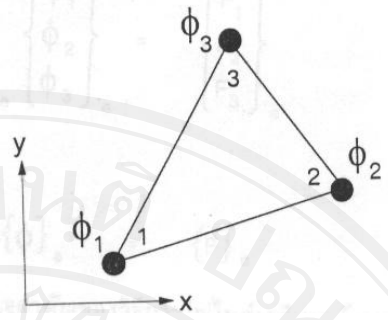
เพื่อให้มีความเข้าใจมากยิ่งขึ้นจึ่งมีการแบ่งรูปแบบวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ออกเป็น 6 ขั้นตอนใหญ่ๆ ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการจะหาผลลัพธ์นั้นออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในภาพที่ 3.14 ขอบเขตดังกล่าวอาจเป็นขอบเขตของปัญหาชนิดต่างๆกัน เช่น ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง (Elasticity Problem) ปัญหาที่เกี่ยวกับอุณหภูมิ และความร้อน (Thermal Problem) รวมทั้งปัญหาของไหล (Fluid Problem)



ภาพที่ 3.14 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



ภาพที่ 3.15 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่าง ประกอบด้วย 3 จุดต่อ โดยมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ ณ ตำแหน่งที่จุดต่อ

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation Functions) เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยม ภาพที่ 3.15 เอลิเมนต์ดังกล่าวประกอบด้วยสามจุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ 3 ดังแสดงในภาพที่ 3.15 โดยที่จุดต่อเหล่านี้นั้นเป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (Nodal Unknown) ซึ่งคือ ϕ_1 , ϕ_2 และ ϕ_3 ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อเหล่านี้อาจเป็นค่าการยืด หรือหดตัว (Displacement) หากเราทำปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง หรือ อาจเป็นค่าอุณหภูมิหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรือไม่ก็อาจเป็นความเร็วของของเหลวหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับของไหล เป็นต้น ลักษณะการกระจายตัวของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายใน และตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ ดังนี้

$$\phi(x,y) = N_1(x,y)\phi_1 + N_2(x,y)\phi_2 + N_3(x,y)\phi_3 \tag{3.1}$$

โดย $N_i(x,y)$, $i = 1, 2, 3$ คือฟังชันก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์

สมการ (3.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\phi(x,y) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \underset{(1x3)}{\lfloor N \rfloor} \underset{(3x1)}{\{\phi\}} \tag{3.2}$$

โดยที่ $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์เมตริดซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้นๆ ในที่นี้ $\lfloor \ \rfloor$ แสดงถึงเมตริกซ์แถวนอน (Row Matrix) และ $\{ \ \}$ แสดงถึงเมตริกซ์แถวตั้ง (Column Matrix)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการเอลิเมนต์ (Element Equation) ดังตัวอย่าง เช่น สมการของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่าง ดังแสดงในภาพที่2.20 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \tag{3.3}$$

ซึ่งเขียนย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \tag{3.4}$$

ขั้นตอนที่3 นี้ ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้าสมการของเอลิเมนต์ที่อยู่ในรูปแบบของสมการ (3.3) สามารถทำได้โดย

ก. วิธีการโดยตรง (Direct approach)

ข. วิธีการแปรผัน (Variation approach)

ค. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals)

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน ก่อให้เกิดระบบสมการพร้อมกันขึ้นในรูปแบบ ดังนี้

$$\sum (elementequations) \Rightarrow [K]_{sys} \{\phi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \tag{3.5}$$

ขั้นตอนที่5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) ลงในสมการ (3.5) แล้วจึงแก้สมการนั้นเพื่อหา $\{\phi\}_{sys}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (Nodal Unknown) ซึ่งอาจจะเป็นค่าของการเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่างๆของโครงสร้าง หรือค่าของอุณหภูมิที่จุดต่างๆหากเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นค่าของความเร็วของของเหลวหากเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการไหล เป็นต้น

ขั้นตอนที่6 เมื่อคำนวณค่าต่างๆที่จุดต่อออกมาได้แล้ว ก็สามารถทำการหาค่าอื่นๆที่ต้องการทราบต่อไปได้ เช่น เมื่อรู้ค่าการเคลื่อนตัว (Displacement) ณ ตำแหน่งต่างๆของโครงสร้าง เราสามารถนำไปใช้ในการหาความเครียด (Strain) และ ความเค้น (Stress) ได้ต่อไป หรือเมื่อรู้อุณหภูมิที่จุดต่างๆก็สามารถคำนวณหาปริมาณการถ่ายเทความร้อนได้ หรือ เมื่อรู้ความเร็วของของไหลก็สามารถนำไปคำนวณหาปริมาณอัตราการไหลทั้งหมดได้ เป็นต้น

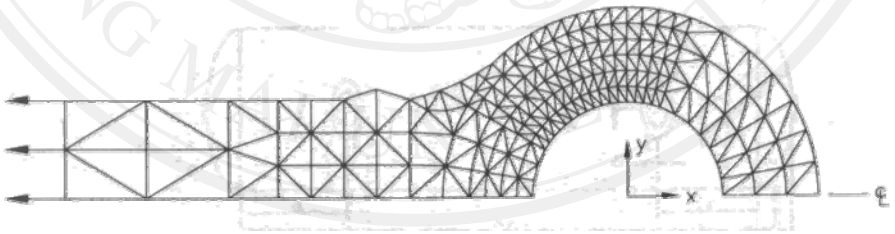
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

จากขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอนนี้ จะเห็นได้ว่า วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็น วิธีที่มีระเบียบแบบแผนเป็นขั้นเป็นตอน โดยมีหัวใจที่สำคัญคือ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (ขั้นตอนที่3) ซึ่งเราควรจะศึกษารายละเอียดทางคณิตศาสตร์เพิ่มเพื่อความเข้าใจมากขึ้นถ้าสนใจในวิธีการสร้าง และคำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์

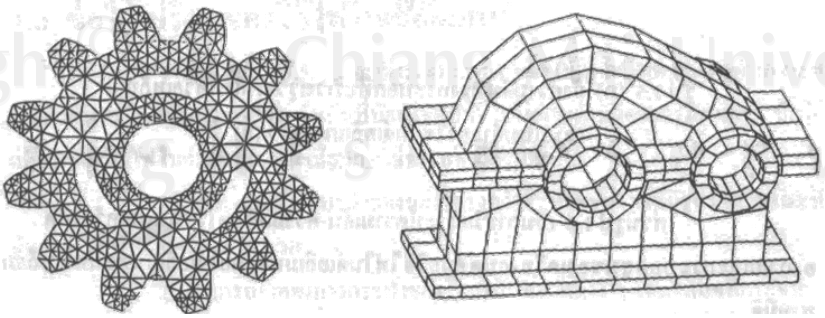
3.4 การประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เราจะสามารถใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ที่เป็นโครงสร้าง และที่ไม่ใช่โครงสร้างได้อย่างกว้างขวาง ตัวอย่างเช่น ปัญหาเกี่ยวกับโครงสร้างจะประกอบด้วย การวิเคราะห์ความเค้น ซึ่งรวมทั้งการวิเคราะห์โครงข้อหมุน โครงข้อแข็ง ความเข้มข้นของความเค้นตรงบริเวณที่เป็นรู เป็นรอยบาก หรือตรงบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงลักษณะรูปร่าง นอกจากนี้ยังใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์การโก่งของเสา การล้า (Fatigue) และการสั่นสะเทือนของระบบโครงสร้าง และระบบเครื่องจักรกลด้วย

ส่วนใหญ่ที่ไม่ใช่โครงสร้างเช่น การถ่ายเทความร้อน การไหลของของเหลว รวมทั้งการซึมผ่านวัสดุพรุน และการต่างศักย์ของแม่เหล็กไฟฟ้า ก็สามารถใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะปัญหาเหล่านั้นได้เป็นอย่างดี นอกจากนั้นยังนิยมวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาทางด้านชีววิศวกรรม เช่น วิเคราะห์การทำงานของหัวใจ ตา ข้อต่อต่าง ๆ ของร่างกาย เป็นต้น



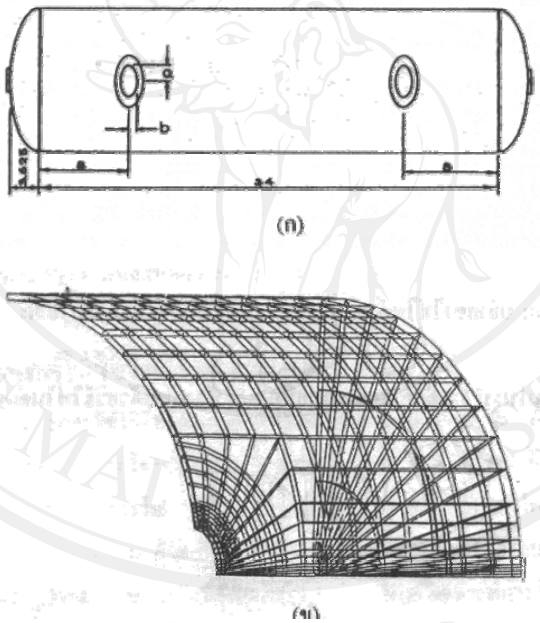
ภาพที่ 3.16 การออกแบบปลายก้านกระบอกไฮดรอลิคด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



ภาพที่ 3.17 การออกแบบเฟือง และห้องเฟืองด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

