บทที่ 3
ระเบียบวิธีวิจัย

การศึกษานี้จะทำการหาคำตอบของสองแบบจำลองคือแบบจำลองการเจริญเติบโต Deterministic และแบบจำลองการเจริญเติบโต Stochastic โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในการศึกษา

3.1 แบบจำลอง

3.1.1 แบบจำลองการเจริญเติบโต Deterministic

อรรถประโยชน์ (utility; U) ของครัวเรือนมาจากการบริโภคสินค้าในปัจจุบัน (consumption of good ; c_t) โดยครัวเรือนจะแสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุดในอนาคตภายใต้ข้อมูลที่มีอยู่ในปัจจุบันซึ่งสามารถเขียนฟังก์ชันอรรถประโยชน์ที่แสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุดของครัวเรือนได้ดังนี้

$$\max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{3.1}$$

ภายใต้สมการข้อจำกัด

$$c_t + k_t = f(k_{t-1}) \tag{3.2}$$

โดยที่ c_t คือ การบริโภค ณ เวลาที่ t

k_t คือ การสะสมทุน ณ เวลาที่ t

$u(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันความพอใจ

$f(\cdot)$ คือ สมการการผลิต

β คือ ปัจจัยส่วนลด (discount factor)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

3.1.2 แบบจำลองการเจริญเติบโต Stochastic

สำหรับแบบจำลองการเจริญเติบโต Deterministic นั้นเป้าหมายอยู่ที่การคำนวณหาฟังก์ชันการตัดสินใจ (decision function) สำหรับแบบจำลองการเจริญเติบโต Stochastic ซึ่งการตัดสินใจขึ้นอยู่กับการสะสมทุน (capital stock) และ ความแปรปรวน Stochastic

ในแบบจำลองการเจริญเติบโต Stochastic สมมุติให้ผลผลิต ณ เวลา t สามารถ มีผลกระทบต่อการบริโภค ณ เวลาปัจจุบัน (c_t) หรือการลงทุน ณ เวลาปัจจุบัน (i_t) การตัดสินใจในการบริโภคหรือการออมถูกสมมุติให้เป็นค่าที่สูงสุดซึ่งความพึงพอใจจะสูง

อรรถประโยชน์ (utility; U) ของครัวเรือนมาจากการบริโภคสินค้าในปัจจุบัน (consumption of good ; c_t) โดยครัวเรือนจะแสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุดในอนาคตภายใต้ข้อมูลที่มีอยู่ในปัจจุบันซึ่งสามารถเขียนฟังก์ชันอรรถประโยชน์ที่แสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุดของครัวเรือนซึ่งขึ้นอยู่กับการสะสมทุนเริ่มต้น (k_{-1}) โดยฟังก์ชันความพอใจสูงสุดของครัวเรือนกำหนดโดย

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)\middle| k_{-1}\right], \quad 0<\beta<1 \tag{3.4}$$

โดยที่ k_{-1} คือ การสะสมทุนเริ่มต้นและเป็นค่าที่ทราบค่า

$u(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันความพอใจ

$E[\cdot]$ คือค่าของความคาดหวัง

β คือ ปัจจัยส่วนลด (discount factor)

ภายใต้สมการข้อจำกัด

$$c_t + k_t - (1-\delta)k_{t-1} = \lambda_t k_{t-1}^{\alpha}, 0<\alpha<1, 0\le\delta\le 1 \tag{3.5}$$

โดยที่ k_t คือ การสะสมทุน (capital stock) ณ เวลาที่ t

c_t คือ การบริโภค ณ เวลาที่ t

δ คือ อัตราการเสื่อมของทุน (depreciation rate)

λ_t คือ ความแปรปรวนของเทคโนโลยี (technology shock)

α คือสัดส่วนปัจจัยทุน (capital share)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

โดยที่ค่า c_t และ $k_t \ge o$ สำหรับทุกๆ $t \ge 0$ และสมการข้อจำกัดของกระบวนการความแปรปรวนของเทคโนโลยี (technology shock)

$$\ln\lambda_t = \rho\ln\lambda_{t-1} + \varepsilon_t, \quad -1<\rho<1 \tag{3.6}$$

3.2 วิธีการแก้แบบจำลอง Dynamic Stochastic

หลายปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ต้องการคำตอบจากสมการฟังก์ชัน (functional equation) ซึ่งโดยปกติแล้วจะสามารถหาฟังก์ชันการตัดสินใจ (decision function) ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขค่าที่เหมาะสมของพาเรโต (Pareto optimum) ในหลายกรณีเราไม่สามารถหาการวิเคราะห์คำตอบสำหรับฟังก์ชันออกมาได้ดังนั้นจึงต้องพึ่งระเบียบวิธีทางตัวเลข (numerical methods) ซึ่งระเบียบวิธีทางตัวเลข (numerical methods) จะใช้แก้ปัญหาในครั้งนี้ก็คือวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่ก่อนที่จะมีการกล่าวถึงวิธีนี้นั้นเราควรที่จะทราบถึงวิธีการ weighted residual ก่อนเนื่องจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นการใช้ วิธีการ weighted residual เป็นพื้นฐาน

3.2.1 วิธี Weighted residual

การหาคำตอบของสมการฟังก์ชัน (functional equation) โดยวิธี weighted residual สามารถกระทำโดยประมาณคำตอบของสมการฟังก์ชัน (functional equation) ให้อยู่ในรูปของการรวมกับของฟังก์ชันเชิงเส้น (linear combination) ของฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function)

ปัญหาคือการหา $d : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ซึ่งทำให้สมการฟังก์ชัน (functional equation) F(d) = 0 โดยที่ $F : c_1 \rightarrow c_2$ โดยที่ c_1 และ c_2 คือพื้นที่ของฟังก์ชัน (function spaces) ในที่นี้ถ้ากำหนดให้ d คือตัวแปรการตัดสินใจ (decision) หรือตัวแปรนโยบาย (policy variables) และให้ F คือเงื่อนไขอันดับที่หนึ่ง (first-order condition) จากปัญหาการการหาค่าสูงสุด (maximization) เป้าหมายในที่นี้คือการหาการประมาณการของ $d^n(x;\theta), x \in \Omega$ ซึ่งขึ้นอยู่กับมิติที่จำกัด (finite dimension) ของเวกเตอร์พารามิเตอร์ $\theta = [\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n]'$ และ d^n ก็คือการรวมกับของฟังก์ชันเชิงเส้น (linear combination) ของฟังก์ชัน $\psi_i(x), i = 0, ..., n$ ซึ่งอาจเรียกว่าฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) ดังนั้นสามารถเขียน d^n อยู่ในรูป

$$d^n(x;\theta) = \psi_0 + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \psi_i(x) \tag{3.7}$$

โดยที่ $\psi_i(x), i = 0, 1, ..., n$ เป็นสมการในรูปแบบอย่างง่าย เช่นพหุนามพื้นฐาน , พหุนามเอกฐาน หรือ ฟังก์ชันเชิงเส้น piecewise ถ้าเรากำหนดให้สมการ residual คือสมการฟังก์ชัน (functional equation)

$$R(x;\theta) = F(d^n(x;\theta)) \tag{3.8}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

โดยที่ R(x;θ) คือสมการเรสซิดวล (residual equation)

F(d^n(x;θ)) คือ การคำนวณสมการฟังก์ชัน (functional equation)ที่ประมาณค่าคำตอบของ d^n

สิ่งที่จะต้องการทำก็คือการที่จะเลือก θ โดยให้ R(x;θ) มีค่าที่เข้าใกล้ 0 สำหรับทุกๆ x หรือ วิธีเวจเต็ดเรสซิดวล (weighted residual) ทำให้เรสซิดวล (residual) มีค่าเข้าใกล้ 0 จากปฏิยานุพันธ์ของตัวถ่วงน้ำหนัก (weighted integral) กำหนดให้ $\phi_i(x), i = 1,...,n$ คือฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) ดังนั้น

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) R(x;\theta) dx = 0, \quad i = 1,...,n \tag{3.9}$$

ในทำนองเดียวกันปฏิยานุพันธ์ของตัวถ่วงน้ำหนัก (weighted integral) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\int_{\Omega} w(x) R(x;\theta) dx = 0 \tag{3.10}$$

โดยที่ $w(x) = \sum_i \omega_i \phi_i(x)$ และในสมการ (3.10) จะเป็นจริงสำหรับตัวถ่วงน้ำหนัก ω_i , i=1,…,n ที่ไม่เท่ากับ 0 ด้วยเหตุนี้การแทนค่าของ R(x;θ) = 0 สำหรับทุกๆ $x \in \Omega$ ระเบียบวิธีจะกำหนดให้สมการ (3.10) เท่ากับ 0

แนวทางในการตัดสินใจเลือกสัมประสิทธิ์ $\theta_1,...,\theta_n$ สามารถหาได้จากการกำหนดฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) ซึ่งมีอยู่ 3 วิธีคือ

1. วิธีการกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method)

การกำหนดค่าน้ำหนัก (weights) ได้จากการคำนวณอนุพันธ์เงื่อนไขอันดับที่หนึ่ง (first-order condition) ซึ่งก็คือ $\phi_i(x) = \dfrac{\partial R(x;\theta)}{\partial \theta_i}$ จากปัญหาการหาค่าที่เหมาะสม (optimization)

$$\min_{\theta} \int_{\Omega} R(x;\theta)^2 dx$$

2. วิธี Collocation

ในการกำหนดค่าน้ำหนักแบบวิธี Collocation จะกำหนดให้ค่าน้ำหนักเท่ากับ $\phi_i(x) = \delta(x - x_i)$ โดยที่ δ คือฟังก์ชัน Dirac delta ซึ่งมีคุณสมบัติที่สำคัญๆคือ

1. $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, x=0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$

สมมุติให้ residual มีค่าเท่ากับ 0 ที่ n จุด ($x_1,\ldots,x_n$) หรือเรียกว่าจุด Collocation: $R(x_i;\theta) = 0, i = 1,...,n$ ถ้าฟังชันพื้นฐาน (basis function) ถูกเลือกจากเซตของพหุนามเอกฐาน (orthogonal polynomial) กับจุด Collocation โดยให้จากรากของพหุนามที่ n^{th} ในเซตถูกกำหนดมาให้

3. วิธี Galerkin

ในกรณีนี้กำหนดฟังก์ชันของตัวถ่วงน้ำหนักให้เหมือนฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) ที่แสดง d. หรือ $\phi_i = \psi_i$ โดยที่วิธี Galerkin กำหนด residual เป็นเอกฐาน (orthogonal) สำหรับแต่ละฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) ตราบเท่าที่ฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) ถูกเลือกจากเซตที่สมบูรณ์ของฟังก์ชัน

3.2.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)

หลักการคิดของ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือการทำให้โดเมนของ x เป็นส่วนที่เล็กลง โดยใช้สมการพหุนามที่มีดีกรีที่ต่ำเพื่ออธิบาย การประมาณค่าส่วนย่อย (local approximations) ที่ดีของฟังก์ชัน d และทำส่วนของการประมาณค่าส่วนย่อย (local approximations) ที่แบ่งย่อยออกมารวมกันได้การประมาณค่าครอบคลุม (global approximations) ซึ่งจริงๆแล้วระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ก็คือการแบ่งโดเมน x เป็นส่วนเล็กๆและใช้วิธี weighted residual นั่นเอง

การประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นที่แบ่งโดเมนให้มีขนาดเล็กลงโดยไม่มีการทับซ้อนกันของแต่ละส่วนของโดเมนที่ถูกแบ่ง (subdomian) ในแต่ละส่วนของโดเมนที่ถูกแบ่ง (subdomian) จะสร้างการประมาณค่าส่วนย่อย (local approximations) เพื่อฟังก์ชัน d เช่นสมมุติให้ d : $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ $d^n(x;\theta), x \in \Omega$ และ Ω มี 1 มิติ การแบ่ง Ω หมายถึงการแบ่งเป็นย่อยๆของ x ซึ่งก็คือ $[x_1, x_2, x_3, ..., x_n]$ ที่อยู่ใน $\mathbb{R}$ แล้วในแต่ละช่วงของ $[x_i, x_{i+1}]$ ถูกเรียกว่าเอลิเมนต์ โดยที่ d ที่เป็นฟังชันเชิงเส้น piecewise โดยที่ในแต่ละเอลิเมนต์สมมุติให้การประมานค่าอยู่ในรูป a+bx และถ้าต้องการฟังก์ชัน d เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมน Ω (แล้วการสร้างฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) ; $\psi_i(x)$ i = 0,...,n) ดังนั้นการเขียน d^n จึงอยู่ในรูป

$$d^n(x;\theta) = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i \psi_i(x)) \qquad (3.11)$$

ขั้นตอนแรกของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือต้องกำหนด node บนเอลิเมนต์โดยที่ node คือ จุดบนแต่ละเอลิเมนต์เพื่อใช้อธิบายลักษณะเรขาคณิตของเอลิเมนต์และเป็นเอกลักษณ์ของการ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

อธิบายดีกรีของสมการพหุนามที่ใช้ประมาณค่าคำตอบที่แท้จริงในแต่ละเอลิเมนต์จากที่กำหนดว่าเอลิเมนต์คือช่วงของ $[x_i, x_{i+1}]$ ดังนั้น node ทั้งสองของเอลิเมนต์นี้ก็คือจุดสิ้นสุด (end points) x_i และ x_{i+1} สำหรับ node ใน 1 มิติของเอลิเมนต์ที่มีพื้นฐานเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นก็คือสองจุดสิ้นสุด (end points) ของเอลิเมนต์นั่นเอง ขั้นตอนที่สองคือการสร้างฟังก์ชันพื้นฐาน (basis functions) โดยการสมมุติว่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าให้มีค่าเท่ากับ คำตอบโดยประมาณ (approximation solution) ที่จุดnode นอกจากนี้ยังสมมุติต่อไปอีกว่าจำนวนของเอลิเมนต์และ node คือเอลิเมนต์ที่ i อยู่ในช่วงของ $[x_i, x_{i+1}]$: ซึ่งจะเห็นได้ว่าเอลิเมนต์ที่หนึ่ง คือ $[x_1,x_2]$, เอลิเมนต์ที่สอง คือ $[x_2,x_3]$ เป็นต้น ดังนั้นคำตอบโดยประมาณ (approximation solution) บนเอลิเมนต์ที่ i, $d_i^n(x;\theta)$ โดยที่ $d^n(x_i)=\theta_i, d_i^n(x_{i+1})=\theta_{i+1}$ หรืออีกนัยหนึ่งการกำหนดให้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าแสดงคำตอบที่ node โดยการประมาณค่าของ d บนเอลิเมนต์ ที่ i , d_i^n กำหนดโดย

$$d_i^n(x;\theta)=\theta_i\psi_i(x)+\theta_{i+1}\psi_{i+1}(x), \quad x\in[x_i, x_{i+1}] \tag{3.12}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved