ชื่อเรื่องการค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์ เซมิเนียร์ฟิลด์ที่วางนัยทั่วไป

ชื่อผู้เขียน น.ส.หทัยกาญจน์ วัฒนทวีกุล

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาการสอนคณิตศาสตร์

คณะกรรมการตรวจสอบการค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์

ผศ.จินตนา	แสนวงศ์	ประธานกรรมการ
ผศ.มัลลิกา	ถาวรอธิวาสน์	กรรมการ
อ.สุเทพ	สวนใต้	กรรมการ

บทคัดย่อ

เซต S ที่ประกอบด้วยไบนารีโอเปอเรชัน + และ . จะเรียกว่าเป็นเซมิเนียร์ริง ก็ต่อเมื่อ (1) (S,+) เป็นเซมิกรุ๊ป

(2) (S,.) เป็นเซมิกรุ๊ป

(3) สำหรับทุกสมาชิก x,y,z ใน S $(x+y).z = x.z + y.z$

เซมิเนียร์ริง (D,+,.) จะเรียกว่าเรโชเซมิเนียร์ริง ก็ต่อเมื่อ (D,.) เป็นกรุ๊ป เซมิเนียร์ริง (K,+,.) จะเรียกว่าเป็นเซมิเนียร์ฟิลด์ที่วางนัยทั่วไป ก็ต่อเมื่อ มี $a \in K$ ซึ่ง $(K - \{a\},.)$ เป็นกรุ๊ป

เพื่อความสะดวกในการค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์นี้ เราจะเรียกเซมิเนียร์ฟิลด์ที่วางนัยทั่วไปว่า "เซมิเนียร์ฟิลด์"

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ (K,+,.) เป็นเซมิเนียร์ฟิลด์ และ a เป็นสมาชิกใน K ซึ่ง $(K - \{a\}, .)$ เป็นกรุ๊ป แล้วจะได้ว่า

(1) $ax = a = xa$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

หรือ (2) $ax = x = xa$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

หรือ (3) $ax = a$ และ $xa = x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

หรือ (4) $ax = x$ และ $xa = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

หรือ (5) $ax = a = xa$ และ $a^2 \neq a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

หรือ (6) $ae \neq a \neq ea$ และ $a^2 \neq a$ โดยที่ e เป็นเอกลักษณ์การคูณ ของ $(K - \{a\},.)$

จากทฤษฎีจะได้ว่ามีเซมิเนียร์ฟิลด์อยู่ 6 ชนิดคือ

(1) $ax = a = xa$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

(2) $ax = x = xa$ สำหรับทุกสมาชิกใน x ใน K

(3) $ax = a$ และ $xa = x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

(4) $ax = x$ และ $xa = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

(5) $ax = a = xa$ และ $a^2 \neq a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

(6) $ae \neq a \neq ea$ และ $a^2 \neq a$ โดยที่ e เป็นเอกลักษณ์การคูณ ของ $(K - \{a\},.)$

ให้ D เป็นเซมิเนียร์ริง และ $d \in D$ จะเรียก $x \in D$ ว่า

(1) เอกลักษณ์การบวกทางขวาของ d ก็ต่อเมื่อ $d+x = d$ และจะให้ $RI_D(d)$ แทนเซตของเอกลักษณ์การบวกทางขวาของ d ทั้งหมดใน D

(2) เอกลักษณ์การบวกทางซ้ายของ d ก็ต่อเมื่อ $x+d = d$ และจะให้ $LI_D(d)$ แทนเซตของเอกลักษณ์การบวกทางซ้ายของ d ทั้งหมดใน D

(3) เอกลักษณ์การบวกของ d ก็ต่อเมื่อ $x+d = d = d+x$ และจะให้ $I_D(d)$ แทนเซตของเอกลักษณ์การบวกของ d ทั้งหมดใน D

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ D เป็นเรโชเซมิเนียร์ริงที่มีคุณสมบัติว่า 1+1 = 1 และ a เป็นสัญลักษณ์ที่ไม่แทนสมาชิกใด ๆ ใน D ให้ $S_R \subseteq RI_D(1)$ และ $S_L \subseteq LI_D(1)$ ที่มีคุณสมบัติดังนี้

(1) S_R และ S_L เป็นฟิลเตอร์ของ $RI_D(1)$ และ $LI_D(1)$ ภายใต้การบวกตามลำดับ

(2) ถ้า $D\setminus S_R \neq \phi$ แล้ว $D\setminus S_R$ เป็นคอมพลิทลีไพร์มไอดีลของ (D,+) และถ้า $D\setminus S_L \neq \phi$ แล้ว $D\setminus S_L$ เป็นคอมพลิทลีไพร์มไอดีลของ (D,+)