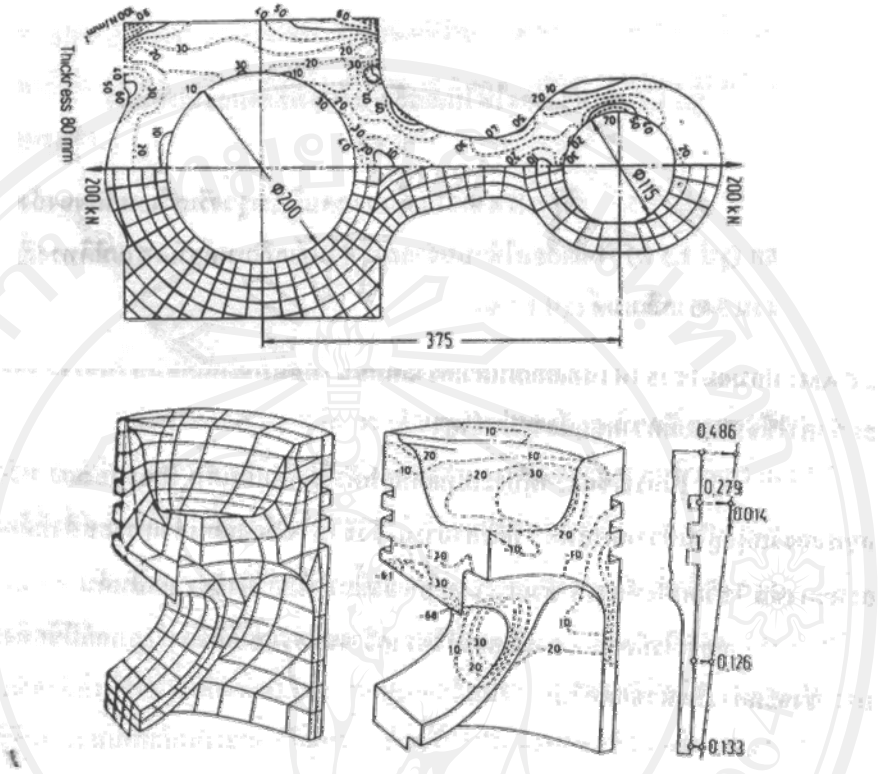
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ภาพที่ 3.16 เป็นตัวอย่างการออกแบบปลายก้านกระบอกไฮดรอลิคด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสองมิติ 297 เอลิเมนต์ 120 จุดต่อ และเนื่องจากก้านกระบอกไฮดรอลิคอยู่ในลักษณะสมมาตร จึงใช้วิธีการวิเคราะห์เพียงครึ่งหนึ่ง และสิ่งที่เราต้องการหาก็คือบริเวณใดของปลายก้านกระบอกจะมีความเค้นสูงสุดในขณะที่ก้านกระบอกมีโหลดกระทำ ส่วนในภาพที่ 3.17 คือการออกแบบเฟือง และห้องเฟืองด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นการหาความเค้นสูงสุดบริเวณรูวงรีเสริมเหล็กของถังความดันทรงกระบอก ภาพที่ 3.18(ก) โดยเลือกใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ชนิดสามมิติทรงสี่เหลี่ยม 8 จุดต่อ จำนวน 346 เอลิเมนต์ ภาพที่ 3.18(ข) ส่วนภาพที่ 3.19 เป็นการวิเคราะห์หาความเค้น-ความเครียดในก้านสูบเครื่องอัดอากาศ และกระบอกสูบของเครื่องยนต์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์ชนิดสี่เหลี่ยมสามมิติ



ภาพที่ 3.18 การหาความเค้นบริเวณรูวงรีเสริมเหล็กของถังความดันทรงกระบอกด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

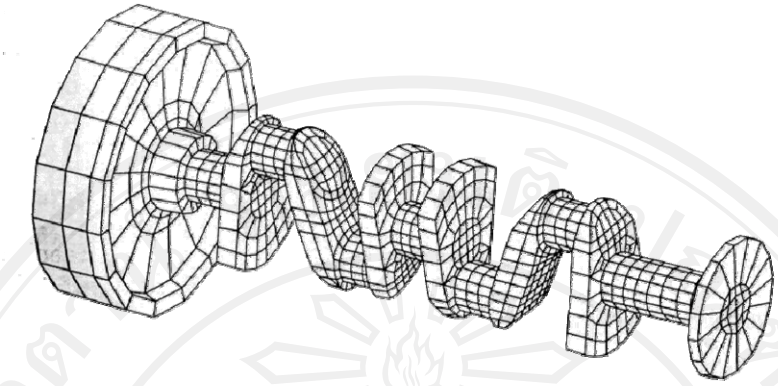
ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



ภาพที่ 3.19 การวิเคราะห์หาความเค้น-ความเครียดในก้านสูบเครื่องอัดอากาศ และกระบอกสูบของเครื่องยนต์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

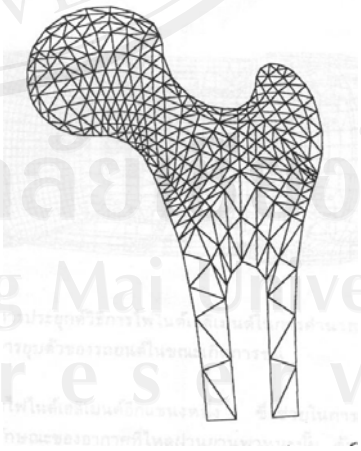
เนื่องจากรูปแบบทางชิ้นงานต่างๆในทางวิศวกรรมโดยปกติจะมีความซับซ้อน วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จึ่งมีบทบาทเป็นอย่างมากในการช่วยแก้ปัญหาต่างๆ นับตั้งแต่ปัญหาการยืดหยุ่นของของแข็ง การถ่ายเทความร้อนในวัตถุ ตลอดจนการไหลของของไหล โดยการศึกษาวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ จะทำให้เรามองเห็นภาพรวม และประสิทธิภาพของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถนำมาใช้ประยุกต์กับงานชนิดต่างๆกันได้ หากปรากฏการที่เกิดขึ้นกับงานชนิดนั้นๆสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ ประสิทธิภาพของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ควบคู่ไปกันกับวิวัฒนาการทางคอมพิวเตอร์ทำให้เราสามารถคำนวณหาปรากฏการที่เกิดขึ้นได้โดยสะดวก และในขณะเดียวกันช่วยลดค่าใช้จ่ายที่จำเป็นต้องใช้สำหรับการทดลองดังที่เคยปฏิบัติกันมา

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved



ภาพที่ 3.20 การวิเคราะห์หาความเค้น - ความเครียดของเพลาข้อเหวี่ยง
ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาด้วยวิธีใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ในสมัยแรกๆ เริ่มปรากฏให้เห็นในงานด้านกลศาสตร์ของแข็ง (Solid Mechanics) และโครงสร้างเป็นส่วนใหญ่ เนื่องจากปรากฏการต่างๆที่เกิดขึ้นในงานทางด้านนี้ สามารถทำความเข้าใจได้โดยไม่ยากหนัก วิวัฒนาการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทางด้านของแข็งนี้ในปัจุบันสามารถนำไปใช้กับการออกแบบชิ้นงานที่มีรูปร่างซับซ้อน เช่น เพลาข้อเหวี่ยงของเครื่องยนต์ดังแสดงในภาพที่ 3.20 เพื่อการคำนวณหาความยืดหยุ่น ความเครียดและความเค้นที่เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งต่างๆของเพลาข้อเหวี่ยงนั้น รูปดังกล่าวแสดงการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสามมิติจำนวนมากที่มีขนาดต่างๆกัน ประกอบกันขึ้นมา และสามารถจำลองรูปแบบของเพลาดังกล่าวได้อย่างเที่ยงตรง



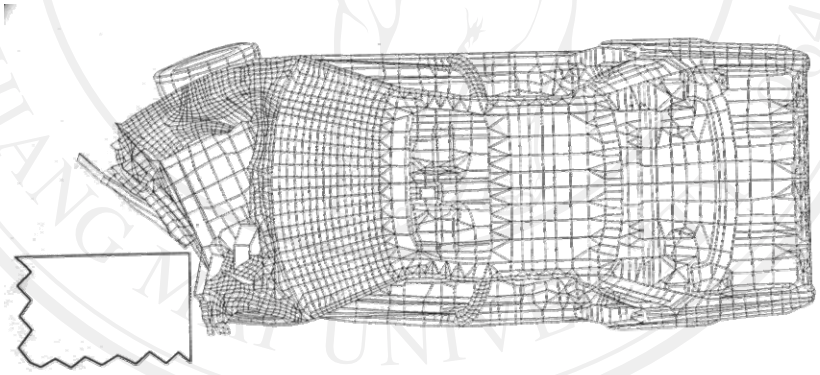
ภาพที่ 3.21 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิ
เมนต์สำหรับกระดูก

เนื่องจากวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทำให้การประยุกต์ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ขยายวง

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

กว้างออกไปในงานที่นอกเหนือไปจากงานทางด้านวิศวกรรม เช่นในงานด้านการแพทย์ เป็นต้น ภาพที่ 3.21 แสดงรูปแบบจำลองของไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้หาการกระจายของความเค้นในกระดูก นอกเหนือจากนั้นวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ยังได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในรูปแบบอื่นๆ อาทิเช่น การคำนวณหาลักษณะการไหลของเลือดในเส้นเลือด และในหัวใจ รวมทั้งความกดดันที่เกิดขึ้นตามตำแหน่งต่างๆที่เส้นเลือด เป็นต้น

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์มีส่วนช่วยเป็นอย่างมากในการศึกษา และออกแบบยานพาหนะเพื่อก่อให้เกิดประสิทธิภาพที่สูงขึ้นรวมทั้งเพื่อความปลอดภัยที่สูงสุด และในขณะเดียวกันก็เพื่อช่วยลดค่าใช้จ่ายที่ต้องใช้ในการทำการทดลอง ภาพที่ 3.32 แสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ และ การยุบตัวของโครงสร้างรถยนต์ในขณะที่เกิดการชนขึ้นทางชึกหนึ่งของด้านหน้า การออกแบบโครงสร้างที่เหมาะสมเป็นสิ่งที่สำคัญต่อความปลอดภัย ดังตัวอย่างเช่น คานที่วางตัวตามแนวยาวของตัวรถควรให้เกิดแต่การหดตัวที่สั้นลงในขณะเกิดการชนโดยให้มีการโก่งงอขึ้นที่น้อยที่สุด เป็นต้น การออกแบด้วยการทดลองเพื่อให้เกิดปรากฏการณ์ที่ต้องการจะชิ้นเปลืองเวลา และค่าใช้จ่ายมากเมื่อเปรียบเทียบกับการออกแบบด้วยการคำนวณ ซึ่งสามารถทำการเปลี่ยนรูปแบบได้โดยง่าย



