บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาครั้งนี้เป็นการศึกษาถึงการเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ราคาซื้อขายทองคำระหว่างแบบจำลองอารีมา การ์ชเอ็ม อีการ์ชและจีเจอาร์ โดยผู้ศึกษาได้รวบรวมแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งได้จากการค้นคว้าข้อมูลจากแหล่งต่างๆ เพื่อนำมาใช้เป็นแนวทางในการศึกษาได้ดังนี้

2.1 ทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษา

การวิเคราะห์อนุกรมเวลา (Time Series Analysis) เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงไปตามลำดับเวลาที่เกิดขึ้น โดยข้อมูลอนุกรมเวลาอาจเก็บเป็นรายเดือน, รายวัน, รายไตรมาส หรือรายปี ขึ้นอยู่กับประโยชน์ที่จะนำไปใช้ โดยลักษณะการเปลี่ยนแปลงตามลำดับเวลาที่เกิดขึ้นอาจมีหรือไม่มีรูปแบบก็ได้ ซึ่งหากข้อมูลอนุกรมเวลาแสดงให้เห็นถึงรูปแบบการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาที่ผ่านมาในอดีต ก็จะสามารถนำมาคาดการณ์ถึงลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่อาจเกิดขึ้นในอนาคตได้ ดังนั้นข้อมูลอนุกรมเวลาจึงมีประโยชน์มากในการวิเคราะห์และตัดสินใจ

ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้เป็นการศึกษาการเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ราคาทองคำระหว่างแบบจำลองอารีมา การ์ชเอ็ม อีการ์ชและจีเจอาร์ ใช้แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์อนุกรมเวลา การทดสอบความนิ่งของข้อมูล การทดสอบ Unit Root แบบจำลอง Autoregressive Integrated Moving Average(ARIMA) แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity(GARCH) แบบจำลอง GARCH-in-mean(GARCH-M) แบบจำลอง Exponential GARCH(E-GARCH) แบบจำลอง Asymmetric Univariate GARCH(GJR)

2.1.1 การทดสอบความนิ่งของข้อมูล (Stationary) และการทดสอบยูนิทรูท (Unit Root Test)

สำหรับการศึกษาข้อมูลที่เป็นอนุกรมเวลา (Time series data) นั้นเรามีข้อสมมติว่าข้อมูลมีลักษณะ “นิ่ง” (Stationary) เนื่องด้วยโดยทั่วไปข้อมูลอนุกรมเวลามีลักษณะ “ไม่นิ่ง” (Nonstationary) เมื่อทำการหาสมการถดถอยระหว่างตัวแปรอนุกรมเวลา 2 ตัวแปรออกแล้วเรา

มักจะพบว่าได้ R^2 มีค่าสูงมากและค่าสถิติ t (t-statistic) จะมีนัยสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสองตัวโดยที่ในทางทฤษฎีแล้วไม่มีความหมายในทางเศรษฐศาสตร์ (ทรงศักดิ์ ศรีบุญจิตต์, 2547) เนื่องจากการทดสอบความสัมพันธ์แบบถดถอยของตัวแปรเราใช้ตาราง t ที่มีการแจกแจงแบบมาตรฐานแต่ค่าสถิติที่คำนวณได้จากความสัมพันธ์แบถดถอยของตัวแปรที่ไม่นิ่งนั้นใช้ค่าสถิติ t (t-statistic) ที่มีการแจกแจงแบบไม่มาตรฐานจึงจะนำไปสู่การลงความเห็นที่ผิดพลาดได้

ข้อมูลที่มีลักษณะนิ่ง (Stationary) หมายถึงข้อมูลที่มีค่าเฉลี่ย (Mean) และความแปรปรวน (Variance) ที่มีค่าคงที่ (Constant) เมื่อเวลาเปลี่ยนไปในขณะที่ค่าความแปรปรวนร่วม (Covariance) เกี่ยวระหว่างสองคาบเวลาจะขึ้นอยู่กับช่องว่าง (gap) ระหว่างคาบเวลาเท่านั้น (ทรงศักดิ์ ศรีบุญจิตต์, 2547) ถ้าข้อมูลไม่ได้เป็นไปตามเงื่อนไขนี้ให้ลงความเห็นว่าข้อมูลมีลักษณะไม่นิ่ง (Nonstationary) เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของคณิตศาสตร์ได้ดังต่อไปนี้

กระบวนการเชิงสุ่ม (X_t) จะถูกเรียกว่า “นิ่ง” (Stationary) ถ้า

Mean : $E(X_t) = \text{constant} = \mu$

Variance : $V(X_t) = \text{constant} = \sigma^2$

Covariance : $\operatorname{cov}(X_t, X_{t+k}) = E(X_1 - \mu)(X_{t+k} - \mu) = \sigma_k - \mu$

เนื่องด้วยข้อมูลที่ได้มาจากกระบวนการเชิงสุ่ม (Random Process) เราจึงต้องนำข้อมูลนั้นมาทดสอบว่ามีความนิ่งหรือไม่ โดยการทดสอบยูนิทรูท (Unit Root) ดังสมการดังต่อไปนี้

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (2.1)$$

ให้ สมมติฐานว่าง คือ $H_0 : \rho = 1$

$H_0 : |\rho| < 1$

ถ้ายอมรับ H_0 แสดงว่าข้อมูลมีลักษณะไม่นิ่ง (Nonstationary) แต่ถ้าปฏิเสธ H_0 แสดงว่าข้อมูลนั้นมีลักษณะนิ่ง (Stationary)

