ชื่อเรื่องวิทยานิพนธ์ สมบัติเรขาคณิตบางประการและสมบัติจุดตรึงในปริภูมิบานาค

ผู้เขียน นายอรรถพล แก้วขาว

ปริญญา วิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์)

คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

ศ. ดร. สมพงษ์ ธรรมพงษา ประธานกรรมการ

รศ. จินตนา แสนวงศ์ กรรมการ

รศ. ดร. สุเทพ สวนใต้ กรรมการ

บทคัดย่อ

การส่งแบบไม่ขยาย T บนเซต C ที่เป็นเซตย่อยปิดและนูนของปริภูมิบานาค X คือการส่งที่สอดคล้อง $\|Tx-Ty\| \le \|x-y\|$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$ ปัญหาที่เราเกี่ยวข้องคือการหาสมบัติบนปริภูมิบานาค X ที่ทำให้ทุกๆ การส่งแบบไม่ขยายบนทุกๆเซต C ที่เป็นเซตย่อยปิดและนูนมีจุดตรึง เราเรียกสมบัตินี้ว่าสมบัติจุดตรึง ถ้าเซต C ข้างต้นเป็นเซตกระชับแบบอ่อนเราจะเรียกสมบัตินี้ว่าสมบัติจุดตรึงแบบอ่อน เป็นที่รู้ดีว่าสมบัติโครงสร้างปกติแบบเอกรูปเพียงพอต่อการมีสมบัติจุดตรึง และสมบัติโครงสร้างปกติเพียงพอต่อการมีสมบัติจุดตรึงแบบอ่อน

เราพิสูจน์ว่าถ้าค่าคงที่วอนนิวแมนของปริภูมิบานาค X น้อยกว่า $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ แล้วปริภูมิบานาค X มีสมบัติโครงสร้างปกติแบบเอกรูปผลลัพธ์นี้ได้ขยายค่าขอบเขตบนล่าสุดที่พิสูจน์โดย ศ.ดร.สมพงษ์ ธรรมพงษาและคณะวิจัย นอกจากนี้เรายังได้แนะนำการวางนัยทั่วไปของค่าคงที่เจมส์ $J(a,X)$ ของปริภูมิบานาค X และแสดงว่าถ้า $J(a,X) < \frac{3+a}{2}$ สำหรับบาง $a \in [0,1]$ แล้วปริภูมิบานาค X มีสมบัติโครงสร้างปกติแบบเอกรูป สำหรับค่าคงที่เจมส์เราพิสูจน์ว่าถ้าค่าคงที่เจมส์ของปริภูมิบานาค X น้อยกว่า $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ แล้วปริภูมิบานาค X มีสมบัติโครงสร้างปกติแบบเอกรูป ผลลัพธ์นี้ได้ขยายผลลัพธ์เดิมที่มีขอบเขตบน

เท่ากับ $\frac{3}{2}$ ที่พิสูจน์โดย Gao และ Lau นอกจากนี้เรายังได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติทางเรขาคณิตต่างๆที่เพียงพอต่อการมีสมบัติจุดตรึง การศึกษานี้ได้ขยายผลลัพธ์ของ Dalby และ ผลลัพธ์ของ Xu และคณะวิจัย

เราศึกษาการคงรูปของสมบัติต่างๆที่เพียงพอต่อการมีสมบัติจุดตรึงสำหรับผลบวกตรงแบบซายของปริภูมิบานาค สมบัติดังกล่าวได้แก่ ความนูนเอกรูป ความปรับเรียบเอกรูป ความนูนแบบยู $R(X)<2$ $C_{NJ}(a,X)<2$ และ สมบัติ UKK เรายังได้แสดงว่าผลบวกตรงแบบซายของปริภูมิบานาคที่มีสมบัติ $R(a,X)<1+a$ สำหรับบาง $a\in(0,1]$ มีสมบัติจุดตรึงและผลลัพธ์ยังคงเป็นจริงสำหรับปริภูมิบานาคที่มีสมบัติเอ็มของ Kalton

Thesis Title	Some Geometric Properties and the Fixed Point Property in Banach Spaces
Author	Mr. Attapol Kaewkhao
Degree	Doctor of Philosophy (Mathematics)
Thesis Advisory Committee	Prof. Dr. Sompong Dhompongsa Chairperson Assoc. Prof. Jintana Sanwong Member Assoc. Prof. Dr. Suthep Suantai Member

ABSTRACT

A nonexpansive mapping $T : C \to X$ on a closed convex nonempty subset C of a Banach space X is one that does not increase distances. That is

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \text{for all } x, y \in C.$$

The quest is to find conditions on X that ensure that every nonexpansive mapping on every such C has a fixed point. This goal is called the fixed point property (fpp). If, in addition, C is required to be weakly compact, then we have the weak fixed point property (wfpp). The following implications are well-known :

$$\text{uniform normal structure} \Rightarrow \text{fpp}, \quad \text{normal structure} \Rightarrow \text{wfpp}.$$

We prove that X has uniform normal structure provided that $C_{\mathrm{NJ}}(X) < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, improving the latest upper bound at $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ which is proved by S. Dhomponsa and others. On the other hand, we introduce a generalized James constant $J(a, X)$, for a Banach space X, and prove that, if $J(a, X) < \frac{3+a}{2}$ for some $a \in [0, 1]$, then X has uniform normal structure. For the James constant $J(X)$ itself, we show that X has uniform normal structure provided that $J(X) < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, improving the previous known upper bound at $3/2$ obtained by Gao and Lau. Moreover, we study relationships between some Banach space geometric properties that guarantee the (weak) fixed point property. This extends some known results of Dalby and Xu and others.

The permanence of properties that are sufficient for the (weak) fixed point property is obtained for $\psi-$direct sums. Such properties include the properties uniform convexity, uniform smoothness, $U-$convexity, $R(X) < 2, C_{NJ}(a, X) < 2$, and UKK. For the weak fixed point property of the direct sums, we show that every $\psi-$direct sum of Banach spaces X with $R(a, X) < 1 + a$ for some $a \in (0, 1]$ has the weak fixed point property. We continue the investigation in this direction for Banach spaces with property (M) of Kalton.