(3) ถ้า $S_R \cap D\setminus S_L \neq \phi$ แล้ว $1 \in S_R$ และถ้า $S_L \cap D\setminus S_R \neq \phi$ แล้ว $1 \in S_L$

ถ้าเราขยายการบวกและการคูณจาก D ไปยัง $K = D \cup \{a\}$ ดังต่อไปนี้

(1) ax = x = xa สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

(2) a+x = a สำหรับทุกสมาชิก x ใน S_R และ

a+x = 1+x สำหรับทุกสมาชิก x ใน $D\setminus S_R$

x+a = a สำหรับทุกสมาชิก x ใน S_L และ

x+a = x+1 สำหรับทุกสมาชิก x ใน $D\setminus S_L$

(3) a+a = a

แล้วจะได้ว่า (K,+,.) เป็นเซมิเนียร์ฟิลด์ชนิดที่ 2

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ D เป็นเรโชเซมิเนียร์ริง และ a เป็นสัญลักษณ์ที่ไม่แทนสมาชิกใด ๆ ใน D ให้ $S_R \subseteq RI_D(1)$ และ $S_L \subseteq LI_D(1)$ ที่มีคุณสมบัติดังนี้

(1) S_R และ S_L เป็นฟิลเตอร์ของ $RI_D(1)$ และ $LI_D(1)$ ภายใต้การบวกตามลำดับ

(2) ถ้า $D\backslash S_R \neq \phi$ แล้ว $D\backslash S_R$ เป็นคอมพลิทลีไพร์มไอดีลของ $(D,+)$ และถ้า $D\backslash S_L \neq \phi$ แล้ว $D\backslash S_L$ เป็นคอมพลิทลีไพร์มไอดีลของ $(D,+)$

(3) ถ้า $S_R \cap D\backslash S_L \neq \phi$ แล้ว $1 \in D\backslash S_R$ และถ้า $S_L \cap D\backslash S_R \neq \phi$ แล้ว $1 \in D\backslash S_L$

(4) $1 \in S_R \cap S_L$ หรือ $1 \in D\backslash S_R \cap D\backslash S_L$

ถ้าเราขยายการบวกและการคูณจาก D ไปยัง $K = D \cup \{a\}$ ดังต่อไปนี้

(1) $ax = x = xa$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

(2) $a+x = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน S_R และ

$a+x = 1+x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน $D\backslash S_R$

$x+a = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน S_L และ

$x+a = x+1$ สำหรับทุกสมาชิกใน $D\backslash S_L$

(3) $a+a = 1+1$

แล้วจะได้ว่า $(K,+,.)$ เป็นเซมิเนียร์ฟิลด์ชนิดที่ 2

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ D เป็นเรโชเซมิเนียร์ริงที่มีคุณสมบัติว่า $1+1 = 1$, $d \in D$ และ a เป็นสัญลักษณ์ที่ไม่แทนสมาชิกใด ๆ ใน D ให้ $S_R \subseteq RI_D(d)$ และ $S_L \subseteq LI_D(d)$ ที่มีคุณสมบัติดังนี้

(1) S_R และ S_L เป็นฟิลเตอร์ของ $RI_D(d)$ และ $LI_D(d)$ ภายใต้การบวกตามลำดับ

(2) ถ้า $D\backslash S_R \neq \phi$ แล้ว $D\backslash S_R$ เป็นคอมพลิทลีไพร์มไอดีลของ $(D,+)$ และถ้า $D\backslash S_L \neq \phi$ แล้ว $D\backslash S_L$ เป็นคอมพลิทลีไพร์มไอดีลของ $(D,+)$

(3) ถ้า $S_R \cap D\backslash S_L \neq \phi$ แล้ว $d \in S_R$ และถ้า $S_L \cap D\backslash S_R \neq \phi$ แล้ว $d \in S_L$

ถ้าเราขยายการบวกและการคูณจาก D ไปยัง $K = D \cup \{a\}$ ดังต่อไปนี้

(1) $ax = dx$ และ $xa = xd$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน D และ

$a^2 = d^2$

(2) $a+x = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน S_R และ

$a+x = d+x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน $D\backslash S_R$

$x+a = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน S_L และ

$x+a = x+d$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน $D\backslash S_L$

(3) $a+a = a$

แล้วจะได้ว่า $(K,+,.)$ เป็นเซมิเนียร์ฟิลด์ชนิดที่ 6

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ D เป็นเรโชเซมิเนียร์ริง และ a เป็นสัญลักษณ์ที่ไม่แทนสมาชิกใด ๆ ใน D ให้ $d \in D, S_R \subseteq RI_D(d)$ และ $S_L \subseteq LI_D(d)$ ที่มีคุณสมบัติดังนี้