สำหรับการทดสอบแบบ Dickey-Fuller Test (DF) ซึ่งถูกนำเสนอโดย Dickey และ Fuller ในปี 1981 เพื่อให้ง่ายต่อการทดสอบยูนิทรูท (Unit Root) ของข้อมูลอนุกรมเวลาว่ามีความนิ่งหรือไม่ ได้เสนอให้ θ มีค่าเท่ากับศูนย์ โดยนำ X_{t-1} ลบทั้งสองข้างของสมการที่ (2.1) ดังที่จะแสดงต่อไปนี้

จาก $$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$X_t - X_{t-1} = \rho X_{t-1} - X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = (\rho - 1) X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (2.2)$$

ให้ สมมติฐานว่าง คือ $H_0 : \rho = 1$

$H_0 : |\rho| < 1$

ถ้ายอมรับ H_0 แสดงว่าข้อมูลมีลักษณะไม่นิ่ง (Nonstationary) แต่ถ้าปฏิเสธ H_0 แสดงว่าข้อมูลนั้นมีลักษณะนิ่ง (Stationary) และการทดสอบนี้ยังสามารถแปลงเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้คือ

กรณีไม่มีค่าคงที่และแนวโน้มเวลา $\Delta X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$ (2.3)

กรณีมีเฉพาะค่าคงที่ $\Delta X_t = \alpha + \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$ (2.4)

กรณีมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลา $\Delta X_t = \alpha + \beta_t + \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$ (2.5)

ต่อมาในปี 1984 Said และ Dickey ได้นำเสนอวิธี Augmented Dickey-Fuller Test (ADF) เพิ่มจำนวนของ lagged difference terms เข้าไปในสมการเพื่อแก้ปัญหา Serial Correlation ดังสมการต่อไปนี้

กรณีไม่มีค่าคงที่และแนวโน้มเวลา $\Delta X_t = \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{\rho} \phi_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$ (2.6)

กรณีมีเฉพาะค่าคงที่ $\Delta X_t = \alpha + \theta X_{t-i} + \sum_{i=1}^{\rho} \phi_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$ (2.7)

กรณีมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลา $\Delta X_t = \alpha + \beta_t + \theta X_{t-i} + \sum_{i=1}^{\rho} \phi_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$ (2.8)

ในการตรวจสอบว่าข้อมูลมีลักษณะนิ่งหรือไม่นิ่งนั้น สามารถเปรียบเทียบค่าสถิติ t ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤต (Critical Value) ในตาราง ADF โดยใช้สถิติ t (t-statistic) ซึ่งมีสูตรดังต่อไปนี้

$$t = \frac{\hat{\theta}}{S.E.\bar{\theta}}$$

2.1.2 แบบจำลอง Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)

แบบจำลอง Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) ได้มีการศึกษาโดย Grorge Box และ Gwilym Jenkins (1976) แต่ Wold (1938) ได้เป็นผู้ให้พื้นฐานทางทฤษฎีของกระบวนการหรือระบบ ARIMA บนพื้นฐานของ Wold แบบจำลอง ARIMA ได้ถูกพัฒนาขึ้นใน 3 ทิศทาง ซึ่งได้แก่ ขั้นตอบสนองการประมาณค่าและการบ่งชี้ที่มีประสิทธิภาพ (Efficient identification and estimation procedures)(สำหรับกระบวนการหรือระบบ AR, MA และ ARMA) การครอบคลุมไปถึงผลลัพธ์ที่ได้รวบรวมเอาอนุกรมเวลาเชิงฤดูกาล (Seasonal time series) และการขยายขอบเขตไปเพื่อรวมเอากระบวนการหรือระบบไม่นิ่ง (Nonstationary process (ARIMA)) เข้าไว้ด้วย (ทรงศักดิ์ ศรีบุญจิตต์, 2547)

โดยทั่วไปแล้วข้อมูลอนุกรมเวลาส่วนใหญ่มีลักษณะไม่นิ่ง (Nonstationary) เนื่องจากข้อมูลอนุกรมเวลานั้นมาจากกระบวนการเชิงสุ่ม (Random Process) แต่ด้วยทฤษฎีของ AR และ MA หมายถึง ข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะนิ่ง (Stationary) ดังนั้นเมื่อข้อมูลที่รวบรวมได้มีลักษณะไม่นิ่งเราจึงต้องทำการหาผลต่าง (Differencing)

ความนิ่งและความไม่นิ่ง(Stationary and Nonstationary)

เครื่องมือทางด้านสัญลักษณ์ที่มีประโยชน์มากก็คือ backward shift operator, B. หรือ lag operator, L.(ซึ่งบางครั้งเราก็อาจใช้สัญลักษณ์ B หรือสัญลักษณ์ L สลับกันไปมา มีความหมายเหมือนกัน) ซึ่งถูกนำมาใช้ดังนี้

$$BX_t = X_{t-1} \tag{2.9}$$

ซึ้งถ้า B อยู่หน้า X_t จะมีผลต่อการ Shift ข้อมูลถอยหลังไปหนึ่งคาบเวลา และถ้าเรามี

$$B(BX_t) = B_2 X_t = X_{t-2} \tag{2.10}$$

ซึ่งหมายความว่า X_t ได้ถูก Shift ถอยหลังไปสองคาบเวลาจะได้ว่า

ผลต่างที่หนึ่ง (first difference)

$$X_t^{'} = X_t - X_{t-1} \tag{2.11}$$

ถ้าเราใช้ backward shift operator จะได้

$$X_t^{'} = X_t - BX_t = (1-B)X_t \quad (2.12)$$

ผลต่างอันดับที่สอง (second-order difference)

$$\begin{aligned} &= X_t^{'} - X_{t-1}^{'} \\ &= \left(X_t - X_{t-1}\right) - \left(X_{t-1} - X_{t-2}\right) \\ X_t'' &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} \\ &= \left(1 - 2B + B^2\right) X_t \\ &= \left(1-B\right)^2 X_t \end{aligned} \quad (2.13)$$