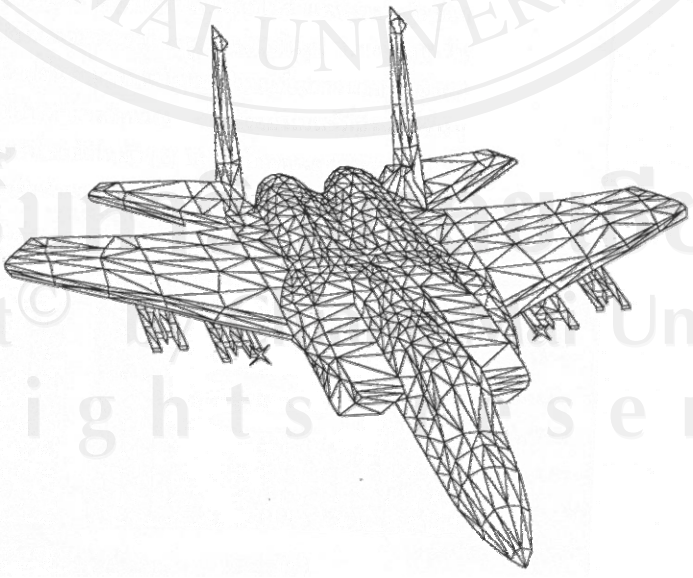
ภาพที่ 3.32 รูปแบบจำลองการยุบตัวของโครงสร้างรถยนต์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์อีกแขนงหนึ่ง ซึ่งช่วยในการออกแบบยานพาหนะก็คือ การคำนวนลักษณะของอากาศที่ไหลผ่านยานพาหนะนั้น ตัวอย่างเช่น การออกแบบรถยนต์ที่มีรูปร่างลักษณะที่จะก่อให้เกิดแรงต้านทางจากอากาศที่ต่ำสุด ในปัจจุบัน สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับการไหล และวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำมาใช้ช่วยในการคำนวณหาสภาวะของการไหลรวมทั้งความกดดันที่เกิดขึ้นตามตำแหน่งต่างๆของตัวรถได้ ผู้ออกแบบสามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างลักษณะรูปแบบตัวรถได้โดยง่าย และ รวดเร็วเพื่อที่จะได้รูปแบบที่จะก่อให้เกิดประสิทธิภาพที่สูงที่สุดก่อนที่จะนำไปสร้างเป็นรูปแบบจริงเพื่อใช้ในการทดลอง และทำการผลิตต่อไป

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

การประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับทางด้านยานพาหนะอีกแขนงหนึ่ง ซึ่งเริ่มใช้กันมากในปัจจุบันก็คือ การคำนวณหาอุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆบนเครื่องยนต์ อุณหภูมิที่สูงและ มีการเปลี่ยนแปลงมากตามตำแหน่งต่างๆบนเครื่องยนต์จะก่อให้เกิดความเค้นที่สูงตามมา วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่อธิบายผ่านมานั้น จะช่วยในการคำนวณปรากฏการต่างๆที่เกิดขึ้นได้เพื่อช่วยในการออกแบบเครื่องยนต์ที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนให้เกิดความเค้นที่ต่ำที่สุด

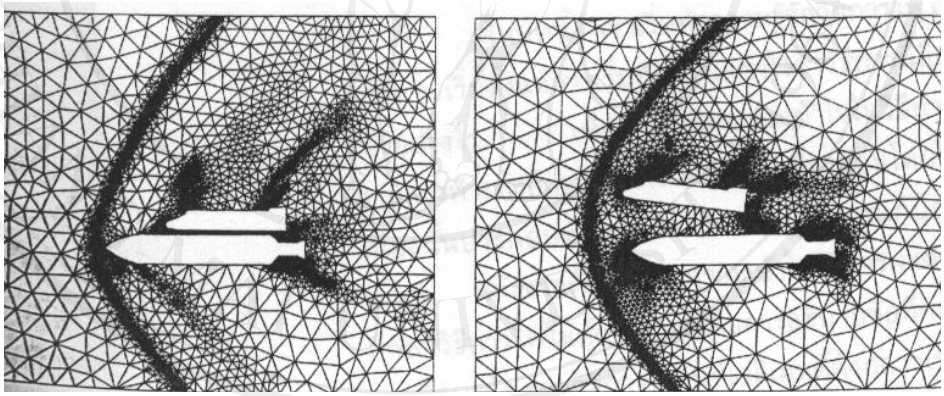
กระบวนการการคำนวณความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิบนเครื่องยนต์ของรถยนต์เป็นการรวมสมการทางด้านการยืดหยุ่นของของแข็ง และการถ่ายเทความร้อนภายในของแข็งนั้นเข้าด้วยกันโดยการใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์เพียงวิธีการเดียว กระบวนการดังกล่าวก่อให้กุดประสิทธิภาพที่มีการคำนวณสูง เนื่องสมการต่างๆที่ประดิษฐ์ขึ้นมาจากทั้งสองแขนงนั้นสอดคล้องกัน อีกทั้งการแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างปัญหาต่างแขนงกันนั้นสามารถทำได้โดยสะดวก หลักการดังกล่าวได้ถูกนำมาใช้ในการออกแบบเครื่องบินรบดังแสดงในภาพที่ 3.33 ซึ่งต้องทำการบินด้วยความเร็วสูงอันจะก่อให้เกิดผลกระทบซึ่งกันและกันระหว่างการไหลของอากาศกับโครงสร้างของเครื่องบิน ในขณะที่บินด้วยความเร็วสูง การไหลของอากาศก่อให้เกิดความกดดันสูงบนปีกของเครื่องบินทำให้ปีกเกิดการเสียรูปไปจากรูปร่างดั้งเดิม การที่ปีกเกิดการเสียรูปไปนั้นมีผลกระทบย้อนกับไปทำให้สภาวะการไหลผ่านปีกนั้นเปลี่ยนแปลงไป การคำนวณหาปรากฏการที่เกิดขึ้นบนโครงสร้าง และสภาวะการไหลของอากาศจึ่งต้องกระทำควบคู่กันไป การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาที่มีผลกระทบขึ้นต่อกัน และกันเช่นนี้จึ่งก่อให้เกิดความสะดวกเป็นอย่างมากในการลดขั้นตอน และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ



ภาพที่ 3.33 ตัวอย่างวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในนวัตกรรมการบิน

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ตัวอย่างของผลกระทบซึ่งขึ้นอยู่ต่อกัน และกันระหว่างสภาวะของการไหล และลักษณะของรูปแบบของโครงสร้างที่เปลี่ยนแปลงไปที่เห็นได้ชัดอีกตัวอย่างหนึ่งก็คือ ตัวอย่างของการแยกตัวของกระสวยอวกาศ (Space Shuttle) ออกจากถังเชื้อเพลิงภายนอก (External Fuel Tank) ดังแสดงในภาพที่ 3.34 การแยกตัวดังกล่าวจะเกิดขึ้นหลังจากที่ทั้งระบบได้ถูกยิงขึ้นไปจากพื้นดิน 8 นาทีครึ่ง ที่ความสูงประมาณ 110 กิโลเมตร และ มีความเร็วประมาณ 2 เท่าของความเร็วเสียง ที่ความเร็วนี้จะเกิดสภาวะการเปลี่ยนแปลงของการไหลของอากาศที่ค่อนข้างซับซ้อนอันประกอบด้วยคลื่นช็อคในลักษณะต่างๆเพื่อความแม่นยำของผลลัพธ์ที่จะได้จากการคำนวณ รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จึงจำเป็นต้องประกอบด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กเป็นจำนวณมากในตำแหน่งของคลื่นซ็อก และตามบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของภาวะอากาศสูง ดังแสดงในภาพที่ 3.34(ก) ในขณะเดียวกันเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้นสามารถใช้ได้ในบริเวณที่สภาวะอากาศมีการเปลี่ยนแปลงน้อย เพื่อช่วยลดเวลาในการทำการคำนวณ การจัดเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างกันตามตำแหน่งต่างๆนั้นจำเป็นต้องทำโดยอัตโนมัติ เพราะลักษณะสภาวะของอากาศที่เกิดขึ้นกับปัญหาเช่นนี้ จะมีลักษณะซับซ้อน และไม่สามารถทราบได้ล่วงหน้า



(ก) (ข)

ภาพที่ 3.34 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของสภาวะอากาศรอบกระสวยอวกาศ

ภาพที่ 3.34 (ข) แสดงรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของสภาวะอากาศรอบกระสวยอวกาศหลังเกิดการแยกตัวจากถังเชื้อเพลองภายนอก ตำแหน่งของเอลิเมนต์นั้นแตกต่างไปจากภาพที่ 3.34(ก) โดยเปลี่ยนแปลงไปตามการเปลี่ยนแปลงของสภาวะอากาศที่เกิดขึ้น เพื่อที่จะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่แม่นยำ และขณะเดียวกันเพื่อที่จะใช้เวลาในการคำนวณที่น้อยที่สุด

ในปัจจุบัน การพัฒราวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ยังคงรุดหน้าไปอย่างรวดเร็วเนื่องจากวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำไปประยุกต์กับงานในแขนงต่างกันได้อย่างมีประสิทธิภาพ วิธีการดังกล่าวจึงถูกนำไปใช้กับงานในหลายๆแขนง โดยเฉพาะแขนงต่างๆที่มีผลกระทบซึ่งกัน และกัน

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

อาทิเช่น ในการออกแบบเครื่องยนต์ของเครื่องบินสมัยใหม่ที่บินเร็วกว่าเดิมเกิน 10 เท่าขึ้นไป วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาสภาวะอากาศที่เกิดขึ้นหน้าเครื่องยนต์ ความร้อนบนเครื่องยนต์อันเกิดจากการเสียดสีกับอากาศ อุณหภูมิของเครื่องยนต์ที่เปลี่ยนแปลงไป การเสียรูปและ ความเค้นของเครื่องยนต์ที่เกิดขึ้นตามมา รวมทั้งผลกระทบซึ่งกันและกัน เช่น การเสียรูปไปจากรูปเดิมของเครื่องยนต์หลังจากที่เครื่องยนต์มีอุณหภูมิสูงขึ้นเป็นผลย้อนกลับไปทำให้สภาวะการแปรปรวนของอากาศเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม เป็นต้น