(1) S_R และ S_L เป็นฟิลเตอร์ของ $RI_D(d)$ และ $LI_D(d)$ ภายใต้การบวกตามลำดับ

(2) ถ้า $D\backslash S_R \neq \phi$ แล้ว $D\backslash S_R$ เป็นคอมพลิทลีไพร์มไอดีลของ $(D,+)$ และถ้า $D\backslash S_L \neq \phi$ แล้ว $D\backslash S_L$ เป็นคอมพลิทลีไพร์มไอดีลของ $(D,+)$

(3) ถ้า $S_R \cap D\backslash S_L \neq \phi$ แล้ว $d \in D\backslash S_R$ และ $S_L \cap D\backslash S_R \neq \phi$ แล้ว $d \in D\backslash S_L$

(4) $d \in S_R \cap S_L$ หรือ $d \in D\backslash S_R \cap D\backslash S_L$

ถ้าเราขยายการบวกและการคูณจาก D ไปยัง $K = D \cup \{a\}$ ดังต่อไปนี้

(1) $ax = dx$ และ $xa = xd$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน D และ

$a^2 = d^2$

(2) $a+x = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน S_R และ

$a+x = d+x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน $D\backslash S_R$

$x+a = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน S_L และ

$x+a = x+d$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน $D\backslash S_L$

(3) $a+a = d+d$

แล้วจะได้ว่า $(K,+,.)$ เป็นเซมิเนียร์ฟิลด์ชนิดที่ 6

Research Title	Generalized Seminear - Fields		
Author	Miss Hatthaikarn Wattanataweekul		
M.S.	Teaching Mathematics		
Examining Committee	Assist.Prof. Jintana	Sanwong	Chairman
	Assist.Prof. Mallika	Tawonatiwasana	Member
	Lecturer Sutep	Suantai	Member

Abstract

A triple (S,+,.) is said to be a seminear - ring iff S is a set and +, . are binary operations on S such that

(1) (S,+) is a semigroup.

(2) (S,.) is a semigroup.

(3) $(x+y).z = x.z+y.z$ for all $x,y,z \in S$

A seminear - ring (D,+,.) is said to be a ratio seminear - ring iff (D,.) is a group.

A seminear - ring (K,+,.) is said to be a generalized seminear - field iff there exists an element a in K such that (K-{a},.) is a group.

In this independent study we still call generalized seminear - fields "seminear - fields"

<u>Theorem</u> Let $(K,+,.)$ be a seminear - fields and a an element in K such that $(K - \{a\},.)$ is a group. Then

(1) $ax = a = xa$ for all $x \in x$

or (2) $ax = x = xa$ for all $x \in K$

or (3) $ax = a$ and $xa = x$ for all $x \in K$

or (4) $ax = x$ and $xa = a$ for all $x \in K$

or (5) $ax = a = xa$ for all $x \in K - \{a\}$ and $a^2 \neq a$

or (6) $ae \neq a \neq ea$ and $a^2 \neq a$ where e is the identity of $(K-\{a\}, .)$

From this theorem we have six types of seminear - fields they are :

(1) $ax = a = xa$ for all $x \in K$

(2) $ax = x = xa$ for all $x \in K$

(3) $ax = a$ and $xa = x$ for all $x \in K$

(4) $ax = x$ and $xa = a$ for all $x \in K$

(5) $ax = a = xa$ for all $x \in K - \{a\}$ and $a^2 \neq a$

(6) $ae \neq a \neq ea$ and $a^2 \neq a$ where e is the identity of $(K - \{a\},.)$

Let D be a seminear - ring and $d \in D$. Then $x \in D$ is said to be

(1) right additive identity of d iff $d+x = d$. The set of all right additive identities of d in D denoted by $RI_D(d)$

(2) left additive identity of d iff $x+d = d$. The set of all left additive identities of d in D denoted by $LI_D(d)$

(3) additive identity of d iff $d+x = d = x+d$. The set of all additive identities of d in D denoted by $I_D(d)$

<u>Theorem</u> Let D be a ratio seminear - ring, such that $1+1 = 1$ and a a symbol not representing any element in D. Let $S_R \subsetneq RI_D(1)$ and $S_L \subseteq LI_D(1)$ have the following properties,

(1) S_R and S_L are filters of $RI_D(1)$ and $LI_D(1)$ under addition respectively

(2) If $D\setminus S_R \neq \phi$ then $D\setminus S_R$ is a completely prime ideal of $(D,+)$

and If $D\setminus S_L \neq \phi$ then $D\setminus S_L$ is a completely prime ideal of $(D,+)$