$\left(1-B\right)^2$ คือ ผลต่างอันดับที่ 2 (second-order difference)

$1-B^2$ คือ ผลต่างที่ 2 (second difference) ซึ่งไม่เหมือนกัน

$\left(1-B\right)^d X_t$ คือ ผลต่างอันดับที่ d

กระบวนการหรือระบบอัตถดถอย (Autoregressive Process)

กระบวนการหรือระบบ AR(p) ซึ่งก็คือ กระบวนการหรือระบบ AR ที่มีอันดับที่ p เขียนในรูปของ ARIMA(p,d,q) ได้ดังนี้คือ

ARIMA(p,0,0) ซึ่งคือ

$$X_t = \mu' + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + e_t \quad (2.14)$$

โดยที่ μ' คือ พจน์คงที่หรือคงตัว (Constant term)

ϕ_j คือ พารามิเตอร์อัตตถดถอยตัวที่ j

e_t คือ พจน์ความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t

กระบวนการหรือระบบเคลื่อนที่เฉลี่ย (Moving Average Process)

กระบวนการหรือระบบ MA(q) ซึ่งก็คือ กระบวนการหรือระบบ MA ที่มีอันดับที่ q เขียนในรูปของ ARIMA(p,d,q) ได้ดังนี้คือ

ARIMA(0,0,q) ซึ่งคือ

$$X_t = \mu + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q} \tag{2.15}$$

โดยที่ μ คือ พจน์คงที่หรือคงตัว (Constant term)

θ_j คือ พารามิเตอร์อัตตถดถอยตัวที่ j

e_t คือ พจน์ความคลาดเคลื่อน ณ เวลา t

ดังนั้นผลรวมระหว่าง AR และ MA ในรูปของกระบวนการหรือระบบ ARIMA สำหรับข้อมูลที่มีลักษณะนิ่ง (Stationary) จะมีรูปแบบเป็น ARIMA (p,0,q) สมมติให้ AR(1) และ MA(1) เราสามารถเขียนในรูป ARIMA ได้คือ ARIMA (1,0,1) ดังจะแสดงในสมการต่อไปนี้

ARIMA (1,0,1)

$$X_t = \mu' + \phi_t X_{t-1} + e_t - \theta_t e_{t-1}$$

หรือ

$$\underbrace{(1-\phi_1 B)}_{\text{AR(1)}} X_t = \mu' + \underbrace{(1-\theta_1 B)}_{\text{MA(1)}} e_t$$

แต่ถ้าข้อมูลมีลักษณะไม่นิ่ง (Nonstationary) จะต้องหาผลต่าง (differencing) d ครั้ง เพื่อให้ข้อมูลมีลักษณะนิ่ง ดังนี้

ARIMA (1,1,1)

$$\underbrace{(1-B)}_{\text{First difference}}\underbrace{(1-\phi_1 B)}_{\text{AR(1)}} X_t = \mu' + \underbrace{(1-\theta_1 B)}_{\text{MA(1)}} e_t$$

หรือ

$$\left[1-B\left(1+\phi_1\right)+\phi_1 B^2\right]X_t = \mu' + e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

$$X_t = \left(1+\phi_1\right)X_{t-1} - \phi_1 X_{t-2} + \mu' + e_t - \theta_t e_{t-1}$$

แบบจำลองการพยากรณ์โดยวิธีของ Box-Jenkins

การพยากรณ์อนุกรมเวลาของโดยวิธีของ Box-Jenkins ในรูปแบบของ (p,d,q) ต้องพิจารณาก่อนว่าข้อมูลอนุกรมเวลามีลักษณะนิ่ง แล้วนำเข้าสู่ขั้นตอนของ Box-Jenkins ดังนี้

1) การกำหนดรูปแบบ (Identification) ให้อนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง (Stationary) เป็นการหารูปแบบ ARIMA (p,d,q) ที่เหมาะสมให้กับอนุกรมเวลา โดยที่ Autocorrelation: P_k มีค่าอยู่ในช่วง [1,-1] โดยพิจารณาเปรียบเทียบค่า Autocorrelation (R_k) ของอนุกรมตัวอย่างกับค่า Autocorrelation (P_k) ของอนุกรมเวลาของประชากรที่มีช่วงเวลาย้อนหลังไป k หน่วยเวลา ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$Y_t = \sum nt = a\left(Y_t\right)$$

โดยที่ q = จำนวนเวลาสุดท้ายที่ย้อนหลัง

n = จำนวนข้อมูล

t = ระยะเวลา

Partial Autocorrelation : R_{kk} คือ การวัดความสัมพันธ์ของแต่ละช่วงเวลา โดยมีช่วงเวลาที่ย้อนหลังไป k หน่วยเวลาโดยพิจารณาเปรียบเทียบค่า Partial Autocorrelation ของอนุกรมเวลาตัวอย่าง (R_{kk}) กับค่า Partial Autocorrelation ของอนุกรมเวลาประชากร (P_{kk}) ที่มีช่วงเวลาย้อนหลังไป k หน่วยเวลา ซึ่งมีสูตร ดังนี้

$$R_k = \frac{\sum_{t-a}^{n-k}\left(Y_t - q\right)\left(Y_t + k - q_t\right)}{\sum_{t-a}^{n}\left(Y_t - q\right)^2}$$