3.5 ข้อดีของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากหัวข้อที่ได้กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่า เราสามารถใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ปัญหาต่างๆได้อย่างกว้างขวาง จึงเป็นที่นิยมใช้กันทั่วไปในงานด้านวิศวกรรมศาสตร์ ข้อได้เปรียบของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีธรรมดามีดังนี้คือ

1. สามารถสร้างแบบจำลองของโครงสร้าง หรือชิ้นงานที่มีรูปร่างลักษณะที่เป็นซับซ้อนได้เป็นอย่างดี และ สะดวก
2. สามารถจำลองการกระทำของโหลดในสภาพต่างๆได้ เช่น โหลดที่กระจายไม่สม่ำเสมอได้ใกล้เคียงกับสภาพจริง
3. ใช้วิเคราะห์โครงสร้าง หรือชิ้นส่วนระบบเครื่องจักรกลที่ประกอบด้วยวัสดุต่างชนิดกันได้โดยไม่มีความยุ่งยาก
4. สามารถใช้วิเคราะห์ปัญหา ไม่ว่าเงื่อนไขขอบ, เงื่อนไขบังคับ, และจุดรองรับ จะอยู่ในลักษณะใดๆ
5. สามารถจะเลือกขนาดของเอลิเมนต์ที่บริเวณใด บริเวณหนึ่งให้มีใหญ่ หรือเล็กได้ตามความจำเป็น
6. ในการออกแบบชิ้นส่วน หรือระบบสามารถจะเปลี่ยนพารามิเตอร์ต่างๆได้สะดวก และยังประหยัดเวลา และค่าใช้จ่ายด้วย
7. ในการออกแบบ และผลิตชิ้นส่วนเครื่องจักรกลสมัยใหม่ มักนิยมใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์ก่อน ก่อนที่จะผลิตชิ้นส่วนจริง ซึ่งทำให้ประหยัดค่าใช้จ่าย และ มีความถูกต้องแม่นยำสูง
8. ในกรณีของวัสดุประเภทยืดหยุ่นตัวไม่เป็นเชิงเส้น หรือการยืดหยุ่นของวัสดุในช่วงพลาสติก ก็ยังสามารถใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์สิ่งที่ต้องการได้สะดวก เช่น ใช้วิเคราะห์การล้าตัว และ Creep ของชิ้นส่วนเครื่องจักรกล เป็นต้น

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์โครงสร้าง หรือ ระบบเครื่องจักรกลก็มีข้อพึงระวังอยู่บ้าง ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

3.5.1 ข้อควรระวังของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ผลเฉลยของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะถูกต้องมากน้อยเพียงใด จะขึ้นอยู่กับ สามประการหลัก คือ ประการแรก การกำหนดรูปร่างของเอลิเมนต์ให้ใกล้เคียงกับรูปร่างลักษณะจริงของชิ้นงานได้มากน้อยเพียงใด ประการที่สอง การประมาณพฤติกรรมของเอลิเมนต์ได้ถูกต้องตามสภาพที่แท้จริงหรือไม่ และประการสุดท้ายคือ ความละเอียดในการคำนวณตัวเลขที่มีค่าน้อยๆของเครื่องคอมพิวเตอร์

การกำหนด หรือแบ่งเอลิเมนต์ย่อยๆ ให้สอดคล้องกับรูปร่างลักษณะจริงของชิ้นงานได้มากเท่าไร ก็ยิ่งจะทำให้ผลเฉลยถูกต้องแม่นยำได้ขึ้นเท่านั้น เช่นถ้าต้องการวิเคราะห์ความเค้นในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลาง และมีโหลด P กระทำตามภาพที่ 3.2(ก) โดยอาศัยหลักการสมมาตร แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของแผ่นโลหะควรจะใช้พื้นที่เพียงหนึ่งในสี่ของพื้นที่ทั้งหมด เช่น แบบจำลองในภาพที่ 3.2(ข, ค และ ง) ส่วนเอลิเมนต์ย่อย ๆ บริเวณรู ควรจะมีขนาดเล็กมากๆ เพื่อสามารถจะแทนส่วนโค้งของรูปให้ได้มากที่สุด เช่น ภาพที่ 3.2(ค) และ อาจจะเลือกใช้เอลิเมนต์ที่สามารถแทนส่วนเว้า ส่วนโค้งของรู หรือเลือกเอลิเมนต์ที่สามารถแทนการกระจัดในเชิงเส้นโค้งได้ เช่นเลือกใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านโค้ง ดังเช่น ภาพที่ 3.2(ง)

ส่วนการได้มาของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะใช้ในการวิเคราะห์ อาจจะไม่สอดคล้องกับการยืดอย่างต่อเนื่องของวัตถุ เช่น ถ้าเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีการยืดตัวเชิงเส้น เอลิเมนต์ชนิดนี้จะให้ค่าแม่นตรง ถ้าปัญหาเป็นแบบท่อนโลหะที่รับแรงดึงแรงอัด แต่ถ้าท่อนโลหะเดียวกันรับแรงกระจายเนื่องจากมวล การกระจัดที่เกิดขึ้นภายในท่อโลหะจะเป็นแบบสมการกำลังสอง และถ้ายังคงใช้เอลิเมนต์เชิงเส้นตรงก็จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นในผลลัพธ์ ดังนั้น การเลือกเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับลักษณะของปัญหา และ การเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กจะช่วยลดความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยได้

ส่วนการคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขในการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ และวิธีอินทีเกรทเชิงตัวเลขนั้น จะขึ้นอยู่กับขีดความสามารถของเครื่องคอมพิวเตอร์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณ การใช้ความแม่นยำระดับสอง (Double Precision) และขนาดของ Bandwidth ที่เล็กที่สุดจะสามารถจะช่วยลดความคลาดเคลื่อนดังกล่าวได้ และถ้าเลือกใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีมาตรฐานระดับสูง ความคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขในการคำนวณจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับการคลาดเคลื่อนจากการเลือกใช้ชนิด และขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับลักษณะของปัญหา

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

สำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาตรฐานทั่วไป เช่น ANSYS ข้อมูลที่จะต้องให้กับคอมพิวเตอร์ก็คือ ตำแหน่งหรือพิกัดของจุดต่อต่างๆ ของเอลิเมนต์ ชนิดของเอลิเมนต์ที่ใช้ คุณสมบัติทางกลของวัสดุของแต่ละเอลิเมนต์ ลักษณะของโหลดที่กระทำ ลักษณะของเงื่อนไขขอบหรือ เงื่อนไขบังคับ และต้องระบุชนิดของการวิเคราะห์ด้วย เช่น ความเค้นระนาบ หรือความเครียดระนาบเป็นต้น เครื่องคอมพิวเตอร์จะใช้ข้อมูลเหล่านั้นคำนวณสิ่งต่างๆที่ต้องการ

3.5.2 ความรู้พื้นฐานที่จำเป็น

การศึกษาการวิเคราะห์ หรือการออกแบบโครงสร้าง และชิ้นส่วนต่างๆด้วย วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามขั้นตอนต่างๆนั้น เราจะต้องมีพื้นฐานทางด้านต่างๆหลายด้านจึงจะเข้าใจถึงหลักการ และวิธีการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เป็นอย่างดี อาทิเช่น จะต้องมีพื้นความรู้ทางด้านเมทริกซ์ รู้เทคนิคต่าง ๆ ที่จะใช้ในการแก้สมการพีชคณิตพร้อม ๆ กันหลายสมการ รู้เทคนิคการหาค่าของเมทริกซ์ผกผัน เป็นต้น และจะต้องรู้วิธีอินทีเกรทเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าโดยประมาณ จะต้องมีพื้นความรู้ทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง ทฤษฎีการยืดยุ่น และ หลักการของงาน พลังงานศักย์ต่ำสุด และ วิธีเวทเรซิดิวเป็นต้น ความรู้พื้นฐานเหล่านี้ เป็นสิ่งสำคัญในการที่จะศึกษาวิธีการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยมือหรือการคำนวณ แต่ในปัจจุบันได้มีการออกแบบการวิเคราะห์เอลิเมนต์ต่างๆเหล่านี้ด้วยโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ต่างๆหลายโปรแกรม เช่น โปรแกรมวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อน HEAT2D โปรแกรมวิเคราะห์การยืดหยุ่น-ความเค้น STRES2D โปรแกรม ANSYS รวมทั้งโปรแกรมที่กำลังจะนำเสนอนี้ด้วย คือ EasyFEM แต่ถึงอย่างไรก็ตาม ผู้ใช้ก็ยังต้องมีพื้นความรู้และมีประสบการณ์การใช้เครื่องคอมพิวเตอร์อีกด้วย

3.6 วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาของไหล

การคำนวณลักษณะของการไหลที่ทำกันในอดีตมักจะใช้วิธีการผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference) ซึ่งได้มีการพัฒนากันมาอย่างต่อเนื่องจนเป็นวิธีการที่ยอมรับกัน ในปัจจุบันในการแก้ปัญหาการไหลของของเหลวโดยทั่วไปภายใต้สภาวะที่ต่าง ๆ กัน หลังจากที่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มได้รับการยอมรับในการแก้ปัญหาทางด้านโครงสร้างของของแข็ง และโดยเฉพาะหลังจากที่สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถทำการประดิษฐ์ขึ้นได้โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหานั้นๆ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึ่งได้เริ่มถูกประยุกต์มาใช้กับปัญหาการไหลของของเหลว โดยมีความหวังว่าจะช่วยทำให้การแก้ปัญหาของของเหลวที่ไหลผ่านวัตถุที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนนั้นสามารถทำได้สะดวกยิ่งขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้วิธีการผลต่างสืบเนื่องดังที่เคยปฏิบัติกันมา