(3) If $S_R \cap D\setminus S_L \neq \phi$ then $1 \in S_R$

and if $S_L \cap D\setminus S_R \neq \phi$ then $1 \in S_L$

Then we can extend the binary operations of D to $K = D \cup \{a\}$ making K into a seminear - fields of type II such that

(1) $ax = x = xa$ for all $x \in K$

(2) $a+x = a$ for all $x \in S_R$ and

$a+x = 1+x$ for all $x \in D\setminus S_R$

$x+a = a$ for all $x \in S_L$ and

$x+a = x+1$ for all $x \in D\setminus S_L$

(3) $a+a = a$

<u>Theorem</u> Let D be a ratio seminear - ring and a symbol not representing any element in D. Let $S_R \subseteq RI_D(1)$ and $S_L \subseteq LI_D(1)$ have the following properties,

(1) S_R and S_L are filters of RI_D (1) and $LI_D(1)$ under addition respectively

(2) If $D \backslash S_R \neq \phi$ then $D \backslash S_R$ is a completely prime ideal of (D,+)

and If $D \backslash S_L \neq \phi$ then $D \backslash S_L$ is a completely prime ideal of (D,+)

(3) If $S_R \cap D \backslash S_L \neq \phi$ then $1 \in D \backslash S_R$

and if $S_L \cap D \backslash S_R \neq \phi$ then $1 \in D \backslash S_L$

(4) $1 \in S_R \cap S_L$ or $1 \in D \backslash S_R \cap D \backslash S_L$

Then we can exend the binary operation of D to $K = D \cup \{a\}$ making K into a seminear - fields of type II such that

(1) $ax = x = xa$ for all $x \in K$

(2) $a+x = a$ for all $x \in S_R$ and

$z+x = 1+x$ for all $x \in D \backslash S_R$

$x+a = a$ for all $x \in S_L$ and

$x+a = x+1$ for all $x \in D \backslash S_L$

(3) $a+a = 1+1$

<u>Theorem</u> Let D be a ratio seminear - ring, such that $1+1 = 1, d \in D$ and a a symbol not representing any element in D.

Let $S_R \subsetneq RI_D(d)$ and $S_L \subsetneq LI_D(d)$ have the following properties

(1) S_R and S_L are filters of $RI_D(d)$ and $LI_D(d)$ under addition respectively

(2) If $D \setminus S_R \neq \phi$ then $D \setminus S_R$ is a completely prime ideal of $(D,+)$

and If $D \setminus S_L \neq \phi$ then $D \setminus S_L$ is a completely prime ideal of $(D,+)$

(3) If $S_R \cap D \setminus S_L \neq \phi$ then $d \in S_R$

and if $S_L \cap D \setminus S_R \neq \phi$ then $d \in S_L$

Then we can extend the binary operations of D to $K = D \cup \{a\}$ making K into a seminear - fields of type VI such that

(1) $ax = dx$ and $xa = xd$ for all $x \in D$ and $a^2 = d^2$

(2) $a+x = a$ for all $x \in S_R$ and

$a+x = d+x$ for all $x \in D \setminus S_R$

$x+a = a$ for all $x \in S_L$ and

$x+a = x+d$ for all $x \in D \setminus S_L$

(3) $a + a = a$

<u>Theorem</u> Let D be a ratio seminear - ring and a a symbol not representing any element in D. Let $d \in D$, $S_R \subsetneq RI_D(d)$ and $S_L \subsetneq LI_D(d)$ have the following properties

(1) S_R and S_L are filters of $RI_D(d)$ and $LI_D(d)$ under addition respectively

(2) If $D\backslash S_R \neq \phi$ then $D\backslash S_R$ is a completely prime ideal of $(D,+)$

and If $D\backslash S_L \neq \phi$ then $D\backslash S_L$ is a completely prime ideal of $(D,+)$

(3) If $S_R \cap D\backslash S_L \neq \phi$ then $d \in D\backslash S_R$

and if $S_L \cap D\backslash S_R \neq \phi$ then $d \in D\backslash S_L$

(4) $d \in \cap S_L$ or $d \in 1\ D\backslash S_R \cap D\backslash S_L$

Then we can extend the binary operations of D to $K = D \cup \{a\}$ making K into a seminear - fields of type VI such that

(1) $ax = dx$ and $xa = xd$ for all $x \in D$ and $a^2 = d^2$

(2) $a+x = a$ for all $x \in S_R$ and

$a+x = d+x$ for all $x \in D\backslash S_R$

$x+a = a$ for all $x \in S_L$ and

$x+a = x+d$ for all $x \in D\backslash S_L$

(3) $a+a = d+d$