การพิจารณาแต่ละรูปแบบ ต้องพิจารณา R_k, R_{kk} กับ P_k, P_{kk} พร้อมกันหายๆ ค่า จึงมักพิจารณาจากรูปที่เรียกว่า “คอเรลโลแกรม” (Correlogram) ที่ได้จากการพร็อต R_k, R_{kk} กับ P_k, P_{kk}

ในช่วงเวลาที่ k ด้วยเหตุนี้การเปรียบเทียบรูปแบบจึงเป็นการเปรียบเทียบคอเรลโลแกรมของค่า Autocorrelation (R_k) ของอนุกรมตัวอย่างกับค่า Autocorrelation (P_k) ของอนุกรมเวลาของประชากร และคอเรลโลแกรมของค่า Partial Autocorrelation ของอนุกรมเวลาตัวอย่าง (R_{kk}) กับค่า Partial Autocorrelation ของอนุกรมเวลาประชากร (P_{kk}) สำหรับแต่ละรูปแบบจะมีคอเรลโลแกรมของ P_k และ P_{kk} ต่างกัน

2) การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Estimation) ของแบบจำลอง โดยการหาค่าประมาณแบบง่ายหรือค่าประมาณที่ได้จากการวิเคราะห์ตัวเลข สำหรับค่าประมาณแบบง่ายจะทำโดยการสร้างสมการที่ได้มาจากความสัมพันธ์ระหว่าง P_k และพารามิเตอร์ โดยสมการที่สร้างขึ้นจะมีจำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณ ส่วนค่าประมาณที่ได้จากการวิเคราะห์ตัวเลขจะได้จากการแก้สมการที่สร้างขึ้นมาจากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ในขั้นตอนของการวิเคราะห์ตัวเลขจะต้องมีการกำหนดค่าประมาณเริ่มต้น ซึ่งส่วนใหญ่จะใช้การประมาณแบบง่ายเป็นจุดเริ่ม หลังวิเคราะห์เสร็จแล้วจะใช้ค่าประมาณสุดท้ายที่นำไปใช้ประโยชน์ในการสร้างสมการพยากรณ์

3) การตรวจแบบจำลอง (Diagnostic checking) เมื่อกำหนดรูปแบบและประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง จะต้องทำการตรวจสอบทุกครั้งว่ารูปแบบที่กำหนดนั้นมีความเหมาะสมจริงหรือไม่ โดยการตรวจสอบสามารถทำได้หลายวิธี ได้แก่ การพิจารณาคอเรลโลแกรมของ R_k หรือของความคลาดเคลื่อน การทดสอบค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองด้วยการทดสอบแบบ t-test และการทดสอบความเหมาะสมของแบบจำลองโดยการทดสอบของ Box และ Pierce ซึ่งพิจารณาจากค่า Q-statistic ดังสมการนี้

$$Q = n\sum_{k-1}^{m} \hat{\rho}_k^2$$

โดยที่ n = จำนวนของข้อมูล

m = ค่า lag length

ซึ่งค่า Q ที่ได้มีการแจกแจงแบบ Chi-square และมี Degree of freedom เท่ากับ m โดยให้สมมติฐานว่าง เป็นพจน์ของความคลาดเคลื่อนที่ได้จากการประมาณที่มีลักษณะเป็น White noise หมายถึง แบบจำลองที่ไม่มีอัตสหสัมพันธ์ ถ้าหากแบบจำลองที่ได้ไม่มีอัตสหสัมพันธ์ให้ใช้แบบจำลองนี้ไปพยากรณ์ต่อไป แต่ถ้าหากแบบจำลองมีอัตสหสัมพันธ์ให้กลับไปกำหนดรูปแบบตามข้อที่ 1 ใหม่

4) การพยากรณ์ (Forecasting) เมื่อได้แบบจำลองที่เหมาะสม สามารถทำการพยากรณ์ได้ทั้งแบบจุด (Point forecast) และแบบช่วง (Interval forecast) ซึ่งในการพยากรณ์แบบช่วงนั้นปกติจะมีอยู่ 3 ช่วงคือ ช่วง Historical forecast, Ex-post forecast และช่วง Ex-ante forecast

2.1.3 แบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroskedastic (ARCH)

ในปี 1982 Engle ได้แสดงแนวคิดถึงความเป็นไปได้ที่จะสร้างแบบจำลองที่มีค่าเฉลี่ย (Mean) และความแปรปรวน (Variance) ขึ้นพร้อมกัน โดยในขั้นตอนแรกต้องทำความเข้าใจก่อนว่าทำไมถึงต้องใช้การพยากรณ์อย่างมีเงื่อนไข

จากแบบจำลองอารีมา $X_t = a_0 + a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ และต้องการพยากรณ์ X_{t+1} ดังนั้นเงื่อนไขเฉลี่ยของการพยากรณ์ของ X_{t+1} คือ

$$E_t X_{t+1} = a_0 + a_1 X_t$$

ถ้าใช้ค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไขมาพยากรณ์ X_{t+1} ฉะนั้นการพยากรณ์ค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

$$E_t\left[\left(X_{t+1} - a_0 - a_1 X_t\right)^2\right] = E_t \varepsilon_{t+1}^2 = \sigma^2$$

อย่างไรก็ตามถ้าการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขถูกนำมาใช้ ก็หมายถึงค่าเฉลี่ยของ $\{X_t\}$ ในระยะยาวเท่ากับ $\dfrac{a_0}{(1-a_1)}$ จะได้ว่าการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนคือ

$$E\left\{\left(X_{t+1} - \frac{a_0}{(1-a_1)}\right)^2\right\} = E\left[\left(\varepsilon_{t+1} + a_1\varepsilon_t + a_1^2\varepsilon_{t-1} + a_1^3\varepsilon_{t-2} + \dots\right)^2\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{(1-a_1)^2}$$

จะเห็นว่า $\frac{1}{(1-a_1)^2}$ ที่ได้มีค่ามากกว่า 1 ซึ่งหมายถึงการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไข มีค่าความแปรปรวนมากกว่าการพยากรณ์อย่างมีเงื่อนไข ดังนั้นการพยากรณ์อย่างมีเงื่อนไขจึงถูกนำมาใช้ในการพยากรณ์มากกว่า

โดยแบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroskedastic (ARCH) เกิดจากการให้ข้อสังเกตว่าค่าความแปรปรวนจากแบบจำลองอารีมาได้ ตัวอย่างเช่น ให้ $\{\varepsilon_t\}$ ที่ได้จากการประมาณค่าของส่วนเหลือ (Estimated Residuals) จากสมการ

$$X_t = a_0 + a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

ดังนั้นค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของ X_{t+1} คือ

$$\begin{aligned} Var(X_{t+1} \mid X_t) &= E\left[(X_{t+1} - a_0 - a_1 X_t)^2\right] \\ &= E_t \varepsilon_{t+1}^2 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $E_t \varepsilon_{t+1}^2$ เท่ากับค่าความแปรปรวนที่ (σ^2) คงที่ แต่ถ้าสมมติให้ค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขไม่คงที่ วิธีการหนึ่งที่จะนำมาพยากรณ์ค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข คือ

การลำดับของ Autoregressive หรือ AR(q) โดยการยกกำลังสองของส่วนเหลือที่ถูกประมาณค่า ดังนี้

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + V_t$$

เมื่อ V_t คือ White noise process

ซึ่งก็คือสมการของ Autoregressive Conditional Heteroskedastic (ARCH: AR(q)) นั้นเอง

2.1.4 แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH)

แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) เป็นแบบจำลองที่ Bollerslev (1986. อ้างถึงใน ทรงศักดิ์ ศรีบุญจิต, 2547) ได้ขยายมาจาก

ARCH model โดยเสนอแนวคิดที่ว่าการพยากรณ์ค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขสามารถอธิบาย จาก ค่าความแปรปรวนและค่าความคลาดเคลื่อน ที่มีลักษณะ ARMA process พร้อมกันได้ ต่อไปนี้

$$X_t = a_0 + a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (2.16)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t=i}^2 \qquad (2.17)$$

จากสมการ (2.16) เป็นสมการค่าเฉลี่ย (mean equation) ที่ถูกกำหนดจากตัวแปรภายนอกและค่าความคลาดเคลื่อน ε_t ส่วนสมการ (2.17) เป็นสมการค่าความแปรปรวนในคาบเวลาปัจจุบันที่ถูกกำหนดโดย 3 ฟังก์ชัน คือ

- ค่าคงที่ α_0
- เหตุการณ์ที่สำคัญที่ส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนในคาบเวลาที่ผ่านมา โดยถูกกำหนดให้อยู่ในรูปกำลังสองของส่วนเหลือจากสมการค่าเฉลี่ย $E\varepsilon_{t-1}^2$ ซึ่งก็คือ ARCH term นั่นเอง
- ค่าพยากรณ์ความแปรปรวนในคาบเวลาที่ผ่านมา σ_{t-i}^2 ซึ่งก็คือ GARCH term นั่นเอง

ดังนั้นจากสมการ (2.17) จึงถูกเรียกว่า Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity : GRACH(p,q) ซึ่งได้เปิดโอกาสให้มีส่วนประกอบที่เป็น Autoregressive Moving Average ในความแปรปรวนที่มีลักษณะ Heteroskedastic Variance จะเห็นได้ว่า ถ้า p=1 และ q=1 เราก็จะได้แบบจำลอง GARCH(0,1) ซึ่งก็คือ ARCH(1) หรือ ARCH(q=1) นั่นเอง โดยสรุปว่าถ้า β_i ทุกตัวมีค่าเท่ากับศูนย์ แบบจำลอง GARCH ก็คือ ARCH(q) นั่นเอง

2.1.5 แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity in Mean (GARCH-M)

Engle (1987. อ้างถึงใน จิตติ ตันเสนีย์, 2549) ได้ทำการขยายแนวคิดนี้โดยให้ค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไขเป็นฟังก์ชันของแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขโดยรู้จักในชื่อของ GARCH-in-Mean หรือ GARCH-M ดังสมการต่อไปนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha X_{t-1} + \delta_1 \sigma_t^{1/2} + \varepsilon_t \qquad (2.18)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \qquad (2.19)$$

ซึ่งสมการ (2.18) ถูกเรียกว่า Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity in Mean เนื่องจากค่าความแปรปรวนที่ได้ ถูกนำไปใส่ในสมการค่าเฉลี่ย หรือสมการ (2.18) เพื่อการประมาณค่าของตัวแปรที่ถูกศึกษา

2.1.6 แบบจำลอง Exponential GRACH (E-GRACH)

E-GRACH หรือ Exponential GRACH model ถูกเสนอโดย Nelson (1991) E-GRACH model ให้ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขมีค่าดังสมการ (2.20)

$$\log\left(\sigma_t^2\right) = \omega + \alpha \left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta \log\left(\sigma_{t-1}^2\right) \qquad (2.20)$$