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ในปัจจุบัน การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณลักษณะการไหลผ่านวัตถุที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้ถูกพัฒนาไปได้ไกลมากเลยทีเดียว การคำนวณหาภาวะของอากาศที่ผ่านรถยนต์หรือเครื่องบินสามารถทำได้โดยไม่ยากนัก การคำนวณดังกล่าวสามารถบ่งบอกลักษณะการไหลเวียนของอากาศผ่านวัตถุเหล่านั้นรวมทั้งความดัน และแรงต้านที่เกิดขึ้นบนวัตถุ ผลลัพธ์ที่ได้นี้มีส่วนช่วยให้ผู้ออกแบบสามารถออกแบบรูปร่างลักษณะวัสดุที่ดีที่สุดขึ้นมาได้ก่อนที่จะนำไปสร้างเป็นของจริง ซึ่งจะช่วยทุ่นเวลาและประหยัดค่าใช้จ่ายได้เป็นอย่างมาก

เนื่องจากการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของของไหลยังเป็นสิ่งที่ค่อนข้างใหม่ และอยู่ในระดับการวิจัย และพัฒนาอยู่ในขณะนี้ ดังนั้นในที่นี้ จะขอเสนอถึงทฤษฎีพื้นฐานของปัญหาด้านการไหล โดยเริ่มตั้งแต่การแนะนำสมการพื้นฐานทั่วไป และ จากนั้นจะเป็นการอธิบายการใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการแก้ปัญหาการไหลของของเหลวโดยเริ่มตั้งแต่ปัญหาที่ง่ายที่สุดขึ้นไป การประยุกต์วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลของของเหลวในปัจจุบันนี้ ยังเปิดโอกาสอีกเป็นอย่างมากให้แก่นักวิจัยที่อยู่ในสาขานี้ในการที่จะประดิษฐ์วิธีการใหม่ๆ เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาของการไหลให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

3.6.1 สมการพื้นฐานทั่วไป

ก่อนที่จะศึกษาลงไปในรายละเอียดการใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาของการไหลในแบบต่างๆกัน จะต้องทำความเข้าใจ และ ศึกษาสมการพื้นฐานที่จำเป็นเกี่ยวกับการไหลก่อน โดยเริ่มจากคำนิยามของของเหลว (Fluid) ที่มีความหมายโดยทั่วไปว่าเป็นสารต่อเนื่องที่อาจอยู่ในภาวะของของเหลว หรือ แก๊สซึ่งจะเกิดการเปลี่ยนรูปได้ภายใต้ความเค้นที่มากระทำ การไหลของของเหลวจะขึ้นอยู่หรือเปลี่ยนแปลงไปกับระยะทาง และเวลา ในการคำนวณภาวะลักษณะการไหลของของเหลว เรามักจะตั้งสมมุติฐานต่างๆกันขึ้นมาโดยไม่เกิดความแตกต่างไปจากความเป็นจริงมากนัก และจะเป็นผลให้การทำการคำนวณนั้นง่ายขึ้น เริ่มตั้งแต่เราอาจสมมติว่าการไหลนั้นเป็นการไหลแบบไม่หนืด (Inviscid Flow) หรือเป็นการไหลแบบหนืด (Viscous Flow) การไหลแบบไม่หนืดเป็นการไหล แบบไม่มีความเสียดทานซึ่งในความเป็นจริงนั้นไม่เกิดขึ้น แต่อย่างไรก็ตามก็มีหลายๆปัญหาที่เราสามารถละทิ้งความเสียดทานไปได้โดยไม่ก่อให้เกิดผลผิดพลาดจากความเป็นจริงมากนัก แต่ในทางตรงกันข้ามจะทำให้การคำนวณนั้นง่ายมากขึ้นมาก การไหลแบบไม่หนืดยังจำแนกออกได้ เป็นแบบไม่อัดตัว (Incompressible Flow) และ แบบอัดตัว (Compressible Flow) การไหลแบบไม่อัดตัวปกติจะเกิดขึ้นกันกับของเหลว ในขณะที่การไหลแบบอัดตัวโดยทั่วไปจะเกิดขึ้นกับแก๊ส (Gas)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เนื่องจากการไหลแบบหนืดเป็นการไหลที่เกิดขึ้นในความเป็นจริง จึงมีความสำคัญมากกว่าในการศึกษาปรากฏการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้น เราจะเรียกการไหลแบบหนืดว่า เป็นแบบนิวโทเนียน (Newtonian) ต่อเมื่อกฎเกณฑ์การเสียดทานของสโตกส์ (Stokes's Law) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเครียดในของเหลวดังที่เราจะศึกษาโดยระเอียดต่อไปนั้นสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ แต่หากความสัมพันธ์ดังกล่าวนั้นอยู่ในรูปแบบอื่นซึ่งเกิดขึ้นในความเป็นจริงในของเหลวบางชนิด เราจะเรียกการไหลของของเหลวเหล่านั้นว่าไม่เป็นแบบนิวโทเนียน (Non-Newtonian)

ดังที่กล่าวไว้ในข้อ 2.3.4 ในการคำนวณหาลักษณะของการไหลแบบสองมิติโดยทั่วไปจะใช้สมการ (2.4) โดยเราจำเป็นต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับ

(1) การอนุรักษ์มวล (Conservation of mass)

(2) การอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentums)

(3) การอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of energy)

แต่ในการคำนวณหาลักษณะการไหลของระเบียบวิธีไฟไนต์นั้นจะประกอบสมการทั้งหมด 5 สมการในปัญหาโดยทั่วไปแบบสามมิติ เพื่อให้ง่ายแก่การทำความเข้าใจ และสามารถเขียนสมการต่างๆเหล่านี้ได้สั้นลงในที่นี้ แต่ในขณะเดียวกันเพื่อจะไม่ทำให้ความเข้าใจนั้นลดลง จะทำการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ในสองมิติ ดังนี้

<u>สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักมวล</u>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{3.6}$$

โดย ρ แทนความหนาแน่นมวล (Mass density), t แทนเวลา, u และ v แทนความเร็วของการไหลในแกน x และ y ตามลำดับ สมการ (3.6) สามารถนำไปเขียนในรูปแบบของเวกเตอร์ด้วย

<u>สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม</u>

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho B_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \tag{3.7}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\rho B_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \tag{3.8}$$

โดย B_x และ B_y แทนแรงเนื่องจากน้ำหนักของของเหลวต่อมวลหนึ่งหน่วยในทิศแกน x และ y ตามลำดับ P แทนความดัน (Pressure) ส่วนค่าความเค้นต่างๆที่ปรากฏในสมการ (3.7) และ (3.8) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าความหนืด และความเร็วตามกฎการเสียดทานของสโตกส์ ได้ดังนี้

$$\sigma_x=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}.\vec{v} \tag{3.9}$$

$$\sigma_y=2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}.\vec{v} \tag{3.10}$$

$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.11}$$

โดย μ แทนค่าความหนืด (Viscosity)

<u>สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน</u>

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+u\frac{\partial e}{\partial x}+v\frac{\partial e}{\partial y}\right)+P\vec{\nabla}.\vec{v}-Q$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\Phi \tag{3.12}$$

โดย e แทนพลังงานภายในต่อมวลหนึ่งหน่วย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน T แทนอุณหภูมิ และ Φ แทนฟังก์ชันการกระจายความหนืด (Viscous Dissipation Function) ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปแบบความเร็วได้ดังนี้

$$\Phi=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \tag{3.13}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

สำหรับการไหลในสองมิติ สมการเชิงอนุพันธ์ทั้งหมดนั้นประกอบด้วย 4 สมการดังแสดงในสมการ (3.6) (3.7) (3.8) และ (3.12) แต่มีตัวไม่รู้ค่าถึง 7 ตัว ซึ่งก็คือ ρ, u, v, P, T, e และ μ ดังนั้นจึ่งต้องการอีก 3 สมการ ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบทั่วๆไปได้คือ

สมการของสถานะ $\rho = \rho\ (P, T)$ (3.14)

สมการของพลังงานภายใน $e = e\ (P, T)$ (3.15)

สมการของความหนืด $\mu = \mu\ (P, T)$ (3.16)

ซึ่งในปัญหาทั่วไป ทั้งสามสมการหลังนี้เราจะทำให้ทราบลักษณะความสัมพันธ์ต่างๆ ดังนั้นเราจะมีสมการที่จำเป็นต้องแก้ทั้งหมด 4 สมการ เพื่อใช้ในการคำนวณหาตัวไม่รู้ค่า ซึ่งก็คือ ความเร็ว u และ v ในทิศแกน x และ y ความดัน P และอุณหภูมิ T สำหรับการไหลของของเหลวในสองมิติ

3.6.2 รูปแบบลักษณะการไหลที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากทฤษฎีของการไหลที่กล่าวมาข้างบนนั้น สมการเชิงอนุพันธ์เป็นพื้นฐานให้แก่การคำนวณหาลักษณะการไหลแบบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งจะนำไปประยุกต์ใช้ต่อสำหรับการไหลที่มีประเภทแตกต่างกัน ซึ่งในทางวิศวกรรมแล้วได้แยกประเภทการไหลของของไหลออกเป็น ชนิดด้วยกัน ได้แก่

ก. การไหลแบบไม่หนืดและไม่อัดตัว หรือเรียกอย่างหนึ่งว่าเป็นการไหลแบบศักย์ (Potential Flow) ซึ่งตั้งอยู่บนสมมุติฐานหลายๆอย่างอันเป็นผลให้การวิเคราะห์ทำได้โดยสะดวก นับตั้งแต่สมมติว่าเป็นการไหลแบบไร้ความหนืด (Inviscid Flow) ที่ไม่เกิดการหมุนวน (Irrotational Flow) ภายใต้สภาวะ ซึ่งของไหลมีความหนาแน่นคงที่ (Incompressible flow) เป็นต้น เป็นการทำให้เข้าใจปรากฏการณ์พื้นฐานของการไหลคร่าว ๆ ได้ สมมติฐานดังกล่าวโดยทั่วไปแล้วสามารถใช้ได้เฉพาะกับการไหลที่ค่อนข้างห่างจากผนังซึ่งมีขอบชั้น (Boundary Layer) ที่มีความเสียดทานเกิดขึ้น และในขณะเดียวกันเราจะสมมุติการไหลนี้ว่าเป็นการไหลแบบไม่เกิดการอัดตัว กล่าวคือค่าความหนาแน่น ρ นั้นคงที่

