ชื่อเรื่องวิทยานิพนธ์ ไซคลิกคอลลีอินเจคทีฟริง
ชื่อผู้เขียน นางสาวอัญชลีย์ แก้วเจริญ
วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ : รศ. จินตนา แสนวงศ์ ประธานกรรมการ
ศ.ดร. สมพงษ์ ธรรมพงษา กรรมการ
อ.ดร. ปิยะพงศ์ เนียมทรัพย์ กรรมการ

บทคัดย่อ

ให้ R เป็นริง และ M, N เป็น R-มอดูลทางขวา เรียก M ว่าพรินซิพอลลีเอ็นอินเจคทีฟ (P-N-อินเจคทีฟ) ถ้าทุก ๆ โฮโมมอร์ฟิซึมจากไซคลิคสับมอดูลทางขวาของ N ไปยัง M สามารถขยายไปบน N และเรียกริง R ว่าไซคลิคคอลลีอินเจคทีฟริง (C-ring) ถ้าทุกๆ ซิมเปิล R-มอดูลทางขวาเป็น P-N-อินเจคทีฟ สำหรับทุก N ที่เป็นไซคลิค R-มอดูล

ผลงานที่สำคัญของวิทยานิพนธ์นี้คือ

(1) ให้ M เป็น R-มอดูลทางขวา $N = tR$ เป็นไซคลิค R-มอดูลทางขวา และ ${}_NM = \{ m \in M \,/\, r_R(t) \subseteq r_R(m)\}$ ได้ว่าข้อความข้างล่างนี้สมมูลกัน

(ก) M เป็น P-N-อินเจคทีฟ

(ข) สำหรับแต่ละสมาชิก $n = ta \in N$ และแต่ละสมาชิก $f \in Hom(nR, M)$ ได้ว่า $f(n) \in {}_NMa.$

(ค) สำหรับแต่ละสมาชิก $n = ta \in N$ ได้ว่า $l_M r_R(n) = {}_NMa.$

(ง) สำหรับแต่ละสมาชิก $n = ta \in N$ และแต่ละสมาชิก $m \in M$ ถ้า $r_R(n) \subseteq r_R(m)$ แล้ว $Sm \subseteq {}_NMa$ เมื่อ $S = End(M).$

(จ) สำหรับแต่ละสมาชิก $n = ta \in N$ และแต่ละสมาชิก $b \in R$ ได้ว่า $l_M[bR \cap r_R(n)] = l_M(b) + {}_NMa.$

(2) ข้อความข้างล่างนี้สมมูลกัน

(ก) R เป็น C-ริง.

(ข) สำหรับแต่ละ I ที่เป็นไอดีลทางขวาของ R แต่ละ P ที่เป็นพรินซิพอลไอดีลทางขวาของ R และแต่ละ K ที่เป็นแมกซิมัลสับไอดีลของ $P+I$ ที่บรรจุ I จะมี M ที่เป็นแมกซิมัลไอดีลทางขวาของ R ที่บรรจุ I ที่ทำให้ $K = M \cap (P+I)$.

(3) ข้อความข้างล่างนี้สมมูลกันสำหรับริง R

(ก) แต่ละซิมเปิล R-มอดูลทางขวาเป็น P-อินเจคทีฟ

(ข) แต่ละซิมเปิล R-มอดูลทางขวาเป็น P-M-อินเจคทีฟ สำหรับทุก M ที่เป็น R- มอดูลทางขวา

(ค) แต่ละซิมเปิล R-มอดูลทางขวาเป็น P-N-อินเจคทีฟ สำหรับทุก N ที่เป็นไซคลิค R-มอดูลทางขวา

(ง) Rad $N = 0$ สำหรับทุก N ที่เป็นไซคลิค R-มอดูลทางขวา

(จ) แต่ละไอดีลทางขวาของ R คือผลตัดของแมกซิมัลไอดีลทางขวาของ R

(4) สำหรับแต่ละ I ที่เป็นไอดีลทางขวาของ R แต่ละ M ที่เป็นแมกซิมัลไอดีลทางขวาของ R ให้ ${}_{IM}\overline{R} = \{ x + M \in R/M \ / \ xI \subseteq M \}$ ได้ว่าข้อความข้างล่างนี้สมมูลกัน

(ก) R เป็น C-ริง

(ข) สำหรับแต่ละ I ที่เป็นไอดีลทางขวาของ R แต่ละ M ที่เป็นแมกซิมัลไอดีลทางขวาของ R แต่ละสมาชิก $a \in R$ และแต่ละสมาชิก $f \in Hom((a+I)R, R/M)$ ได้ว่า $f(a+I) \in {}_{IM}\overline{R}a$

(ค) สำหรับแต่ละ I ที่เป็นไอดีลทางขวาของ R แต่ละ M ที่เป็นแมกซิมัลไอดีลทางขวาของ R และแต่ละสมาชิก $a \in R$ ได้ว่า $l_{R/M}\, r_R(a+I) = {}_{IM}\overline{R}a$

(ง) สำหรับแต่ละ I ที่เป็นไอดีลทางขวาของ R แต่ละ M ที่เป็นแมกซิมัลไอดีลทางขวาของ R และแต่ละสมาชิก $a, b \in R$ ถ้า $r_R(a+I) \subseteq r_R(b+M)$ แล้ว $S(b+M) \subseteq {}_{IM}\overline{R}a$ เมื่อ $S = End(R/M)$

(จ) สำหรับแต่ละ I ที่เป็นไอดีลทางขวาของ R แต่ละ M ที่เป็นแมกซิมัลไอดีลทางขวาของ R และแต่ละสมาชิก $a, b \in R$ ได้ว่า $l_{R/M}[bR \cap r_R(a+I)] = l_{R/M}(b) + {}_{IM}\overline{R}a$

(ช) R เป็น V-ริง

(5) ข้อความข้างล่างนี้สมมูลกันสำหรับ R ที่เป็นริงดูโอทางขวา

(ก) R เป็นริงเรกูลาร์

(ข) แต่ละ R-มอดูลทางขวาเป็น P-N-อินเจคทีฟ สำหรับทุก N ที่เป็นไซคลิค R-มอดูลทางขวา

(ค) แต่ละ R-มอดูลทางขวาเป็น เซมิ-N-อินเจคทีฟ สำหรับทุก N ที่เป็นไซคลิค R-มอดูลทางขวา

(ง) แต่ละ R-มอดูลทางขวาเป็น P-อินเจคทีฟ

(จ) R เป็น V-ริง

(ช) R เป็น P-V-ริง

Thesis Title Cyclically Injective Rings

Author Miss. Anchalee Kaewcharoen

M.S. Mathematics

Examining Committee : Associate Prof. Jintana Sanwong Chairman

Prof. Dr. Sompong Dhompongsa Member

Lecturer Dr. Piyapong Niamsup Member

Abstract

Let R be a ring and M, N be right R-modules. M is called principally N-injective (P-N-injective) if every R-homomorphism from a cyclic submodule of N to M can be extended to N. A ring R is called a cyclically injective ring (C-ring) if every simple right R-module is P-N-injective for all cyclic right R-modules N.

The main results of this thesis are :

(1) Let M be a right R-module, $N = tR$ be a cyclic right R-module and ${}_NM = \{m \in M / r_R(t) \subseteq r_R(m)\}$. Then the following conditions are equivalent :

(a) M is P-N-injective.

(b) For each $n = ta \in N$ and each $f \in Hom(nR, M)$, $f(n) \in {}_NMa$.

(c) For each $n = ta \in N$, $l_M r_R(n) = {}_NMa$.

(d) For each $n = ta \in N$ and each $m \in M$, $r_R(n) \subseteq r_R(m)$ implies $Sm \subseteq {}_NMa$, where $S = End(M)$.

(e) For each $n = ta \in N$ and each $b \in R$, $l_M[bR \cap r_R(n)] = l_M(b) + {}_NMa$.

(2) The following conditions are equivalent :

(a) R is a C-ring.

(b) For each right ideal I of R, each principal right ideal P of R and each maximal subideal K of $P+I$ containing I, there exists a maximal right ideal M of R containing I of R such that $K = M \cap (P+I)$.

(2) The following conditions are equivalent for a ring R :

(a) Each simple right R-module is injective.

(b) Each simple right R-module is P-M- injective for all right R- modules M.

(b) Each simple right R-module is P-N-injective for all cyclic right R-modules N.

(c) The radical of N, Rad $N = 0$ for all cyclic right R-modules N.

(d) Each right ideal is an intersection of maximal right ideals.

(4) For each right ideal I of R and each maximal right ideal M of R, let ${}_{IM}\overline{R}$ = $\{x + M \in R/M \mid xI \subseteq M\}$. Then the following conditions are equivalent for a ring R :

(a) R is a C-ring.

(b) For each right ideal I of R, each maximal right ideal M of R, each $a \in R$ and each $f \in Hom((a+I)R, R/M)$, $f(a+I) \in {}_{IM}\overline{R}\,a$.

(c) For each right ideal I of R, each maximal right ideal M of R and each $a \in R$, $l_{R/M}\, r_R(a+I) = {}_{IM}\overline{R}\,a$.

(d) For each right ideal I of R, each maximal right ideal M of R and each a, $b \in R$, $r_R(a+I) \subseteq r_R(b+M)$ implies $S(b+M) \subseteq {}_{IM}\overline{R}\,a$, where $S = End(R/M)$

(e) For each right ideal I of R, each maximal right ideal M of R and each a, $b \in R$, $l_{R/M}\,[bR \cap r_R(a+I)] = l_{R/M}\,(b) + {}_{IM}\overline{R}\,a$.

(f) R is a V-ring.

(5) The following conditions are equivalent for a right duo ring R :

(a) R is regular.

(b) Every right R-module is P-N-injective for all cyclic right R-modules N.

(c) Every right R-module is semi-N-injective for all cyclic right R-modules N.

(d) Every right R-module is P-injective.

(e) R is a V-ring.

(f) R is a P-V-ring.