ข้อแตกต่างของ E-GRACH model ระหว่างโปรแกรม E-Views กับโมเดลเดิมของ Nelson มีอยู่ 2 ข้อคือ ข้อแรก Nelson ได้ตั้งสมมติฐานว่า error มีการแจกแจงแบบ general distribution ส่วน E-Views ได้ตั้งสมมติฐานว่า error มีการแจกแจงแบบ normal distribution ข้อที่สอง ค่า log ของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของ Nelson แตกต่างจากของ E-Views เล็กน้อยดังสมการ (2.21)

$$\log\left(\sigma_t^2\right) = \omega + \alpha \left(\left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta \log\left(\sigma_{t-1}^2\right) \qquad (2.21)$$

การประมาณค่าสมการภายใต้สมมติฐานที่ error มีการแจกแจงแบบปกติจะให้ค่าที่เหมือนกันยกเว้นค่า intercept term ω ที่แตกต่างกันเท่ากับ $\alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

และการประมาณค่า E-GRACH model โดยโปรแกรม E-Views ได้ดังสมการ (2.22)

$$\log\left(\sigma_t^2\right) = \omega + \sum_{t=1}^{q}\left(\alpha_i \left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log\left(\sigma_{t-j}^2\right) \qquad (2.22)$$

2.1.7 แบบจำลอง Asymmetric Univariate GARCH (GJR)

Asymmetric Univariate GARCH หรือ GJR Model ถูกเสนอโดย Nelson (1991) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i I(\varepsilon_{t-i}) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j} \qquad (2.23)$$

เมื่อเงื่อนไข $\omega > 0$, $\alpha_i + \gamma_i \geq 0$ สำหรับ $i = 1,\ldots,p$ และ $\beta_i \geq 0$ สำหรับ $i = 1,\ldots,p$ เป็นจริง โดยที่ h_t ไม่เป็นค่าลบ สำหรับ t ทุกค่า, $I(\varepsilon_t)$ คือตัวแปรชี้วัด (Indicator Variable) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$I(\varepsilon_t) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_t \leq 0 \\ 0, & \varepsilon_t > 0 \end{cases}$$

GJR (หรือ $\sum \gamma$) effect เป็นการวัดความไม่สมมาตรของความผันผวนอย่างมีเงื่อนไข (Asymmetric Conditional Volatility) โดยจะรวมอยู่ในผลกระทบระยะสั้นจากตัวแปรสุ่ม (Short-run persistence of shocks) ต่อผลตอบแทนดัชนีตลาดหลักทรัพย์, $\sum \alpha + \sum \gamma / 2$ และผลกระทบของผลตอบแทนดัชนีตลาดหลักทรัพย์ในระยะยาว (Long-run persistence of shocks) , $\sum \alpha + \sum \beta + \sum \gamma / 2$

ตัวพารามิเตอร์ในสมการใช้การประมาณแบบ Maximum Likelihood ซึ่งใช้สำหรับกรณีที่เป็น Joint Normal Density โดยหาก η_i ไม่เป็นไปตาม Joint Multivariate Normal Distribution การประมาณที่เหมาะสมคือ การใช้การประมาณแบบ Quasi- Maximum Likelihood (QMLE).

2.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

นริสา สมุทรสาคร (2547) ได้ทำการศึกษาการพยากรณ์ทองคำโดยวิธีอารีมา โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อพยากรณ์ราคาทองคำ 2 ประเภทคือ ราคาขายทองคำแท่งและทองคำรูปพรรณ โดยการพยากรณ์ใช้ข้อมูลเป็นรายเดือนจำนวน 120 เดือน ตั้งแต่ปี 2537 ถึง 2546 ซึ่งรวบรวมข้อมูลจากธนาคารแห่งประเทศไทย โดยใช้แบบจำลองอารีมาด้วยวิธีบอกส์และเจนส์กินส์ (Box-Jennkins) จากการศึกษาพบว่า ข้อมูลราคาทองคำแท่งและทองคำรูปพรรณมีลักษณะไม่นิ่ง จากการทดสอบความนิ่งของข้อมูล พบว่าข้อมูลนิ่งที่ระดับ (1) ทั้งนี้เนื่องจากการพิจารณาคอเรลโลแกรม ผลปรากฏว่า แบบจำลอง AR(2) MA(2) MA(5) มีความเหมาะสมมากที่สุดสำหรับข้อมูลทองแท่งและทองรูปพรรณ เมื่อทำการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองพบว่าแบบจำลองมีลักษณะ White Noise ที่ระดับสำคัญทางสถิติที่ 1% แบบจำลองทั้งสองให้ค่า Root Mean Squared Error (RMSE) และค่า Theil’s Inequality Coefficient (U) ที่ต่ำที่สุด ดังนั้นแบบจำลองดังกล่าวจึงมีความเหมาะสมที่สุดที่จะเป็นตัวแทนของราคาขายทองคำแท่งและทองคำรูปพรรณเพื่อการพยากรณ์ในอนาคต โดยผลการพยากรณ์ราคาขายทองคำแท่งระหว่างเดือนมกราคมถึงเดือนเมษายน 2547 ราคาพยากรณ์ที่ได้เท่ากับ 7,817.89 7,715.80 และ 7,761.17 บาทต่อบาททองคำ ตามลำดับ ส่วนราคาขายทองคำรูปพรรณระหว่างเดือนมกราคมถึงเดือนเมษายน 2547 ราคาพยากรณ์ที่ได้เท่ากับ 7,817.89 7,893.76 7,915.98 7,917.87 ตามลำดับ

ราชพล สุนทรศรี (2548) ได้ทำการศึกษาการพยากรณ์ราคาน้ำมันดิบโดยวิธีอารีมาโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะวิเคราะห์และการพยากรณ์การเคลื่อนไหวของราคาน้ำมันที่นำเข้าจากต่างประเทศ คือ ประเทศโอมาน ประเทศดูไบ ประเทศไนจีเรียและประเทศอังกฤษ การพยากรณ์ใช้ข้อมูลเป็นรายเดือนจำนวน 271 เดือน ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ. 2527 ถึงเดือนตุลาคม พ.ศ. 2527 และข้อมูลรายไตรมาส ตั้งไตรมาสที่ 1 พ.ศ. 2527 ถึงไตรมาสที่ 3 พ.ศ. 2527 โดยใช้แบบจำลองอารีมาช่วยในการวิเคราะห์ โดยวิธีบอกส์และเจนส์กินส์ (Box-Jennkins) จากการศึกษาโดยการทดสอบยูนิตรูท (Unit Root) ของราคาน้ำมันดิบที่นำเข้าทั้ง 4 ประเทศ พบว่าข้อมูลราคาน้ำมันมียูนิตรูท (Unit Root) จึงทำการหาผลลำดับที่ 1 จากการพิจารณาคอเรลโลแกรมผลปรากฏว่าแบบจำลอง AR(1) MA(1), AR(1) AR(2) MA(1), AR(2) MA(1) MA(2) และ AR(2) MA(1) MA(2) และ AR(1) MA(1), AR(1) MA(2), AR(1) AR(2) MA(1) MA(2) และ AR(1) AR(2) MA(1) MA(2) ของข้อมูลแบบรายไตรมาส เป็นแบบจำลองที่มีความเหมาะสมมากที่สุดของการพยากรณ์ราคาน้ำมันดิบที่นำเข้าจากประเทศโอมาน ประเทศดูไบ ประเทศไนจีเรียและประเทศอังกฤษคาม

ลำดับ เมื่อทำการทดสอบความถูกต้องของแบบจำลองพบว่าค่าส่วนเหลือของทุกแบบจำลองมีลักษณะเป็น White Noise ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ 0.01 และทุกแบบจำลองข้างต้นจึงมีความเหมาะสมที่จะเป็นตัวแทนของราคาน้ำมันดิบในอนาคตที่นำเข้าจากแต่ละประเทศ โดยผลการพยากรณ์ราคาน้ำมันดิบที่นำเข้าจากประเทศโอมานระหว่างเดือนพฤศจิกายน พ.ศ. 2547 ถึงเดือนมกราคม พ.ศ. 2548 คือ 38.63, 38.25 และ 38.13 ดอลลาร์/บาร์เรล ส่วนผลการพยากรณ์ราคาน้ำมันดิบที่เข้าจากตลาดดูไบระหว่างเดือนพฤศจิกายน พ.ศ. 2547 ถึงเดือนมกราคม พ.ศ. 2548 คือ 36.71, 36.31 และ 35.89 ดอลลาร์/บาร์เรล และผลการพยากรณ์ราคาน้ำมันดิบที่เข้าจากตลาดไนจีเรียระหว่างเดือนพฤศจิกายน พ.ศ. 2547 ถึงเดือนมกราคม พ.ศ. 2548 คือ 49.44, 48.94 และ 49.43 ดอลลาร์/บาร์เรล ผลการพยากรณ์ราคาน้ำมันดิบที่เข้าจากประเทศโอมาน ดูไบ ไนจีเรียและอังกฤษ ตั้งแต่ไตรมาสที่ 4 พ.ศ. 2547 ถึงไตรมาสที่ 2 พ.ศ. 2548 คือ 33.55, 34.50, 33.65, 34.67, 34.95, 40.57, 39.46, 41.16 และ 40.74, 40.44, 42.74 ดอลลาร์/บาร์เรล ตามลำดับ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าการพยากรณ์ราคาน้ำมันที่นำเข้าจากต่างประเทศจะเป็นประโยชน์ต่อการกำหนดมาตรการเพื่อรองรับปัญหาที่อาจเกิดจากความผันผวนของราคาน้ำมันในอนาคต

ภัทร์ ตั้งตระกูล (2539) ศึกษาการวิเคราะห์ทางด้านเทคนิคด้วยแบบจำลองการ์ชเอ็มในหลักทรัพย์กลุ่มวัสดุก่อสร้างและตกแต่ง การศึกษาได้แบ่งออกเป็นสองส่วนด้วยกัน ในส่วนแรกทำการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ในปัจจุบันกับราคาปิดของหลักทรัพย์ในอดีตและความเสี่ยงซึ่งแทนด้วยความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของหลักทรัพย์ด้วยแบบจำลอง ARMA with GARCH-M ซึ่งผลการศึกษาพบว่าในทุกหลักทรัพย์นั้นราคาปิดในปัจจุบันขึ้นอยู่กับราคาปิดและค่าความคลาดเคลื่อนในอดีตอย่างมีนัยสำคัญแต่มีเฉพาะหลักทรัพย์ บจม.ปูนซีเมนต์ไทย เท่านั้นที่ราคาปิดในปัจจุบันขึ้นกับความเสี่ยงอย่างมีนัยสำคัญ และข้อมูลหลักทรัพย์ทุกตัวยังปรากฏเทอม ARCH และ GARCH แสดงถึงความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขที่เกิดขึ้นในทุกข้อมูลหลักทรัพย์ ส่วนที่สองเป็นการประยุกต์แบบจำลอง ARMA with GARCH-M ในการวิเคราะห์หลักทรัพย์ทางด้านเทคนิค ในการศึกษานี้ได้ทำการสร้างสัญญาณซื้อและขายหลักทรัพย์ด้วยช่วงความเชื่อมั่น $\pm$ 1.0 standard deviation จากแบบจำลอง ARMA with GARCH-M และเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการวิเคราะห์ทางเทคนิคของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้กับดัชนีกำลังสัมพัทธ์ (RSI) โดยจำลองสถานการณ์ขึ้นจากสัญญาณซื้อและขายที่ได้ ผลการศึกษาพบว่าสัญญาณซื้อขายที่ได้จากสองวิธีให้ผลที่สอดคล้องกันแต่ช่วงความเชื่อมั่นจากแบบจำลองจะให้สัญญาณซื้อและขายถี่กว่าดัชนีกำลังสัมพัทธ์ (RSI) ในทุกหลักทรัพย์ช่วงความเชื่อมั่นจากแบบจำลอง ARMA with GARCH-M และดัชนีกำลังสัมพัทธ์ (RSI) ให้ผลตอบแทนจากการซื้อขายหลักทรัพย์ที่เป็นบวก

แต่เมื่อเปรียบเทียบถึงอัตราผลตอบแทนต่อการลงทุนแล้วดัชนีกำลังสัมพัทธ์ (RSI) จะให้ค่าสูงกว่าความเชื่อมั่นซึ่งจะเหมาะสมกับนักลงทุนระยะยาว

สธนพล วิเชียรรัตนพันธ์ ศึกษาการวิเคราะห์ทางด้านเทคนิคด้วยแบบจำลองการ์ชเอ็ม: กรณีศึกษาหลักทรัพย์ในกลุ่มพัฒนาอสังหาริมทรัพย์ โดยเลือกหลักทรัพย์ที่มีมูลค่าตลาดสูงสุด 5 อันดับในปี 2546 ได้แก่ หลักทรัพย์ LH, ITD, CK, STECON และ CPN ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์ความเสี่ยงและผลตอบแทนที่เกิดขึ้นจากการลงทุนในหลักทรัพย์ การศึกษาได้แบ่งออกเป็นสองส่วน ในส่วนแรกทำการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของกรเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ในปัจจุบันกับราคาปิดของหลักทรัพย์ในอดีตและความเสี่ยงซึ่แทนด้วยความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของหลักทรัพย์ด้วยแบบจำลอง ARMA with GARCH-M ซึ่งผลการศึกษาการทดสอบ unit root พบว่าข้อมูลราคาปิดของหลักทรัพย์ทุกตัวมีความนิ่งที่ระดับผลต่างลำดับที่ 1 โดยหลักทรัพย์ทั้งหมดนั้นราคาปิดในปัจจุบันขึ้นอยู่กับราคาปิด ค่าความเคลื่อนในอดีตและค่าความเสี่ยงอย่างมีนัยสำคัญ แต่มีเฉพาะหลักทรัพย์ CK เท่านั้น ที่ราคาปิดในปัจจุบันไม่ขึ้นอยู่กับความเสี่ย เนื่องจากไม่มีนัยสำคัญเกิดขึ้น และในทุกหลักทรัพย์ปรากฏเทอม ARCH ที่แสดงถึงความแปรปรวนอย่างมีนัยสำคัญยอเว้นหลักทรัพย์ ITD เท่านั้น ส่วนที่สองเป็นการประยุกต์แบบจำลอง ARMA with GARCH-M โดยการศึกษานี้ได้ทำการจำลองการสร้างสัญญาณซื้อขายหลักทรัพย์ด้วยช่วงความเชื่อมั่น ± 1.0 standard deviation จากแบบจำลอง ARMA with GARCH-M และเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการวิเคราะห์ทางเทคนิคของช่วงความเชื่อมั่นที่ได้กับดัชนีกำลังสัมพัทธ์ (RSI) โดยจำลองสถานการณ์ขึ้นจากสัญญาณซื้อและขายที่ได้ ผลการศึกษาพบว่าสัญญาณซื้อขายที่ได้จากสองวิธีให้ผลที่สอดคล้องกันแต่ช่วงความเชื่อมั่นจากแบบจำลองจะให้สัญญาณซื้อและขายถี่กว่าดัชนีกำลังสัมพัทธ์ (RSI) ในหลักทรัพย์ LH, STECON และ CPN ช่วงค่าความเชื่อมั่นจากแบบจำลองและดัชนีกำลังสัมพัทธ์ (RSI) ให้ผลตอบแทนจากการซื้อขายหลักทรัพย์ที่เป็นบวก แต่ในหลักทรัพย์ ITD กับ CK ช่วงค่าความเชื่อมั่นจากแบบจำลองและดัชนีกำลังสัมพัทธ์ (RSI) ให้ผลตอบแทนจากการซื้อขายหลักทรัพย์ที่เป็นลบ ค่าอัตราส่วนระหว่างกำไรจากการซื้อขายหลักทรัพย์ต่อเงินทุนทั้งหมด (% investment) พบว่า แบบจำลองของหลักทรัพย์ที่ได้รับผลกำไร ค่า % investment จาก RSI ให้ผลตอบแทนที่มากกว่าช่วงค่าความเชื่อมั่น ได้แก่ LH, STECON และ CPN ส่วนแบบจำลองของหลักทรัพย์ที่ได้รับผลจากการขาดทุน RSI จะให้ผลตอบแทนที่ต่ำกว่าช่วงค่าความเชื่อมั่น ได้แก่ ITD กับ CK