ข. การไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัว การไหลลักษณะนี้เกิดขึ้นกับปัญหาหลายๆอย่างในปัจจุบัน ลักษณะของปัญหาครอบคลุมตั้งแต่ การไหลของของเหลวภายนอก เช่นการคำนวณหาสภาวะการเปลี่ยนแปลงของอากาศผ่านเครื่องบินที่บินด้วยความเร็วสูง ซึ่งการไหลรอบลำตัวเครื่องบินเกิดการอัดตัวได้ รวมไปถึงปัญหาการไหลของของเหลวภายใน (Internal Flows) เช่นการคำนวณหาภาวะของแก๊สในเครื่องยนต์แบบกังหันที่มีความเร็วสูง เป็นต้น ซึ่งเนื่องจากลักษณะรูปร่างขอบเขตของปัญหาดังกล่าวนั้นปกติจะซับซ้อน อนึ่งการแก้ปัญหาการไหลแบบไม่หนืดแต่มีการอัดตัวนี้โดยปกติแล้วต้องการแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจุดต่อ และเอลิเมนต์

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เป็นจำนวนมากประกอบกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาเช่นนี้ประกอบด้วยสมการย่อยหลายสมการซึ่งอยู่ในรูปไม่เชิงเส้นภายใต้สถานะชั่วครู่ วิธีการแก้สมการเหล่านี้ และเวลาที่จำเป็นต้องใช้ในการคำนวณต้องถูกนำมาคำนึงเป็นอย่างมาก

ค. การไหลแบบหนืด แต่ไม่อัดตัว เป็นปัญหาการไหลอีกรูปแบบหนึ่งซึ่งเกิดขึ้นในงานหลายๆชนิดในทางวิศวกรรมศาสตร์ เช่น ในกระบวนการหล่อโลหะ หรือเซรามิก ซึ่งการไหลนั้นเป็นไปอย่างช้า ๆ เนื่องจากความหนืด การไหลชนิดนี้บางครั้งเรียกกันว่าการไหลแบบคืบคลาน (Creeping Flow) หรือการไหลแบบสโตกส์ (Stokes Flow) ซึ่งแรงของความเฉื่อย (Inertia Force) นั้นน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับแรงของความหนืด (Viscous Force) นั้นคือค่าเรย์โนลด์ (Reynold's Number) ซึ่งแสดงอัตราส่วนระหว่างแรงสองชนิดนี้นั้นมีค่าต่ำ

ง. การไหลแบบหนืด และมีการอัดตัว เป็นปัญหาเกี่ยวกับการไหลที่มีความซับซ้อนมากที่สุด เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นในงานการออกแบบปัญหาทางวิศวกรรมสมัยใหม่ เช่น การคำนวณหาภาวการณ์แปรปรวนของอากาศรอบตัวยานที่บินด้วยความเร็วสูงกว่าเสียงถึง 25 เท่า เป็นต้น ภาวะการแปรปรวนของอากาศดังกล่าวปกติจะประกอบด้วยคลื่นช็อก (Shock Waves) ซึ่งลักษณะรูปร่าง และตำแหน่งที่ไม่สามารถทราบได้ก่อนการคำนวณ ทำให้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดเล็กเป็นจำนวนมากเพื่อสามารถจับลักษณะของการกระจายของผลลัพธ์ ซึ่งแสดงถึงคลื่นช็อกนั้นได้ ยิ่งไปกว่านั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลแบบหนืดและมีการอัดตัวนี้ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหลายสมการที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน และต่างอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นทำให้การคำนวณนั้นมีความซับซ้อน ประกอบกับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กๆเป็นจำนวนมากดังที่อธิบายมา การคำนวณจึงต้องใช้เวลามาก และต้องการคอมพิวเตอร์ที่มีหน่วยความจุ ความจำสูงตามไปด้วย

จากรูปแบบการไหลของของไหลในลักษณะต่างๆกันนี้ ในการศึกษาการแก้ปัญหาโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยซอฟต์แวร์ จะเน้นไปที่การศึกษารูปการไหลแบบหนืด แต่ไม่อัดตัวเนื่องจากเป็นการไหลที่คล้ายในสภาพแวดล้อมตัวจริงมากที่สุด เช่น การไหลของอากาศในธรรมชาติ การไหลของแก๊ส ส่วนการไหลแบบอื่นนั้นจะไม่ทำการศึกษา

3.6.3 ปัญหาการไหลแบบหนืด

การไหลแบบหนืด (Incompressible Viscous Flow) เป็นการไหลที่เกิดขึ้นรอบตัว และพบเห็นกันอยู่ทั่วไปนับตั้งแต่กระแสลมพัดผ่านบ้าน ผ่านต้นไม้ การไหลหมุนวนของอากาศเย็นในห้องแอร์หรือในอาคารสนามบินขนาดใหญ่ การไหลของกระแสน้ำในแม่น้ำลำคลอง รวมไปถึงในตู้เลี้ยงปลา หากผู้ออกแบบสามารถวิเคราะห์ และทราบถึงสภาวะของการไหลได้ล่วงหน้า ก็สามารถ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ปรับปรุงลักษณะของการออกแบบเพื่อให้การไหลเกิดประสิทธิภาพสูงสุด เช่น ควรจะออกแบบรูปทรงของบ้านทั้งภายใน และภายนอกเช่นไร เพื่อให้อากาศเกิดการถ่ายเทได้สะดวกโดยไม่มีมุมอับ จะออกแบบวางเครื่องปรับอากาศ ณ ตำแหน่งใดเพื่อทำให้อากาศในห้องแอร์ หรือในอาคารสนามบินนั้นเย็นโดยสม่ำเสมอ เป็นต้น

ลักษณะการไหลของของไหลผ่านรูปทรงซับซ้อนใดๆ สามารถคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพด้วยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ บทนี้จะเริ่มจากการอธิบายสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์สโตกส์ (Navier-Stokes Equation) อันประกอบด้วยสมการของการอนุรักษ์มวล (Conservation of mass) และสมการของการอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of Momentums) ที่สามารถใช้วิเคราะห์หาสภาวการณ์ไหลแบบหนืดได้ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ขึ้นอยู่แก่กันและกัน (Coupled Equation) อีกทั้งยังอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Equation) ทำให้การคำนวณนั้นมีความซับซ้อนเมื่อเปรียบเทียบกับปัญหาอื่นๆ ของการไหลประเภทอื่น

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งมีวิธีการคำนวณไปตามลักษณะของการไหลด้วยการหาผลลัพธ์แบบแยกส่วน (Characteristic-Base Split) ที่เรียกกันโดยย่อว่า วิธีซีบีเอส (CBS) ได้นำมาใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่อเนื่องที่สอดคล้องกัน โดยโปรแกรมที่จะนำเสนอเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะการไหลของอากาศนั้น ผู้เขียนโปรแกรมได้ฝังโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้อยู่ในโปรแกรม EasyFEM เพื่อให้มีความสะดวกในการใช้วิเคราะห์ผลลัพธ์ต่างๆที่เกิดขึ้น แสดงถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ช่วยให้ผู้วิเคราะห์เห็นปรากฏการณ์ของการไหลด้วยสีอย่างชัดเจน ทำให้เกิดความเข้าใจลึกซึ้งถึงสภาวะของการไหลในปัญหานั้นได้มากยิ่งขึ้น และที่สำคัญที่สุด จะก่อให้เกิดความต้องการในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอื่นๆมากขึ้นไปอีก ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุที่ว่า ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นมักประกอบด้วยสภาวะของการไหลที่คาดเดาไม่ได้ล่วงหน้ารวมทั้งเมื่อดูผลลัพธ์แล้ว พื้นสี และเว็กเตอร์ความเร็วมักทำให้เกิดความน่าสนใจเสมอ

3.7 วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์กับปัญหาของการไหล

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เข้ามามีอิทธิพลต่อการออกแบบงานทางวิศวกรรมเป็นอย่างมาก ในปัจจุบันวิศวกรในภาคอุตสาหกรรมต่างๆ พึ่งพาการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์เพื่อบ่งบอกถึงปรากฏการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้นจากการออกแบบได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ โดยไม่ต้องลองผิดลองถูกดังเช่นที่เคยทำกันมาในอดีต ซึ่งเป็นการลดค่าใช้จ่ายทั้งทางด้านเวลา และปริมาณของวัสดุ หลีกเหลี่ยงการทดลองที่ไม่จำเป็น และที่สำคัญที่สุดชิ้นงานที่ออกแบบมานั้นจะมีความถูกต้องและให้ประสิทธิภาพสูงที่สุดสำหรับการใช้งานในภาคอุตสาหกรรมต่างๆ อาทิเช่น อุตสาหกรรม

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

รถยนต์ ไฟฟ้า และ เอเล็กทรอนิกส์ อาคาร และโครงสร้าง ฯลฯ ล้วนนำไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์มาใช้ในการออกแบบกันอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน

อุปสรรคที่สำคัญซึ่งผู้ใช้ซอฟต์แวร์ส่วนใหญ่ประสบปัญหา คือความไม่เข้าใจถึงที่มาของผลลัพธ์ที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ทำให้ไม่สามารถตอบได้ว่าผลลัพธ์ที่คำนวณมาได้นั้นมีความถูกต้องมากน้อยเพียงไร มีผู้ใช้ซอฟต์แวร์เหล่านี้จำนวนไม่น้อยที่มีความถนัด และเกิดความชำนาญจากการใช้ซอฟต์แวร์มาเป็นระยะเวลานาน จนไปถึงจุดที่เกิดความสงสัยในตัวเองว่าผลลัพธ์ที่แสดงสีต่าง ๆ ที่ปรากฏขึ้นบนหน้าจอคอมพิวเตอร์นั้นหามาได้อย่างไร ซึ่งในการใช้โปรแกรมๆฟอนต์เอลิเมนต์อย่างง่ายนี้จะเป็นการเรียนรู้เบื้องต้นโดยการใช้คำอธิบาย และภาพที่ง่ายอันจะก่อให้เกิดความเข้าใจ และความมั่นใจในการใช้ซอฟต์แวร์อันมีประโยชน์อย่างมีประสิทธิภาพได้ต่อไป

3.7.1 องค์ประกอบของความรู้ที่จำเป็น

องค์ประกอบของความรู้ 5 ประการดังที่จะกล่าวต่อไปนี้ เป็นสิ่งที่ผู้ใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์พึงมี ซึ่งยิ่งมีความรู้ และมีความเข้าใจมากเท่าใดก็จะทำให้เห็นความชัดเจนมากขึ้นเท่านั้น องค์ประกอบทั้ง 5 ประการนี้คือ

ก. <u>ความเข้าใจในสมการเชิงอนุพันธ์</u> ไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ล้วนตั้งอยู่บนรากฐานของสมการเชิงอนุพันธ์ ยกตัวอย่างเช่น อุณหภูมิ T บนแผ่นเหล็กซึ่งวางตัวอยู่บนระนาบ x-y [5] นั้นสามารถหามาได้จากความจริงที่ว่า ณ ตำแหน่งใดๆ บนแผ่นเหล็กนี้ ปริมาณความร้อนที่ไหลผ่านเข้าและออกต้องเท่ากัน นั่นคือ พลังงานไม่สูญหายไปไหน (Conservation of Energy) ความจริงเช่นนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ เช่น

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.17)$$

เป็นต้น การศึกษาในระดับมหาวิทยาลัยจึงบังคับให้เรียนวิชาทางคณิตศาสตร์ เช่น แคลคูลัส และสมการเชิงอนุพันธ์ เพื่อแก้สมการหาผลลัพธ์ของอุณหภูมิ T ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x และ y จะมีลักษณะเป็นเช่นไร

ในทำนองเดียวกัน หากแผ่นเหล็กเดียวกันนี้หากถูกดึงด้วยแรงตลอดขอบตรงข้ามทั้งสองด้าน แผ่นเหล็กจะเสียรูป และเกิดความเค้นขึ้นตามมา การวิเคราะห์หาลักษณะการเสียรูป และความเค้นนั้น ทำได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอีกเช่นกัน หากแต่อยู่ในรูปแบบที่ต่างกัน ซึ่งบ่งบอกผลรวมของแรง ณ จุดใดๆบนแผ่นเหล็กนี้ต้องอยู่ในสภาวะที่สมดุล (Equilibrium) ไฟไนต์เอลิ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เมนต์ซอฟต์แวร์จึงแฝงไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ตั้งต้นที่สอดคล้องกันเสมอ ดังนั้นก่อนที่จะนำไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ใดๆมาใช้ จึงจำเป็นต้องรู้ว่าไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์นั้นถูกประดิษฐ์ขึ้นเพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบใดที่สอดคล้องกับปัญหาทางกายภาพชนิดใด

ข. <u>ความเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์</u> การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ดังแสดงในหัวข้อที่แล้วด้วยวิธีทางคณิตศาสตร์เพียงลำพังนั้น เป็นสิ่งที่ไม่ง่าย โดยเฉพาะหากรูปร่างของปัญหานั้นมีความซับซ้อน หัวใจของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือ การแก้สมการดังกล่าวเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณ [1, 3, 8, 9] ด้วยการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งประกอบด้วยสัญลักษณ์คล้ายเลขหกกลับทางเหล่านี้ ไปเป็นสมการทางพีชคณิต (Algebraic equations) อันประกอบด้วยกระบวนการบวก ลบ คูณ และหาร เท่านั้น กระบวนการดังกล่าวนี้เอง ที่เรียกกันในวิชาไฟไนต์เอลิเมนต์ว่าขั้นตอนของการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ไปสู่สมการเชิงพีชคณิตอันประกอบด้วย บวก ลบ คูณ และ หาร นั้น ทำกันอย่างไร เพื่อให้ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นมามีความถูกต้องแม่นยำมากที่สุด

ค. <u>ความเข้าในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข</u> สมการทางพีชคณิคอันเป็นผลมาจากการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์มานั้นประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าเป็นจำนวนมาก อีกทั้งจำนวนของสมการทางพีชคณิตนี้ยังขึ้นอยู่กับขนาดของปัญหาทำให้ต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) อันประกอบด้วยกระบวนการอย่างเป็นขั้นเป็นตอนมาแก้เพื่อหาคำตอบ นอกจากนั้น สมการเชิงพีชคณิตที่เกิดขึ้นจากการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ในบางกรณี ยังอาจประกอบด้วยสิ่งต่างๆ ซึ่งจำเป็นต้องอาศัยความรู้พื้นฐานของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข นับตั้งแต่ฟังก์ชันการประมาณภายใน (Interpolation Functions) การอินทิเกรตตัวเลข (Numerical Integration) การแก้ระบบสมการพีชตณิตขนาดใหญ่ (Solving a Set of Simultaneous Equation) รวมไปถึงระเบียบวิธีต่างๆ เพื่อใช้แก้สมการแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Equation) เป็นต้น ความรู้ความเข้าใจในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเหล่านี้ จะทำให้ผู้ใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์เกิดความเข้าใจ และ ทราบล่วงหน้าก่อนทำการวิเคราะห์ว่าเป็นปัญหาชนิดใด และ ใช้เวลาในการคำนวณมาก หรือน้อยเพียงใด

ง. <u>ความเข้าใจในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์</u> ด้วยประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันนี้ ทำให้การแก้ไขปัญหาขนาดใหญ่เป็นไปได้ด้วยความรวดเร็ว การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญ และจำเป็นในการลดเวลาของการคำนวณ และ ขจัดข้อผิดพลาดที่กระทำด้วยมือ หรือด้วยการใช้เครท่องคิดเลข ขั้นตอนในโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นเหมือนกันกับการทำด้วยมือ ดังนั้นหากผู้ใช้มีความรู้ความเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และสามารถเขียนโปรแกรมเองได้บ้าง ก็จะสามารถประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ด้วยตนเอง อย่างไรก็ตาม ประสิทธิภาพของโปรแกรมที่ประดิษฐ์

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

นั้นยังขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของผู้เขียนโปรแกรมโดยตรง ความเข้าใจในไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จึ่งเป็นประโยชน์อย่างมากที่จะช่วยให้ผู้ใช้สามารถใช้โปรแกรมนั้นอย่างถูกต้อง และมีความมั่นใจในผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

จ. ประสบการณ์ในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ประสบการณ์ในการใช้คอมพิวเตอร์มีผลอย่างมาก ต่อการวิเคราะห์ปัญหา ความเข้าใจในระบบ และศักยภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ (Hardware) ที่ใช้งานอยู่จะช่วยในการตัดสินใจหลายๆอย่างก่อนการแก้ปัญหา ประสบการณ์ในการใช้กราฟิกส์ซอฟต์แวร์ (Graphics software) จะช่วยให้การใช้เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์นั้นเป็นไปได้อย่างสะดวกและคล่องตัวมากยิ่งขึ้น นับตั้งแต่การสร้างกราฟิกส์บนหน้าจอ การตรวจสอบความถูกต้องของข้อมูลที่มีเป็นจำนวนมาก รวมทั้งการแสดงผลลัพธ์ด้วยระดับสีต่างๆกัน ประสบการณ์ในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ และซอฟต์แวร์จึ่งนับว่าเป็นประโยชน์ และเป็นข้อได้เปรียบอย่างมากในการแก้ปัญหาทั่วไปด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

3.7.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

กระบวนการวิเคราะห์ปัญหาใดๆ โดยทั่วไปด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ไม่ว่าจะทำด้วยมือ หรือใช้ซอฟต์แวร์สำเร็จรูปก็ตาม ประกอบด้วย 5 ขั้นตอนหลักๆ ดังนี้

1. การแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ยกตัวอย่างเช่น หากต้องการวิเคราะห์การเสียรูปของแผ่นเหล็กจากแรงดึง ขั้นตอนแรกจำเป็นต้องแบ่งแผ่นเหล็กออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ (Discretization) หรือหากต้องการวิเคราะห์ลักษณะการไหลของน้ำในท่อ จำเป็นต้องแบ่งโดเมนซึ่งเป็นน้ำนั้นออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ก่อน กระบวนการการขั้นตอนแรกนี้ โดยปกติจะใช้เวลามากในทางปฏิบัติ เพราะจำเป็นต้องสร้างรูปร่างของปัญหา (Geometry) อย่างถูกต้องขึ้นมาก่อน รูปร่างของปัญหาอาจจะประกอบด้วยส่วนเว้าส่วนโค้งที่มีความซับซ้อน การประดิษฐ์กราฟิกส์ซอฟต์แวร์ในส่วนนี้ขึ้นมาด้วยตัวเอง จึ่งจำเป็นต้องอาศัยความรู้อันประกอบไปด้วยประสบการณ์ทางด้านนี้เป็นอย่างมาก

2. การเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์ เอลิเมนต์ย่อยที่แบ่งบนพื้นที่โมเดลนั้นอาจเป็นเอลิเมนต์ในรูปแบบของสามเหลี่ยม หรือ สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่ากันก็ได้ หากแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ตัวไม่รู้ค่า (Unknowns) จะอยู่ที่มุมทั้งสามของสามเหลี่ยมนั้น ซึ่งเรียกกันว่าจุดต่อ (Nodes) การเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์จะสอดคล้องกับลักษณะการกระจายตัวไม่รู้ค่าที่สมมุติขึ้นบนเอลิเมนต์นั้น ๆ เช่น การเลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อที่มุมทั้งสามแล้ว ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นั้นจะถูกสมมุติให้อยู่ในรูปแบบของแผ่นเรียบ (Flat Plane) เป็นต้น แต่หากเลือกใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อที่มุมทั้งสี่ ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เมนต์สี่เหลี่ยมนี้อาจไม่เรียบแต่โค้งไปโค้งมาได้ ดังนั้นการเลือกใช้เอลิเมนต์ชนิดต่างๆกัน จึ่งมีผลโดยตรงกับผลลัพธ์ที่จะคำนวณได้

3. <u>การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์</u> สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่สนใจอยู่นั้นจะถูกเปลี่ยนไปเป็นสมการทางพีชคณิตที่เรียกกันว่า สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Equation) สมการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ จะถูกสร้างขึ้นสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ เนื่องจากเอลิเมนต์ต่างมีขนาดไม่เท่ากัน กระบวนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์นี้เอง เป็นหัวใจของการเรียนวิชาไฟไนต์เอลิเมนต์ เพราะห์ฉะนั้นเราจึ่งต้องมีความเข้าใจกระบวนการนี้โดยระเอียด เพราะห์เกิดความเข้าใจแล้ว ก็สามารถประยุกต์ใช้วิธีการทำนองเดียวกันนี้ ในการแก้ปัญหาชนิดอื่นๆได้

4. <u>การรวมสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เข้าด้วยกันแล้วแก้สมการขนาดใหญ่</u> สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่อยู่ในรูปแบบของสมการทางพีชคณิต ซึ่งได้ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ในขั้นตอนที่แล้วจำเป็นต้องนำมารวมกันอย่างถูกต้อง และมีหลักการเปรียบเสมือนการนำชิ้นตัวต่อ (Jigsaw Puzzle) มาต่อเข้ากันอย่างถูกต้อง และเหมาะสมจึ่งจะเกิดรูปภาพใหญ่ที่สมบูรณ์ขึ้นได้ การประกอบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แต่ละสมการเข้าด้วยกัน (Assembly of Element Equations) จะก่อให้เกิดให้เกิดระบบสมการ (Set of Simultaneous Equation) ขนาดใหญ่ จากนั้นจึ่งประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ของปัญหานั้น ก่อนแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ชุดนั้นเพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดต่อ ซึ่งผลลัพธ์ที่จุดต่อเหล่านี้อาจแทนค่าอุณหภูมิหากวิเคราะห์ปัญหาด้านการเสียรูป และ ความเค้น เป็นต้น

5. <u>การคำนวณหาค่าอื่นๆที่เหลือ</u> จากนั้นจึ่งเป็นการหาค่าอื่นๆ ที่ผู้ใช้ต้องการทราบเพื่อจะทำให้ปัญหานั้นได้รับการวิเคราะห์โดยสมบูรณ์ เช่น เมื่อทราบอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆ แล้วก็สามารถคำนวณหาปริมาณ ฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านได้ หรือเมื่อทราบค่าของการเคลื่อนตัวแล้วก็สามารถคำนวณหาค่าความเค้น ได้เช่นกัน เป็นต้น

3.7.3 กระบวนการแก้ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์

กระบวนการแก้ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ เพียง 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. <u>กระบวนการขั้นต้น</u> กระบวนการขั้นต้น (Pre-processor) คือการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากรูปร่างลักษณะที่แท้จริงของปัญหา จากนั้นจึ่งประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตก่อนวิเคราะห์ปัญหานั้น การสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์อันประกอบด้วยเอลิเมนต์เป็นจำนวนมากบนรูปร่างลักษณะของปัญหาที่กำหนดมาให้นั้น ตามปกติจะใช้เวลานาน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง หากรูปร่างของ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ปัญหามีความซับซ้อน ผู้สร้างรูปร่างบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ควรมีประสบการณ์ในการใช้ซอฟต์แวร์นั้น มาสักระยะหนึ่ง จึงสามารถสร้างรูปแบบที่กำหนดให้อย่างถูกต้อง และ มีประสิทธิภาพได้ เริ่มตั้งแต่การสร้างจุด เส้นตรง เส้นโค้งต่างๆ รวมทั้งพื้นผิว โดยข้อมูลของจุด เส้นตรง และเส้นโค้ง และพื้นผิวเหล่านี้จะถูกเก็บในรูปแบบของสมการทางเลขาคณิตในหน่วยความจำในเครื่องคอมพิวเตอร์นั้น เพื่อผู้ใช้สามารถสร้างเอลิเมนต์ทั้งขนาด และ จำนวนต่างๆกันได้ โดยรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่เกิดขึ้นยังเสมือนรูปร่างต้นแบบของจริงมากที่สุด รูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์ยังประกอบด้วยหมายเลขของจุดต่อ หมายเลขของเอลิเมนต์ และข้อมูลอื่นๆ ซึ่งจำเป็นต้องใช้ในกระบวนการวิเคราะห์ขั้นต่อไป รายระเอียดจำนวนมากเหล่านี้ปกติจะไม่แสดงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ยกเว้นผู้ใช้ต้องการให้แสดงเพื่อการตรวจสอบหลังจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เสร็จสิ้นลงแล้ว ผู้ใช้จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตอันประกอบไปด้วย การกำหนดค่าให้กับบางจุดต่อของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น เงื่อนไขของขอบเขตเหล่านี้จำเป็นต้องเหมือน หรือใกล้เคียงกับของจริงให้มากที่สุดจึงจะนำไปสู่ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับความเป็นจริง

2. <u>กระบวนการวิเคราะห์</u> ข้อมูลต่างๆ ของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้น และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ในขั้นตอนแรก จะถูกส่งเข้าสู่กระบวนการวิเคราะห์ (Analysis) ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งฝังตัวอยู่แล้วในซอฟต์แวร์ชุดนี้ โดยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จะสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับปัญหานั้นสำหรับทุกๆเอลิเมนต์ ก่อนที่จะนำมาประกอบกันเข้าขึ้นเป็นระบบสมการรวมขนาดใหญ่ แล้วจึ่งประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ จากนั้นจึ่งแก้ระบบสมการรวมขนาดใหญ่นั้น โดยเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะขึ้นอยู่กับจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด ซึ่งผู้ใช้ได้สร้างขึ้น และขนาดของระบบสมการรวมขนาดใหญ่ที่เกิดขึ้นหากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นอยู่ในรูปแบบเชิงเส้น (Linear Partial Differential Equations) ระบบสมการรวมนี้จะถูกแก้เพียงครั้งเดียวทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณนั้นไม่มากนัก แต่หากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) ระบบสมการรวมนี้จะถูกแก้ด้วยการวนซ้ำ (Iteration) หลายรอบทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณนั้นนานมากขึ้น โดยเฉพาะหากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยเอลิเมนต์เป็นจำนวนมาก ดังนั้นหากผู้ใช้ซอฟต์แวร์สำเร็จรูปมีความเข้าใจถึงองค์ความรู้พื้นฐานภายในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บ้าง ก็จะช่วยในการตัดสินใจสิ่งต่างๆ ก่อนทำการวิเคราะห์ได้เป็นอย่างดี ซึ่งจะสามารถทุ่นเวลาในการคำนวณลงไปได้มากที่เดียว

3. <u>กระบวนการขั้นท้าย</u> ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการวิเคราะห์ในขั้นตอนที่แล้วจะประกอบด้วยตัวเลขเป็นจำนวนมาก ซึ่งจำเป็นต้องใช้คอมพิวเตอร์กราฟิก (Computer Graphic) โดยเฉพาะกราฟิก

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

สีเพื่อแสดงตัวเลขจำนวนมากเหล่านี้ออกมาบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ทำให้ผู้ใช้สามารถเข้าใจปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นได้อย่างชัดเจน กระบวนการขั้นท้าย (Post-processor) นี้จึ่งมีความจำเป็นอย่างยิ่ง ซึ่งรูปแบบของการแสดงผลลัพธ์นั้นมีหลายชนิด นับตั้งแต่การแสดงด้วยแถบเส้นสี (Fringe Plot) การแสดงด้วยเส้นชั้นสี (Contour Lines) การแสดงด้วยเวกเตอร์ (Vector Plot) เป็นต้น ทั้งบนรูปทรงดั้งเดิม หรือรูปทรงที่เสียรูปไปแล้ว ดังนั้นความเข้าใจในผลลัพธ์อันเป็นผลจากรูปทรงที่ได้ออกแบบไปบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ได้โดยตรงอย่างรวดเร็วจะทำให้ผู้ออกแบบเข้าใจในปัญหานั้นได้อย่างลึกซึ้งมากยิ่งขึ้น และอาจก่อให้เกิดแนวคิดในการปรับเปลี่ยนรูปทรงนั้น เพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ดียิ่งขึ้นไปอีก กระบวนดังกล่าวนี้เองที่ช่วยลดเวลาในการออกแบบผลิตภัณฑ์ใหม่ๆ ลงไปได้มากในปัจจุบัน และสามารถหลีกเลี่ยงการลองผิดลองถูกที่เคยใช้กันในอดีตไปจนเกือบสิ้นเชิง

3.7.4 โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่น่าศึกษา

จากการศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาทั้งหมด เห็นได้ว่าเป็นสิ่งที่น่าสนใจต่อการนำมาใช้ในการเรียนการสอนเรื่องการไหลของอากาศ โดยมีเงื่อนไขที่สำคัญว่าต้องมีโปรแกรมที่สามารถใช้งานได้ง่ายพอที่นักศึกษาคณะสถาปัตยกรรมศาสตร์จะสามารถทำความเข้าใจและใช้งานได้ในระยะเวลาสั้น ๆ โดยควรจะใช้เวลาบรรยายและปฏิบัติในห้องเรียนประมาณ 6 ชั่วโมง จากการสืบค้นพบว่ามีโปรแกรมชื่อ EasyFEM ซึ่งติดมากับหนังสือชื่อ “ไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างง่าย” น่าจะมีศักยภาพที่เพียงพอต่อวัตถุประสงค์นี้

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved