บทที่ 3

กรอบแนวคิดทางทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

3.1 ทฤษฎีและแนวคิดการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ

แนวคิดเกี่ยวกับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของนักเศรษฐศาสตร์มีมาอย่างยาวนาน นับตั้งแต่อดัม สมิธ(Adam Smith) ที่กล่าวในหนังสือ The Wealth of Nation เกี่ยวกับการพัฒนาทางเศรษฐกิจ โดยเชื่อในกลไลราคา การแบ่งงานกันทำ ความชำนาญเฉพาะทาง และบทบาทที่จำกัดของรัฐ ต่อมาก็มีนักเศรษฐศาสตร์กล่าวถึงการพัฒนาเศรษฐกิจแตกต่างกันไป เช่นแนวคิดการเจริญเติบโตของประชากรของ โทมัส มัลธัส(Thomas Malthus) แนวคิดการกระจายรายได้และการค้าระหว่างประเทศของ เดวิด ริคาร์โด(David Ricardo) แนวคิดสังคมนิยมของคาร์ล มาร์กซ์(Karl Marx) แนวคิดการกีดกันทางการค้า(Protectionism) ฯลฯ ต่อมาในศตวรรษที่ 20 ซึ่งเป็นยุคที่เริ่มมีคณิตศาสตร์เข้ามาเกี่ยวข้องกับแบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ ซึ่งแบบจำลองที่สำคัญเกี่ยวกับการพัฒนาทางเศรษฐกิจของฮาร์รอด-โดมาร์(Harrod-Domar) ที่ให้ความสำคัญกับการสะสมทุน(Capital Accumulation)และประสิทธิภาพ ซึ่งเชื่อว่าปัจจัยที่ทำให้เกิดการพัฒนาเศรษฐกิจได้แก่ การออม สัดส่วนทุนต่อผลได้ และอัตราการเสื่อมของทุนก็เข้ามามีบทบาทสำคัญจนกระทั่งเข้าสู่ยุคหลังสงครามโลกครั้งที่ 2 แนวคิดสำคัญในการพัฒนาเศรษฐกิจของโซโลว์(Solow) ซึ่งสร้างแบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายนอกก็เข้ามามีบทบาทสำคัญและต่อมาจนถึงปัจจุบันก็ได้มีการพัฒนาแบบจำลองมาเป็นการเจริญเติบโตจากภายใน

3.1.1 แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของโซโลว์ (The Solow growth model)

โรเบิร์ต โซโลว์ (Robert Solow) และทรีเวอร์ สวอน(Trevor Swan) ได้นำเสนอแบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจขึ้นในช่วงปี ค.ศ. 1956 และจากผลงานดังกล่าวทำให้ Robert Solow ได้รับรางวัลโนเบลสาขาเศรษฐศาสตร์เมื่อปี1987 แบบจำลองดังกล่าวได้กลายเป็นแบบจำลองที่มีอิทธิพลอย่างมากต่อแนวคิดด้านการพัฒนาเศรษฐกิจ โดยแบบจำลองได้สมมติให้สมการการผลิตมีผลตอบแทนต่อขนาดคงที่ (Constant returns to scale) ผลตอบแทนต่อการใช้ปัจจัยการผลิตมีลักษณะเพิ่มขึ้นในอัตราที่ลดลง (Positive Diminishing returns to each input) และปัจจัยการผลิตสามารถทดแทนกันได้อย่างต่อเนื่องตามสมมติฐานของนักเศรษฐศาสตร์กลุ่มนีโอคลาสสิก

แบบจำลองนี้สมมติให้ระบบเศรษฐกิจมีรูปแบบง่าย คือเป็นระบบเศรษฐกิจที่ไม่มีการติดต่อกับต่างประเทศและไม่มีภาครัฐบาล หน่วยเศรษฐกิจประกอบด้วยภาคครัวเรือนและภาคธุรกิจ สมมติให้มีสินค้ามีเพียงชนิดเดียวที่ผลิตได้และผลผลิตทั้งหมด(Output: Y(t)) สามารถนำไปบริโภค (Consumption: $C(t)$) และลงทุน (Investment: $I(t)$) ดังนั้น

$$Y(t)=C(t)+I(t)=C(t)+S(t) \tag{3.1}$$

โดยที่	$Y(t)$	คือ	ผลผลิตทั้งหมดที่ผลิตได้ ณ เวลา t
	$C(t)$	คือ	การบริโภคของครัวเรือน ณ เวลา t
	$I(t)$	คือ	การลงทุนของครัวเรือน ณ เวลา t
	$S(t)$	คือ	การออมองครัวเรือน ณ เวลา t

นอกจากนั้นการบริโภคและการลงทุนยังเท่ากับการบริโภคและการออม เนื่องจากระบบเศรษฐกิจถูกกำหนดให้เป็นแบบปิดและไม่มีภาครัฐ

ถ้ากำหนดให้การออม $S(t)$ เป็นส่วนหนึ่งของผลผลิตที่ถูกเก็บไว้เพื่อออม และอัตราการออม(s) ถูกกำหนดจากภายนอก มีค่าระหว่างศูนย์ถึงหนึ่ง $0 \le s \le 1$ดังนั้น

$$S(t)=sY(t) \tag{3.2}$$

จากระบบเศรษฐกิจแบบปิด ที่มีส่วนที่รั่วไหลคือการออม และส่วนที่อัดฉีดคือการลงทุน ดุลยภาพเกิดขึ้น ณ จุดที่ส่วนที่รั่วไหลเท่ากับส่วนที่อัดฉีดคือ การออมเท่ากับการลงทุน

$$I(t)=sY(t) \tag{3.3}$$

สมมติให้ทุนมีการเสื่อมสภาพ ณ อัตราคงที่ระหว่างศูนย์ถึงหนึ่ง คือ $0<\delta<1$ คือ ดังนั้นสามารถเขียนสมการการเปลี่ยนแปลงสุทธิของสินค้าทุนได้เป็น

$$\dot{K}(t)=I(t)-\delta K(t)=sF\left(K(t),L(t)\right)-\delta K(t) \tag{3.4}$$

โดยที่	$\dot{K}(t)=\dfrac{dK(t)}{dt}$	คือ	การเพิ่มขึ้นสุทธิของสินค้าทุน ณ เวลา t
	$K(t)$	คือ	สินค้าทุน ณ เวลา t
	δ	คือ	อัตราการเสื่อมสภาพของสินค้าทุน

และกำหนดให้จำนวนประชากรมีการเพิ่มขึ้นในอัตราคงที่ และมากกว่าศูนย์ $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \geq 0$ คือ

สมการการผลิตของ Solow เขียนได้เป็น

$$Y(t) = F(K(t), L(t))$$

โดยที่	$Y(t)$	คือ	ผลผลิตทั้งหมดในระบบเศรษฐกิจ
	$K(t)$	คือ	ทุน (Capital)
	$L(t)$	คือ	แรงงาน (Labor)

สมการการผลิตข้างต้นถูกกำหนดให้มีลักษณะตามแบบนีโอคลาสสิก คือ

1. การลดน้อยถอยลงของผลผลิตส่วนเพิ่ม (Positive and diminishing marginal products)

$$F_K\left(K(t), L(t)\right) \equiv \frac{\partial F(K(t), L(t))}{\partial K(t)} > 0$$

$$F_{KK}\left(K(t), L(t)\right) \equiv \frac{\partial^2 F(K(t), L(t))}{\partial K(t)^2} < 0$$

$$F_L\left(K(t), L(t)\right) \equiv \frac{\partial F(K(t), L(t))}{\partial L(t)} > 0$$

$$F_{LL}\left(K(t), L(t)\right) \equiv \frac{\partial^2 F(K(t), L(t))}{\partial L(t)^2} < 0$$

2. ผลได้ต่อขนาดคงที่ (Constant return to scale)

$$Y\left(\lambda K(t), \lambda L(t)\right) = \lambda F(K(t), L(t)); \quad \forall \lambda > 0$$

3. เงื่อนไขอินนาดา (Inada conditions)

คือผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงานหรือทุนจะมีค่าเข้าใกล้อนันต์ (Infinity) เมื่อแรงงานหรือทุนมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงานหรือทุนจะเข้าใกล้ศูนย์ ถ้าแรงงานหรือทุนเข้าใกล้อนันต์ (Infinity)

$$\lim_{K\to\infty} F_K(K(t),L(t))=0, \lim_{L\to\infty} F_L(K(t),L(t))=0$$
$$\lim_{K\to 0} F_K(K(t),L(t))=\infty, \lim_{L\to 0} F_L(K(t),L(t))=\infty$$

4. การมีความสำคัญของตัวแปร (Essentially)

$$Y(t)=F\left[0,L(t)\right]=F\left[K(t),0\right]=f(0)=0$$

จากสมการการผลิต สามารถเขียนให้อยู่ในรูปต่อประชากรได้ โดยการ นำ ประชากร (L(t)) หารทั้งสมการ จะได้

$$\frac{Y(t)}{L(t)}=\frac{F\left[K(t),L(t)\right]}{L(t)}=L(t)\cdot\left[\frac{K(t)}{L(t)},1\right]=L(t)\cdot f(k)$$

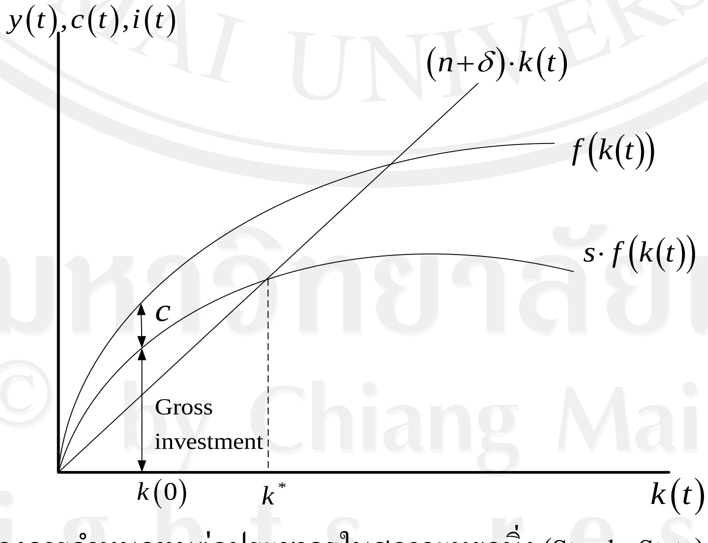
กำหนดให้ $k(t)=K(t)/L(t)$ คือ ทุนต่อประชากร

และ $y(t)=Y(t)/L(t)$ คือ ผลผลิตต่อประชากร

ผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงานและทุนหาได้จากหาอนุพันธ์ของ $Y(t)=L(t)\cdot f(k)$ เทียบกับปัจจัยทุนและแรงงานจะได้

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)}=f'(k) \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)}=f(k)-k\cdot f'(k) \tag{3.6}$$



รูปที่ 3.1 แสดงการกำหนดทุนต่อประชากรในสภาวะหยุดนิ่ง (Steady-State) ของ Solow

ที่มา: Barro, 2004

จากรูปที่ 3.1 การบริโภคของบุคคลใดๆจะเท่ากับระยะห่างระหว่างเส้นฟังก์ชั่นการผลิต $f\left(k(t)\right)$ และเส้นสัดส่วนการลงทุนต่อฟังก์ชั่นการผลิต $s(t)\cdot f\left(k(t)\right)$ โดยที่ค่าเสื่อมที่แท้จริงคือ $(n+\delta)k(t)$ ดังนั้นระดับ Steady state ของทุนคือจุดที่เส้น $s(t)\cdot f\left(k(t)\right)$ ตัดกับเส้น $(n+\delta)k(t)$ (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

แบบจำลองการเจริญเติบโตของ Solow กำหนดให้ครัวเรือนเป็นเจ้าของปัจจัยการผลิต ได้รับผลตอบแทนคืออัตราผลตอบแทนจากสินทรัพย์ $r(t)$ และอัตราค่าจ้าง $w(t)$ ดังนั้นรายได้รวมของครัวเรือนคือ $r(t)\cdot(\text{assets})/dt=\left[r(t)\cdot(\text{assets})+w(t)\cdot L(t)\right]-C(t)$ และครัวเรือนจะทำการสะสมสินทรัพย์

$$\dot{a}(t)=\left(r(t)\cdot a(t)+w(t)\right)-c(t)-na(t) \tag{3.7}$$

ให้ $R(t)$ คือค่าเช่า และทุนมีค่าเสื่อมที่อัตราคงที่ ดังนั้นอัตราสุทธิผลตอบแทนของทุนคือ ดังนั้น $R(t)=r(t)+\delta$ หรือ $r(t)=R(t)-\delta$ ธุรกิจจะทำกำไรสูงสุด

$$\pi=F\left(K(t),L(t),A(t)\right)-\left(r(t)+\delta\right)\cdot K(t)-w(t)L(t) \tag{3.8}$$

กำไรของธุรกิจในรูปต่อประชากร

$$\pi=L(t)\cdot\left[f\left(k(t)\right)-\left(r(t)+\delta\right)\cdot k(t)-w(t)\right] \tag{3.9}$$

ที่ตลาดแข่งขันสมบูรณ์กำไรจะเท่ากับศูนย์ ดังนั้นแล้วธุรกิจจะเลือกสัดส่วนของทุนต่อแรงงานที่ผลผลิตส่วนเพิ่มของทุนเท่ากับค่าเช่าและผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงานเท่ากับอัตราค่าจ้าง

$$f'\left(k(t)\right)=r(t)+\delta \tag{3.10}$$

$$\left[f\left(k(t)\right)-k(t)\cdot f'\left(k(t)\right)\right]=w(t) \tag{3.11}$$

ดุลยภาพตามแบบจำลองการเจริญเติบโตของ Solow สินทรัพย์จะเท่ากับทุน $\left(a(t)=k(t)\right)$ เนื่องจากข้อสมมติที่ว่าไม่มีภาคต่างประเทศ แทนค่าสมการ (3.10) และ (3.11) ในสมการ (3.7)

$$\dot{k}(t)=f\left(k(t)\right)-c(t)-(n+\delta)\cdot k(t)$$

ครัวเรือนบริโภคที่สัดส่วนของรายได้เท่ากับ $c(t)=\left(1-s(t)\right)\cdot f\left(k(t)\right)$ จะได้สมการการเปลี่ยนแปลงของทุนดังนี้

$$\dot{k}(t) = s \cdot f\left(k(t)\right) - (n+\delta) \cdot k(t) \tag{3.12}$$

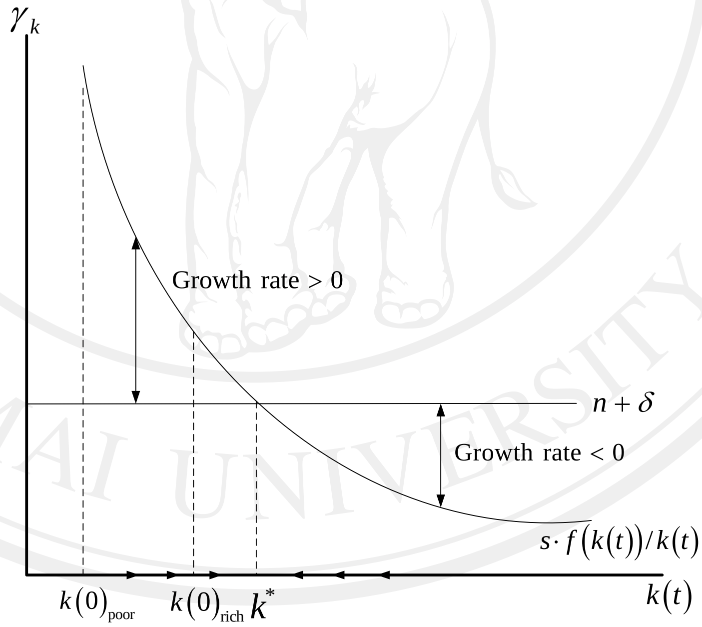
ที่สภาวะหยุดนิ่งของแบบจำลอง Solow คือ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของทุน $\dot{k}(t) = 0$ ในสมการ (3.12), $y(t)$ และ $c(t)$ มีค่าคงที่เท่ากับ $y^* = f\left(k^*\right)$ และ $c^* = (1-s) \cdot f\left(k^*\right)$ หรือที่จุดตัดของเส้น $s \cdot f\left(k(t)\right)$ และเส้น $(n+\delta)k(t)$ ในรูปที่4

แทนค่า $k(t) = k^*$

$$s \cdot f'\left(k^*\right) = (n+\delta)k^*$$

จากสมการที่ (12) เราสามารถหาอัตราการเจริญเติบโตของทุน $\left(\gamma_k\right)$ ได้โดยการหารทั้งสมการด้วย $k(t)$ จะได้

$$\gamma_k \equiv \dot{k}(t)/k(t) \equiv s \cdot f\left(k(t)\right)/k(t) - (n+\delta) \tag{3.13}$$



รูปที่ 3.2 แสดงการปรับตัวเชิงพลวัตร (Transitional dynamic) ของแบบจำลอง Solow

ที่มา: Barro, 2004

รูปที่ 3.2 แสดงอัตราการเจริญเติบโตของ $k(t)$ คือจุดตัดกันของเส้นออม $s \cdot f\left(k(t)\right)/k(t)$ และเส้นค่าเสื่อม $n+\delta$ ถ้า $k(t) < k^*$ อัตราการเจริญเติบโตของ $k(t)$ จะมีค่าเป็นบวกและเพิ่มเข้าสู่ k^* แต่ถ้า $k(t) > k^*$ อัตราการเจริญเติบโตของ $k(t)$ จะมีค่าเป็นลบและ

ลดลงเข้าสู่ k^* ดังนั้น Steady state ของทุนต่อบุคคล k^* นั้นจะไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

อย่างไรก็ตาม แม้แบบจำลองของ Solow จะมีอิทธิพลต่อแนวคิดด้านการพัฒนาทางเศรษฐกิจอย่างมาก และเป็นพื้นฐานของแบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจต่างๆ แต่ก็ยังมีจุดบกพร่องบางประการคือ

1. อัตราการออมมีลักษณะที่ถูกกำหนดจากภายนอก ซึ่งไม่สอดคล้องกับความเป็นจริง อัตราการออมควรจะถูกกำหนดมาจากภายในระบบเศรษฐกิจมากกว่า

2. จากรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่าแบบจำลองมีสภาวะหยุดนิ่งเพียงจุดเดียวบ่งบอกถึงว่าทุกประเทศไม่ว่าเป็นประเทศร่ำรวยหรือยากจน จะเข้าสู่สภาวะหยุดนิ่งเหมือนกัน ซึ่งฟังดูไม่สมเหตุสมผล ว่าประเทศยากจนจะสามารถพัฒนาได้เท่าเทียมกับประเทศร่ำรวยได้

3.1.2 แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Ramsey (The Ramsey growth model)

ข้อบกพร่องของแบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Solow แบบจำลองของ Ramsey หรือ Ramsey-Cass-Koopmans model ก็ได้พยายามแก้ไขข้อบกพร่องดังกล่าวโดยการเพิ่มพื้นฐานทางด้านเศรษฐศาสตร์จุลภาคเข้าไป โดยกำหนดให้มีภาคธุรกิจซึ่งแสวงหากำไรสูงสุดและครัวเรือนแสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุดข้ามห้วงเวลา

แบบจำลองของ Ramsey(เช่นเดียวกับแบบจำลองของ Solow) ถูกกำหนดให้มีระบบเศรษฐกิจแบบง่าย ไม่มีการภาคต่างประเทศและไม่มีภาครัฐ และกำหนดให้จำนวนประชากรเป็น N ซึ่งมีการเจริญเติบโตที่อัตรา n ตลอดเวลา ($L(t)=e^{nt}L(0)$) จำนวนแรงงานเท่ากับจำนวนประชากร ผลผลิตนั้นใช้ปัจจัยการผลิต คือ ทุน ($K(t)$) แรงงาน ($L(t)$) และเทคโนโลยี ($A(t)$) ทั้งนี้ครัวเรือนและภาคธุรกิจมีสมมติฐานของการมองไปในอนาคตอย่างสมบูรณ์ (perfect foresight) กล่าวคือ ครัวเรือนและภาคธุรกิจทราบค่าจ้าง ($w(t)$) และราคาค่าเช่าของทุน ($r(t)$) ทั้งในปัจจุบันและอนาคต

ภาคครัวเรือน (Households)

สมมติให้ครัวเรือนมีชีวิตอยู่ตลอดไป (infinite horizon) และมีรูปแบบการตัดสินใจทางเศรษฐกิจไม่แตกต่างกัน (homogeneous agents) เนื่องจาก ระบบเศรษฐกิจเป็นแบบกระจายอำนาจ มี 2 ตลาดปัจจัย คือ แรงงานและทุน นอกจากนี้ ยังมีตลาดสินเชื่อที่ครัวเรือนสามารถที่จะยืมหรือปล่อยกู้ได้

ครัวเรือนมีอัตราการเพิ่มของประชากรถูกกำหนดจากภายนอกและมีค่าคงที่ที่อัตรา n

$$L(t)=e^{nt}L(0) \tag{3.14}$$

ครัวเรือนจะแสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุด จากการบริโภค $C(t)$

$$U(t)=\int_0^{\infty} u\left[c(t)\right]e^{-\rho t}e^{nt}dt \tag{3.15}$$

โดยที่	$c(t)$	คือ	การบริโภคของครัวเรือน ณ เวลา t
	ρ	คือ	อัตราคิดลด (Discount rate)
	n	คือ	อัตราการเจริญเติบโตของประชากร

ลักษณะสมการอรรถประโยชน์ (Utility function) ของ Ramsey มีลักษณะเพิ่มขึ้น (Increasing) คือ ถ้า $c(t)$ เพิ่มแล้ว $u(t)$ จะเพิ่มตาม และ มีลักษณะโค้งเว้าออกจากจุดกำเนิด คือ $c(t)$ จะเพิ่มในอัตราที่ลดลง

$$u'(c(t))>0, \qquad u''(c(t))<0$$

จากเงื่อนไขของการแข่งขันสมบูรณ์ภาคครัวเรือนจะไม่มีผลต่อการกำหนดราคาปัจจัย ทำให้ ในตลาดแรงงานครัวเรือนขายปัจจัยแรงงานเท่ากับความต้องการแรงงานของตลาด

$$\text{total income}=w(t)+a(t)r(t)$$

ข้อจำกัดงบประมาณของครัวเรือนต่อประชากรคือ

$$\dot{a}(t)=w(t)+r(t)a(t)-c(t)-na(t) \tag{3.16}$$

$$r(t)=R(t)-\delta \tag{3.17}$$

โดยที่	$\dot{a}(t)=\dfrac{da(t)}{dt}$	คือ	สินทรัพย์ที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลง
	$w(t)$	คือ	ค่าจ้าง ณ เวลา t
	$r(t)$	คือ	อัตราดอกเบี้ยที่แท้จริง ณ เวลา t
	$a(t)$	คือ	สินทรัพย์สุทธิต่อบุคคล ณ เวลา t
	δ	คือ	ค่าเสื่อมราคา

ดังนั้นแล้วครัวเรือนจะทำความพอใจสูงสุดภายใต้ ข้อจำกัดงบประมาณ โดยใช้วิธีการของ Hamiltonian

$$H=u(c(t))e^{-(\rho-n)t}+v(t)\left[w(t)+(r(t)-n)a(t)-c(t)\right] \tag{3.18}$$

โดยที่ $v(t)$ คือ มูลค่าปัจจุบันของราคาเงาของรายได้ในหน่วยความพอใจ

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = 0 \qquad \Rightarrow \quad v(t) = u'\left(c(t)\right)e^{-(\rho-n)t} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a(t)} = -\dot{v}(t) \qquad \Rightarrow \quad \dot{v}(t) = -\left[r(t) - n\right]v(t) \tag{3.20}$$

โดยที่ Transversality condition คือ

$$\lim_{t\to\infty}\left[v(t)\cdot a(t)\right] = 0 \tag{3.21}$$

หน่วยธุรกิจ (Firms)

หน่วยธุรกิจทำหน้าที่ผลิตสินค้า กำหนดให้อยู่ในตลาดแข่งขันสมบูรณ์ มีสินค้าเพียงชนิดเดียวโดยมีฟังก์ชั่นการผลิตเป็นแบบ Constant returns to scale และให้ผลตอบแทนแรงงานและทุนเป็นค่าจ้าง $w(t)$ และดอกเบี้ย $r(t)$ แต่ละหน่วยธุรกิจจะมีฟังก์ชั่นการผลิตของ Ramsey ที่มีความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีเพิ่มในแรงงาน คือ

$$Y(t) = F\left(K(t), L(t), A(t)\right)$$

โดยที่ $A(t)$ คือ ความก้าวหน้าทางเทคโนโลยี ณ เวลา t

$$A(t) = A(0)e^{xt} \quad , A(0) = 1 \tag{3.22}$$

โดยที่แต่ละหน่วยธุรกิจจะทำการเลือก ทุนและแรงงานที่ทำให้เกิดกำไรสูงสุด

$$\pi = \left(K(t), L(t)\right) - \left(r(t) + \delta\right)K(t) - w(t)L(t) \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'\left(k(t)\right) = r(t) + \delta \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K(t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f\left(k(t)\right) - k(t)f'\left(k(t)\right) = w(t) \tag{3.25}$$

คือ ผลผลิตส่วนเพิ่มของทุนจะเท่ากับผลตอบแทนของทุน $R(t)$ ผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงานจะเท่ากับผลตอบแทนของแรงงาน $w(t)$

ดุลยภาพในแบบจำลองของ Ramsey ที่กำหนดพฤติกรรมการให้ครัวเรือนมีการแข่งขันสมบูรณ์ ที่อัตราดอกเบี้ย $r(t)$ และอัตราค่าจ้าง $w(t)$ สามารถรวมพฤติกรรมของครัวเรือนและหน่วยธุรกิจเพื่อจะวิเคราะห์โครงสร้างดุลยภาพในตลาดที่มีการแข่งขันสมบูรณ์ เมื่อเป็นระบบ

เศรษฐกิจแบบปิด หนี้สินในเศรษฐกิจจะเท่ากับศูนย์ ดังนั้นแล้วสินทรัพย์ต่อบุคคลจะเท่ากับทุนต่อแรงงาน $x+n$ (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

คือ สินทรัพย์จะเท่ากับทุน $\left(a(t)=k(t)\right)$ ดังนั้นครัวเรือนที่พิจารณาตามข้อจำกัดงบประมาณในสมการ (16)

$$\dot{k}(t)=f\left(k(t)\right)-(n+\delta)k(t)-c(t) \tag{3.26}$$

โดยที่ $\hat{c}(t)=C(t)/L(t)=c(t)e^{-xt}$ เมื่อ $\hat{k}(0)$, จากสมการ (26) การเปลี่ยนแปลงในสต็อกทุนจะเท่ากับ ผลผลิตลบการบริโภคและการเสื่อมค่า และการเปลี่ยนแปลงใน $\hat{k}(t)\equiv K(t)/\hat{L}(t)$ จะทำให้เกิดการเจริญเติบโต $\hat{L}(t)$ ที่อัตรา $x+n$

สมการ (26) เป็นตัวกำหนดการขยายตัวของ $\hat{k}(t)$ ดังนั้นแล้ว $\hat{y}(t)=f\left(\hat{k}(t)\right)$ อย่างไรก็ตามจะสามารถกำหนดค่า $\hat{c}(t)$ ได้ถ้าเราทราบความสัมพันธ์ของ $\hat{c}(t)$ และ $\hat{k}(t)$ (หรือ $\hat{y}(t)$) จากเงื่อนไข $r(t)=f'\left(\hat{k}(t)\right)-\delta$ และ $\hat{c}(t)=c(t)e^{-xt}$ จะได้

$$\frac{\dot{\hat{c}}(t)}{\hat{c}(t)}=\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}-x=\frac{1}{\theta}\cdot\left[f'\left(\hat{k}(t)\right)-\delta-\rho-\theta x\right] \tag{3.27}$$

สมการ (3.27) นี้เป็นการรวมสมการ Differential ของ $\hat{c}(t)$ และ $\hat{k}(t)$ ดังนั้นแล้วในรูปแบบนี้ทั้ง $\hat{k}(0)$ และ Transversality condition จะเป็นตัวกำหนด time path ของ $\hat{c}(t)$ และ $\hat{k}(t)$

จาก Transversality condition

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot\exp\left(-\int_0^t\left[r(v)-n\right]dv\right)\right\} \tag{3.28}$$

ในสถานะคงตัว (Steady state) พิจารณาเงื่อนไขดุลภาพตามสมการ (3.26) (3.27) และ (3.28) ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงที่ Steady state ซึ่งตัวแปรต่าง ๆ มีการเติบโตที่อัตราคงที่ อัตราการเจริญเติบโตที่ Steady state ของ $\hat{k}(t)$ และ $\hat{c}(t)$ จะต้องเท่ากับศูนย์ เหมือนกับในแบบจำลองการเจริญเติบโตของ Solow

โดยที่	$\left(\gamma_{\hat{k}}\right)^*$	คือ	อัตราการเจริญเติบโตที่ Steady state ของ $\hat{k}(t)$
	$\left(\gamma_{\hat{c}}\right)^*$	คือ	อัตราการเจริญเติบโตที่ Steady state ของ $\hat{c}$

สมการ (27) ที่ steady state คือ

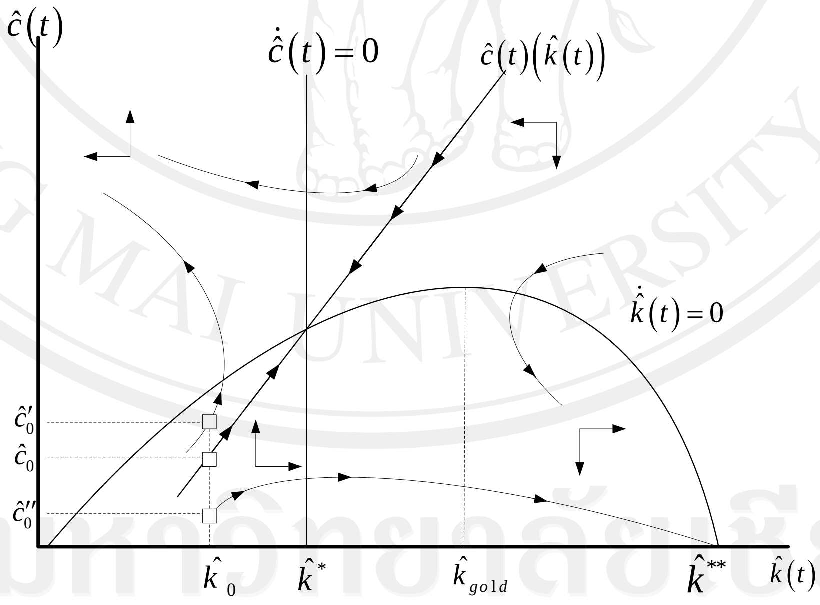
$$\hat{c}(t)=f\left(\hat{k}(t)\right)-(x+n+\delta)\cdot\hat{k}(t)-\hat{k}(t)\cdot\left(\gamma_{\hat{k}}\right)^* \tag{3.29}$$

ทำการ Differential สมการ (3.27) เทียบกับเวลา (t) จะได้

$$\dot{\hat{c}}(t) = \dot{\hat{k}}(t) \cdot \left[f'(k(t)) - \left[x + n + \delta + (\gamma_{\hat{k}})^{*} \right] \right] \tag{3.30}$$

จาก Trasversality condition ตามสมการ (3.28) ที่ $(\gamma_{\hat{k}})^*$ และ $(\gamma_{\hat{c}})^*$ จะต้องมีเครื่องหมายในทิศทางเดียวกัน ถ้า $(\gamma_{\hat{k}})^* > 0$, $\hat{k}(t) \to \infty$ และ $f'(\hat{k}(t)) \to 0$ ตามสมการ (3.27) แล้ว $(\gamma_{\hat{c}})^* < 0$ และถ้า $(\gamma_{\hat{k}})^* < 0, \hat{k}(t) \to 0$ และ $f'(\hat{k}(t)) \to \infty$ ตามสมการ (3.27) แล้ว $(\gamma_{\hat{c}})^* > 0$ ผลที่ได้มานั้นค้านกับผลที่ว่า $(\gamma_{\hat{k}})^*$ และ $(\gamma_{\hat{c}})^*$ จะต้องมีเครื่องหมายในทิศทางเดียวกัน ดังนั้นความเป็นไปได้อย่างเดียวที่ $(\gamma_{\hat{k}})^*$ และ $(\gamma_{\hat{c}})^*$ จะมีเครื่องหมายในทิศทางเดียวกันนั้น คือ $(\gamma_{\hat{k}})^* = (\gamma_{\hat{c}})^* = 0$, $(\gamma_{\hat{k}})^* = 0$, $(\gamma_{\hat{c}})^* = 0$

ดังนั้นตัวแปรต่อหน่วยของประสิทธิภาพแรงงาน (Effective labor) $\hat{k}(t), \hat{c}(t), \hat{y}(t)$ จะมีค่าคงที่ ในขณะที่ตัวแปรต่อประชากร $k(t), c(t), y(t)$ ใน steady state จะมีอัตราการเจริญเติบโตเท่ากับ x และตัวแปร $K(t), X(t), Y(t)$ ใน Steady state จะมีอัตราการเจริญเติบโตเท่ากับ $x+n$ แสดงว่า อัตราการเจริญเติบโตในรูปแบบนี้จะเหมือนกับในแบบจำลองการเจริญเติบโตของ Solow ซึ่งกำหนดการออมจากภายนอกและคงที่



รูปที่ 3.3 แสดง Phase diagram ของแบบจำลองการเจริญเติบโต Ramsey

ที่มา: Barro, 2004

ค่า Steady state ของ $\hat{c}$ และ $\hat{k}$ กำหนดจากให้ สมการ (3.26) และ (3.27) เท่ากับศูนย์ จากรูปที่ 3.3 จะสอดคล้องกับ $\hat{c}(t) = f\left(\hat{k}(t)\right) - (x+n+\delta)\cdot k(t)$ ที่คู่อันดับ $\left(\hat{k}(t), \hat{c}(t)\right)$ ที่เป็นไปตาม $\dot{\hat{k}}(t) = 0$ ในสมการ (3.26)โดยที่จุดสูงสุดของเส้นโค้งเกิดขึ้นเมื่อ $f'\left(\hat{k}(t)\right) = x+n+\delta$ ดังนั้น อัตราดอกเบี้ย $f'\left(\hat{k}(t)\right) - \delta$ จะเท่ากับอัตราการเติบโตที่ Steady-state ของผลผลิต $x+n$ การเท่ากันระหว่างอัตราดอกเบี้ยและการเจริญเติบโตนั้นสอดคล้องกับระดับ The golden rule ของ $\hat{k}(t)$ เพราะจะทำให้เกิดการบริโภคสูงสุด ที่ Steady state แทน $\hat{k}(t)$ ด้วย $\hat{k}_{gold}$ ที่ golden rule (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Ramsey ได้เพิ่มส่วนขยายสำคัญเข้าไปในแบบจำลองของ Solow ดังนี้

1. แบบจำลองมีพื้นฐานของเศรษฐศาสตร์จุลภาค(Microfoundation) ซึ่งเป็นแนวทางของการสร้างแบบจำลองเศรษฐศาสตร์ยุคหลังสงคราม ที่รวมเอาแนวคิดด้านเศรษฐศาสตร์มหภาคเข้าไว้ด้วยกันกับแนวคิดของ Neoclassical ที่เรียกว่า New-Neoclassical synthesis
2. อัตราการออมกำหนดจากภาคครัวเรือน ซึ่งเป็นการกำหนดมาจากภายใน เป็นการแก้ไขจุดบกพร่องของแบบจำลอง Solow

3.1.3 แบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายใน (Endogenous growth model)

ในช่วงกลางทศวรรษที่ 1980s กลุ่มนักทฤษฎีการพัฒนาทางเศรษฐกิจเริ่มไม่เห็นด้วยกับการที่มีตัวแปรภายนอกซึ่งไม่สามารถอธิบายได้ โดยเฉพาะตัวแปรด้านความก้าวหน้าทางเทคนิคที่อยู่ในแบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจในระยะยาว จึงได้เริ่มมีการทดแทนตัวแปรเหล่านี้โดยตัวแปรอื่น โดยแบบจำลองจะไม่ปรากฏคุณสมบัติการลดน้อยถอยลงของทุน (Diminishing return to capital) ซึ่งเป็นคุณสมบัติหลักของแบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายใน โดยแบบจำลองนี้กำหนดให้มีปัจจัยการผลิต 2 ชนิด คือ ทุน (Capital) และแรงงาน (Labor) และสมการปัจจัยการผลิตมีคุณสมบัติ Constant return to scale

$$F\left(\lambda K(t), \lambda L(t), A\right) = \lambda F\left(K(t), L(t), A\right)$$

โดยที่ A คือ ระดับของเทคโนโลยี

และจาก Euler's theorem จะได้

$$F\left(K(t), L(t)\right) = F_K K(t) + F_L L(t)$$

นอกจากนี้สมการการผลิตสามารถเขียนให้อยู่ในรูป Intensive form ได้ดังนี้คือ

$$y(t) = Ak(t) \tag{3.31}$$

ในแบบจำลองนี้มีข้อสมมติเช่นเดียวกับแบบจำลองพื้นฐานของ Ramsey และครัวเรือนมีฟังก์ชั่นความพอใจอยู่ในรูปความยืดหยุ่นของการทดแทนกันข้ามห้วงเวลาคงที่ (Constant Intertemporal Elasticity of Substitution: CIES) ดังนี้

$$U = \int_0^\infty \left[\frac{c(t)^{(1-\theta)} - 1}{(1-\theta)} \right] dt \tag{3.32}$$

จากข้อสมมติให้ครัวเรือนเป็นเจ้าของปัจจัยการผลิตทุน (Capital) และแรงงาน (Labor) โดยได้รับอัตราผลตอบแทนจากสินทรัพย์ $r(t)$ และอัตราผลตอบแทนจากแรงงาน $w(t)$ จากการที่ทุนมีค่าเสื่อมที่อัตราคงที่ δ ดังนั้นแล้วอัตราค่าเช่าที่แท้จริงจะเท่ากับราคาค่าเช่าลบด้วยค่าเสื่อมของทุน $r(t) = R(t) - \delta$

ข้อจำกัดงบประมาณของครัวเรือนคือ

$$\dot{a}(t) = \big(r(t) - n\big)a(t) + w(t) - c(t) \tag{3.33}$$

โดยที่	$a(t)$	คือ	สินทรัพย์สุทธิต่อบุคคล ณ เวลา t
	$\dot{a}(t) = \dfrac{da(t)}{dt}$	คือ	สินทรัพย์ที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลง
	$r(t)$	คือ	ค่าเช่าที่แท้จริง ณ เวลา t
	n	คือ	อัตราการเจริญเติบโตของประชากร

ครัวเรือนจะทำการบริโภคสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดงบประมาณโดยวิธีการ Hamiltonian

$$H = u\big(c(t)\big)e^{-(\rho-n)t} + v(t)\Big[w(t) + \big(r(t) - n\big)a(t) - c(t)\Big] \tag{3.34}$$

โดยที่	$v(t)$	คือ	มูลค่าปัจจุบันของราคาเงาของรายได้ในหน่วยความพอใจ

และ First order condition, costate equation และ Transversality condition คือ

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = 0 \qquad \Rightarrow \quad v(t) = u'(c(t))e^{-(\rho-n)t} \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a(t)} = -\dot{v}(t) \qquad \Rightarrow \quad \dot{v}(t) = -[r(t)-n]v(t) \tag{3.36}$$

$$\lim_{t\to\infty}[v(t)\cdot a(t)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\exp\left[-\int_0^t [r(v)-n]dv\right]\right\} = 0 \tag{3.37}$$

จากสมการ (3.35) (3.36) และ (3.37)

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(r(t)-\rho) \tag{3.38}$$

และ Transversality Condition ตามสมการ (3.37)

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\exp\left[-\int_0^t [r(v)-n]dv\right]\right\} = 0 \tag{3.39}$$

หน่วยธุรกิจจะทำการเลือกทุนและแรงงานที่ทำให้ได้กำไรสูงสุดตามสมการ(ดูตามสมการ (3.23) แต่ใส่การผลิตในรูป AK แทน สมการ (3.23)-(3.25) ตามแบบจำลอง AK model หน่วยธุรกิจจะมีฟังก์ชั่นการผลิตคือ

$$y(t) = f(k(t)) = Ak(t) \tag{3.40}$$

ซึ่ง $A > o$ และ $f'(k(t)) = A$ จากข้อสมมติข้างต้นที่กำหนดให้ทุนมีค่าเสื่อมโดยที่อัตราค่าเช่าที่แท้จริงจะเท่ากับราคาค่าเช่าลบด้วยค่าเสื่อมของทุนดังนั้นหน่วยธุรกิจจะทำกำไรสูงสุดภายใต้เงื่อนไข

$$R(t) = r(t) + \delta \tag{3.41}$$

$$r(t) = A - \delta \tag{3.42}$$

ถ้าผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงาน (Marginal product of labor) เท่ากับศูนย์ แล้วอัตราค่าจ้าง $w(t)$ จะเท่ากับศูนย์ด้วย ดังนั้นจะได้ดุลยภาพโดยสมมติให้เป็นระบบเศรษฐกิจแบบปิด ที่สินทรัพย์จะเท่ากับทุน $(a(t) = k(t))$

แทนค่า $a(t) = k(t),\ r(t) = A - \delta,\ w(t) = 0$ ไปในสมการ (3.33) จะได้

$$\dot{k}(t) = (A - \delta - n)k(t) - c(t) \tag{3.43}$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho) \tag{3.44}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{k(t)e^{-(A-\delta-n)t}\right\} = 0 \tag{3.45}$$

สมการ (3.44) แสดงถึงการเจริญเติบโตของการบริโภคไม่ขึ้นอยู่กับการสะสมทุนต่อประชากร $(k(t))$ หรือที่ระดับการบริโภคต่อประชากร ณ เวลาศูนย์ $c(0)$ การบริโภคต่อประชากร ณ เวลา t $c(t)$ คือ

$$c(t) = c(0)e^{(1/\theta)\cdot(A-\delta-\rho)\cdot t}$$

การเจริญเติบโตของทุนและผลผลิตต่อประชากร สามารถหาได้โดยหารสมการ (3.43) ด้วย $(k(t))$ จะได้

$$c(t)/k(t) = (A-\delta-n) - \dot{k}(t)/k(t)$$

ที่ Steady state ตัวแปรทุกตัวมีอัตราการเจริญเติบโตคงที่ จะได้พจน์ด้านขวา $(A-\delta-n)-\dot{k}(t)/k(t)$ คงที่ ดังนั้น c/k จะคงที่ และอัตราการเจริญเติบโตของทุนต่อประชากรจะเท่ากับอัตราการเจริญเติบโตของการบริโภคต่อประชากรในสมการ (3.44)

3.2 ทฤษฎีการวิเคราะห์ทางเศรษฐมิติ (Econometric Theory)

3.2.1 ข้อมูลพาแนล (Panel data)

ข้อมูลพาแนลเป็นข้อมูลที่มีผสมกันระหว่างข้อมูลภาคตัดขวาง (Cross-sectional data) และข้อมูลอนุกรมเวลา (Time series data) คือเป็นชุดข้อมูลจากตัวอย่างเดียวกันเป็นระยะเวลาหลายช่วงเวลา เช่น ตัวเลข GDP ของกลุ่มประเทศอาเซียนตั้งแต่ปี พ.ศ. 2520-2555 การใช้จ่ายภาครัฐของกลุ่มประเทศ OECD ตั้งแต่ปี พ.ศ.2540-2555 โดยข้อมูลแบบพาเนลแบ่งออกได้เป็นสองประเภทคือ balanced (สามารถเก็บข้อมูลจากตัวอย่างเดิมได้ครบถ้วนทุกๆช่วงเวลา) และ unbalanced (มีข้อมูลไม่ครบถ้วน ข้อมูลบางส่วนขาดหายไป)

ข้อมูลพาแนลเป็นที่นิยมมากในปัจจุบันเนื่องจาก ข้อมูลภาคตัดขวางต้องเก็บตัวอย่างเป็นจำนวนมาก และข้อมูลอนุกรมเวลาก็ต้องใช้ระยะเวลานานในการรวบรวมข้อมูล อีกทั้งข้อมูลพาแนลมีประโยชน์ในการศึกษามากกว่าการใช้ข้อมูลภาคตัดขวางหรืออนุกรมเวลาเพียงอย่างเดียว เพราะความหลากหลายของข้อมูลทำให้ค่าความเป็นอิสระ (Degree of freedom) มากขึ้น และเป็นการลดปัญหาภาวะร่วมเส้นตรง (Collinearity) ทำให้ค่าประมาณที่ได้มีความน่าเชื่อถือ

นอกจากนั้นข้อมูลพาแนลยังสามารถระบุและวัดผลกระทบที่ไม่สามารถพบได้เมื่อใช้ข้อมูลภาคตัดขวางหรือข้อมูลอนุกรมเวลาเพียงอย่างเดียวได้อีกด้วย

การประมาณค่าโดยใช้ข้อมูลพาแนลสามารถใช้ศึกษาการปรับตัวหรือการเปลี่ยนแปลงแบบพลวัตรของข้อมูลที่เกิดจากการสังเกตซ้ำ ๆ ได้ดี และใช้วิเคราะห์แบบจำลองที่มีความซับซ้อนได้ดีกว่าข้อมูลภาคตัดขวางและข้อมูลอนุกรมเวลา (Baltagi, 2001: 6-8) รวมถึงข้อมูลพาแนลยังไม่มีข้อจำกัดด้านสมมติฐาน

แบบจำลองข้อมูลพาแนลแบบทั่วไปในรูปเชิงเส้น สามารถเขียนได้ดังนี้ (Verbeek, 2004: 342)

$$y_{it} = \alpha_i + x_{it}'\beta_{it} + \varepsilon_{it} \tag{3.46}$$

โดยที่	i	คือ	ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1,\dots,N$
	t	คือ	ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1,\dots,T$
	y_{it}	คือ	เวกเตอร์ 1×1 ของตัวแปรตาม
	α_i	คือ	จำนวนจริง (ค่าคงที่)
	x_{it}	คือ	เวกเตอร์ $k\times 1$ ของตัวแปรอธิบาย
	β_{it}	คือ	เวกเตอร์ $k\times 1$ ของค่าสัมประสิทธิ์
	ε_{it}	คือ	ค่าความคลาดเคลื่อน

การประมาณค่าความสัมพันธ์ของแบบจำลองพาแนล ขึ้นอยู่กับข้อสมมติเบื้องต้นของค่าคงที่ (α_i) ค่าสัมประสิทธิ์ (β_{it}) และค่าความคลาดเคลื่อน (ε_{it})

ในกรณีทั่วไปนั้นจะสมมติให้ค่าความคลาดเคลื่อน (ε_{it}) มีการแจงแจงเหมือนกันในทุก ๆ หน่วยภาคตัดขวางและช่วงเวลา หมายความว่า ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ_ε^2 (Verbeek, 2004: 345)

3.2.2 การทดสอบพาแนลยูนิทรูท (Panel unit root test)

คือ การทดสอบความนิ่งของข้อมูลตัวแปรแต่ละตัวที่นำมาศึกษา ซึ่งโดยทฤษฎีเศรษฐมิติแล้วการถดถอยด้วยตัวแปรที่มีลักษณะไม่นิ่ง (Nonstationary) แล้วค่าสถิติ t (t-statistic) ที่ใช้□กันตามปกติจะมีการแจกแจงไม่มาตรฐาน (Nonstandard distribution) ซึ่งอาจนำไปสู่การลงความเห็นหรือข้อสรุปที่ผิดพลาดได้□ เนื่องจากมีความเป็นไปได้ของการเกิดปัญหาการถดถอยที่ไม่ถูกต้อง (Spurious regressions) (อารี วิบูลย์พงศ์, 2549) ซึ่งการทดสอบความนิ่ง (Stationary) ของข้อมูลทำได้จากสมการ AR (1) ของข้อมูลพาแนล

$$y_{it} = \alpha_i + \rho y_{it-1} + \varepsilon_{it} \tag{3.47}$$

สมการจะสามารถเปลี่ยนรูปได้เป็น

$$y_{it} = \rho y_{it-1} + \varepsilon_{it} \tag{3.48}$$

โดยที่ i คือ ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1,\ldots,N$

t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1,\ldots,T$

y_{it} คือ ตัวแปรภายนอก

ρ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของ Autoregressive

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

$H_o : \rho = 0$ (ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)

$H_a : \rho < 0$ (ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท)

ในการทดสอบพาแนลยูนิทรูท มีการแยกการทดสอบที่หลากหลาย เช่น แยกตามสมมติฐานค่า ρ_i ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม กล่าวคือ กลุ่มแรก $\rho_i = \rho$ สำหรับทุกๆ i หรือทุกหน่วยภาคตัดขวาง ได้แก่ การทดสอบพาแนลยูนิทรูทด้วยวิธี Levin, Lin and Chu (LLC) Test, วิธี Breitung Test และวิธี Hadri Test กลุ่มที่สอง คือ ค่า ρ_i ของแต่ละหน่วย i หรือแต่ละหน่วยภาคตัดขวางเป็นอิสระต่อกัน ได้แก่ การทดสอบพาแนลยูนิทรูทด้วยวิธี Im, Pesaran and Shin (IPS) Test และวิธี Fisher-Type Test โดยใช้ Fisher-ADF และ Fisher-PP ซึ่งเป็นการทดสอบยูนิทรูทของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Tests with Individual Unit Root Processes) นอกจากนั้นอาจแยกตามความสอดคล้องของข้อมูล เช่น ขนาดของข้อมูล ได้แก่ ขนาดของจำนวนหน่วยภาคตัดขวาง (N) และของข้อมูลอนุกรมเวลา (T) ลักษณะของข้อมูล ได้แก่ ข้อมูลที่มีลักษณะ Balance หรือ Unbalance เพื่อให้สอดคล้องกับความเหมาะสมในแต่ละวิธี โดยการทดสอบพาแนลยูนิทรูทในแต่ละวิธีสามารถอธิบายได้ ดังนี้

1. วิธีการทดสอบของ Levin, Lin and Chu (LLC)

จากสมการ

$$\Delta y_{it} = \rho y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta y_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad m = 1,2,3 \tag{3.49}$$

โดยที่ d_{1m} = เซ็ทว่าง, $d_{2m} = \{1\}$ และ $d_{3m} = \{1, t\}$

Δy_{it}	คือ	ผลต่างของ y_{it}
p_i	คือ	จำนวน Lag order สำหรับผลต่างของ y_{it}
α_{mi}	คือ	เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์
d_{mt}	คือ	เวกเตอร์ของ Deterministic variable
ε_{it}	คือ	ค่าความคลาดเคลื่อน

การทดสอบได้กำหนดสมมติฐาน คือ

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_a : \rho < 0$$

วิธีการทดสอบมี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ถดถอยสมการ Augmented Dickey-Fuller (ADF) ในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง

$$\Delta y_{it} = \rho_i y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta y_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad m = 1, 2, 3 \tag{3.50}$$

ให้ Lag order ของ p_i มีการเปลี่ยนแปลงไปในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง เลือกค่า Lag order ที่ $p_{\max}$ โดยใช้ค่าสถิติ t (t-statistic) ของ $\hat{\theta}_{iL}$ ในการตัดสิน จากนั้นถดถอย สมการเสริม (Auxiliary) ทั้งสองสมการเพื่อหาค่าส่วนที่เหลือโดย

ประมาณค่าสมการ Δy_{it} กับ $\Delta y_{i,t-L} \left(L = 1, \ldots, p_i \right)$ และ d_{mt} ได้ค่า $\hat{e}_{it}$

ประมาณค่าสมการ $y_{i,t-1}$ กับ $\Delta y_{i,t-L} \left(L = 1, \ldots, p_i \right)$ และ d_{mt} ได้ค่า $\hat{v}_{i,t-1}$

จากนั้นปรับค่าส่วนที่เหลือ (Residual) เพื่อควบคุมความแปรปรวนระหว่างข้อมูลภาคตัดขวางจะได้

$$\tilde{e}_{it} = \frac{\hat{e}_{it}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon t}}, \tilde{v}_{i,t-1} = \frac{\hat{v}_{it}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon t}} \tag{3.51}$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_{\varepsilon t}$ คือค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานจากการถดถอยสมการ ADF ในแต่ละหน่วยของข้อมูลภาคตัดขวาง

ขั้นที่ 2 คำนวณอัตราส่วนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระยะยาวกับระยะสั้น ภายใต้ข้อสมมติฐานหลักของยูนิทรูทการหาความแปรปรวนระยะยาวสามารถหาค่าได้จาก

$$\hat{\sigma}_{yi}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^{T} \Delta y_{it}^2 + 2 \sum_{L=1}^{\bar{K}} w_{\bar{K}L} \left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=2+L}^{T} \Delta y_{it} \Delta y_{i,t-L} \right] \tag{3.52}$$

โดยที่ $\bar{K}$ คือ Truncations lag และ $w_{\bar{K}L} = 1 - \left(L / \bar{K} + 1\right)$ และในแต่ละหน่วยภาคตัดขวางค่าอัตราส่วนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระยะยาวคำนวณจาก $\hat{s}_i = \hat{\sigma}_{yi} / \hat{\sigma}_{\varepsilon i}$ ส่วนค่าเฉลี่ยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานคำนวณจาก $\hat{S}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{s}_i$

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบข้อมูลพาแนล โดยการถดถอยแบบ Pooled (The pooled regression)

$$\tilde{e}_{it} = \rho\tilde{v}_{i,t-1} + \tilde{\varepsilon}_{it} \tag{3.53}$$

จากค่าสังเกตจำนวน $N\tilde{T}$ โดยที่ $\tilde{T} = T - \bar{p} - 1$ คือ ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตต่อหน่วยของข้อมูลพาแนล ซึ่ง $\bar{p} = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i}{N}$ คือค่าเฉลี่ยของ Lag order แต่ละหน่วยของ ADF

ค่าสถิติ t ที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$t_\rho = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}(\hat{\rho})} \tag{3.54}$$

โดยที่

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2+p_i}^{T}\tilde{v}_{i,t-1}\tilde{e}_{it}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2+p_i}^{T}\tilde{v}_{i,t-1}^2} \tag{3.55}$$

$$\hat{\sigma}(\hat{\rho}) = \frac{\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}}{\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2+p_i}^{T}\tilde{v}_{i,t-1}^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.56}$$

และค่าความแปรปรวนของ $\tilde{\varepsilon}_{it}$

$$\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}^2 = \frac{1}{N\tilde{T}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2+p_i}^{T}\left(\tilde{e}_{it} - \hat{\rho}\tilde{v}_{it-1}\right)^2 \tag{3.57}$$

คำนวณค่า Adjusted t-statistic จาก

$$t_\rho^* = \frac{t_\rho - N\tilde{T}\hat{S}_N\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}^{-2}\hat{\sigma}(\hat{\rho})\mu_{m\tilde{T}}^*}{\sigma_{m\tilde{T}}^*} \tag{3.58}$$

โดย	$\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}^{-2}$	คือ	ค่าความแปรปรวนของ $\tilde{\varepsilon}_{it}$
	$\hat{\sigma}(\hat{\rho})$	คือ	ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $(\hat{\rho})$
	$\hat{S}_N$	คือ	ค่าเฉลี่ยของค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน
	$\mu_{m\tilde{T}*}$ และ $\sigma_{m\tilde{T}*}$	คือ	Adjustment Term ของค่าเฉลี่ย (Mean) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation)

การแปลผลให้พิจารณาค่าสถิติ t_{ρ}^{*} ที่ได้จากการประมาณ หากมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก (ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท) แต่ถ้าค่าสถิติ t_{ρ}^{*} ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก (ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)

2. วิธีการทดสอบของ Im, Pesaran and Shin (IPS)

เป็นการทดสอบโดยใช้ Augmented Dickey-Fuller (ADF)

$$\Delta y_{it} = \rho_i y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta y_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad (3.59)$$

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$H_0 : \rho_i = 0 \quad for \quad , \forall i$$
$$H_a : \begin{cases} \rho_i < 0 & for \quad i = 1, 2, \ldots, N_1 \\ \rho_i = 0 & for \quad i = N_1 + 1, \ldots N \end{cases}$$

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_{\rho_i} \qquad (3.60)$$

โดยที่ $\bar{t} \sim N(0,1)$ และ $t_{\rho_i} \Rightarrow \left(\int_0^1 W_{iZ} dW_{iZ} \right) \Big/ \left[\int_0^1 W_{iZ}^2 \right] = t_{iT}$ เมื่อ $T \rightarrow \infty$ จากข้อสมมติของ IPS ที่กำหนดให้ t_{iT} เป็น i.i.d ดังนั้นสามารถปรับสมการได้

$$\frac{\sqrt{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_{iT} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left[t_{iT} | \rho_i = 0 \right] \right)}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \text{var}\left[t_{iT} | \rho_i = 0 \right]}} \Rightarrow N(0,1) \qquad (3.61)$$

เมื่อ $N \rightarrow \infty$ จากทฤษฎีลิมิตสู่เข้าสู่ศูนย์กลาง (Central limit theorem) สามารถเขียนสมการใหม่ได้ว่า

$$t_{IPS} = \frac{\sqrt{N} \left(\bar{t} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left[t_{iT} | \rho_i = 0 \right] \right)}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \text{var}\left[t_{iT} | \rho_i = 0 \right]}} \Rightarrow N(0,1) \qquad (3.62)$$

การพิจารณาจะดูว่าค่าสถิติ t_{IPS} ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาเนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ t_{IPS} ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาเนลมียูนิทรูท

3. วิธีการทดสอบของ Breitung

Breitung ทดสอบค่าสถิติโดยไม่พิจารณาการปรับค่าความเอนเอียง (Bias adjustment) ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 วิธีหาค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบมีวิธีเหมือนกับวิธีของ LLC แต่แตกต่างกันตรงที่ค่า $\Delta y_{i,t-L}$ ที่ใช้ในการหาค่า $\hat{e}_{it}$ และ $\hat{v}_{i,t-1}$

ขั้นตอนที่ 2 ค่าส่วนที่เหลือ (Residual) $\hat{e}_{it}$ ถูกปรับเปลี่ยนโดยการใช้ Forward orthogonalization transformation จะได้สมการ

$$e_{it}^{*} = \sqrt{\frac{T-t}{(T-t+1)}}\left(\tilde{e}_{it} - \frac{\tilde{e}_{i,t+1} + \ldots \tilde{e}_{i,T}}{T-t}\right) \qquad (3.63)$$

และ

$$v_{i,t-1}^{*} = \tilde{v}_{i,t-1} - \tilde{v}_{i,1} - \frac{t-1}{T}\tilde{v}_{iT}$$ มีค่าคงที่และแนวโน้ม

$$v_{i,t-1}^{*} = \tilde{v}_{i,t-1} - \tilde{v}_{i,1}$$ มีค่าคงที่

$$v_{i,t-1}^{*} = \tilde{v}_{i,t-1}$$ ไม่มีค่าคงที่และแนวโน้ม

ขั้นตอนที่ 3 ประมาณค่า Pooled regression

$$e_{it}^{*} = \rho v_{i,t-1}^{*} + \varepsilon_{it}^{*} \qquad (3.64)$$

ดังนั้นค่าสถิติที่ใช้ในการประมาณคือ

$$B_{nT} = \left[\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{nT^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=2}^{T-1}(v^{*}_{it-1})^2\right]^{-1/2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{nT}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=2}^{T-1}(e^{*}_{it})(v^{*}_{it-1})\right)\right] \qquad (3.65)$$

การทดสอบได้กำหนดสมมติฐานคือ

$H_0 : \rho = 0$ (ข้อมูลพาเนลมียูนิทรูท)

$H_a : \rho < 0$ (ข้อมูลพาเนลไม่มียูนิทรูท)

การแปลผลให้พิจารณาดูค่าสถิติ B_{nT} ที่ได้จากการประมาณ หากมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก (ข้อมูลพาเนลไม่มียูนิทรูท) แต่ถ้าค่าสถิติ B_{nT} ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก (ข้อมูลพาเนลมียูนิทรูท)

4. วิธีการทดสอบของ Fisher-type

จากสมการ Augmented Dickey-Fuller (ADF)

$$\Delta y_{it} = \rho y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta y_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad ; m = 1,2,3 \qquad (3.66)$$

โดยที่ d_{1m} เป็นเซ็ทว่าง, $d_{2m} = \{1\}$ และ $d_{3m} = \{1, t\}$

Δy_{it} คือ ผลต่างของ y_{it}

p_i คือ จำนวน Lag order สำหรับผลต่างของ y_{it}

α_{mi} คือ เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์

d_{mt} คือ เวกเตอร์ของ Deterministic variable

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

การทดสอบโดยการรวมค่า p-value ของค่าสถิติที่ทดสอบความนิ่งของข้อมูลแต่ละหน่วยภาคตัดขวางจากสมการ ADF มาใช้ในการทดสอบพาแนลยูนิทรูท

$$P = -2\sum_{i=1}^{N} \ln p_i \rightarrow \chi^2_{2N} \qquad (3.67)$$

โดย p คือค่าที่ใช้ทดสอบความนิ่งของข้อมูลแต่ละภาคตัดขวาง ค่า $-2\ln p_i$ มีการแจกแจงแบบ χ^2 มีระดับความเป็นอิสระเท่ากับ 2 ดังนั้น P จึงมีการแจกแจงแบบ χ^2 และมีระดับความเป็นอิสระเท่ากับ $2N$

Choi (2001) ได้เสนอวิธีการในการทดสอบคือ The inverse normal test (Z) และ The logit test (L) คือ

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \Phi^{-1}(p_i) \qquad (3.68)$$

ซึ่ง $0 \le p_i \le 1$ และ $\Phi^{-1}(p_i) \sim N(0,1)$ ดังนั้นส่งผลให้ $Z \sim N(0,1)$ และ

$$L = \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) \qquad (3.69)$$

ซึ่ง $\ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)$ มีการแจกแจงแบบโลจิสติคที่ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ $\pi^2/3$

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบคือ

H_0 : ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

H_a : ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

การแปลผลให้พิจารณาดู หากทั้ง Fisher's (P) Test และ Z - Statistic ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก (ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท) แต่หากถ้าทั้ง Fisher's (P) Test และ Z – Statistic ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก (ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)

5. วิธีการทดสอบของ Hadri

ทดสอบโดยการประมาณค่าส่วนที่เหลือ (Residual) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary least square: OLS) ประมาณค่าตัว y_{it} ที่มีค่าคงที่ (Constant) หรือมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้ม (Trend) พิจารณาจาก 2 สมการคือ

$$y_{it} = r_{it} + \varepsilon_{it} \qquad i = 1,\ldots,N;\ t = 1,\ldots,T \tag{3.70}$$

และ

$$y_{it} = r_{it} + \beta_i t + \varepsilon_{it} \tag{3.71}$$

ซึ่ง $r_{it} = r_{i,t-1} + u_{it}$ คือ Random walk และ $\varepsilon_{it} \sim INN\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$, $u_{it} \sim INN\left(0, \sigma_\mu^2\right)$ มีคุณสมบัติ i.i.d. ระหว่างข้อมูลภาคตัดขวางที่ i และช่วงเวลาที่ t ดังนั้นสามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$y_{it} = r_{io} + \beta_i t + \sum_{s=1}^{t} u_{is} + \varepsilon_{it} \tag{3.72}$$

$$y_{it} = r_{io} + \beta_i t + v_{it} \tag{3.73}$$

โดยที่ $v_{it} = \sum_{s=1}^{t} u_{is} + \varepsilon_{it}$ จะได้ค่าสถิติ LM ที่ใช้ในการประมาณมีค่าดังนี้

$$LM_1 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} S_{it}^2\right) \Big/ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \tag{3.74}$$

โดยที่ $S_{it} = \sum_{s=1}^{t} \hat{\varepsilon}_{is}$ คือผลรวมของส่วนที่เหลือ $(\hat{\varepsilon}_{is})$ ด้วยวิธี OLS และ

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_{it}^2$$

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบการเกิดปัญหาค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ (Heteroskedasticity) ระหว่างข้อมูลภาคตัดขวางที่ i , $\hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2$ ดังนี้

$$LM_2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} S_{it}^2 / \hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2\right)\right) \tag{3.75}$$

ดังนั้นจึงใช้ LM_1 ในกรณีเป็น Homoskedasticity และใช้ LM_2 ในกรณีที่เป็น Heteroskedasticity

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานคือ

$$Z = \sqrt{N}\left(LM - \xi_1\right)/\zeta \;\; \rightarrow N(0,1) \tag{3.76}$$

โดยที่ $\xi = 1/6$ และ $\zeta = 1/45$ ถ้าแบบจำลองประกอบด้วยค่าคงที่เพียงอย่างเดียว $\xi = 1/15$ และ $\zeta = 11/6300$ สำหรับกรณีอื่น

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

H_0 : ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

H_a : ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

การแปลผลให้พิจารณาค่าสถิติ Z ที่ได้จากการประมาณ หากมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก (ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท) แต่ถ้าค่าสถิติ Z ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก (ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท)

3.2.3 การประมาณค่าความสัมพันธ์ของแบบจำลองพาแนล

เป็นการประมาณค่าของข้อมูลพาแนล ที่พิจารณาแยกความแตกต่างระหว่างแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) และช่วงเวลา (Time) โดยมีข้อสมมติว่าค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์แตกต่างกัน แบ่งออกเป็นการประมาณค่าแบบจำลอง Fixed effect, แบบจำลอง Random effect และ Pooled estimator

1. แบบจำลอง Fixed effects

แบบจำลอง Fixed effect หรือแบบจำลองการถดถอย Least-Squares Dummy Variable (LSDV) เป็นแบบจำลองการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่ค่าคงที่ (Intercept term) มีการผันแปรตามแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง i นั้นคือเป็นไปตามสมการ (3.77)

$$y_{it} = \alpha_i + x_{it}'\beta + \varepsilon_{it} \qquad \varepsilon_{it} \sim IID(0,\sigma_\varepsilon^2) \tag{3.77}$$

มีข้อสมมติคือ x_{it} และ ε_{it} เป็นอิสระต่อกันทุกค่า สามารถเขียนรูปแบบการถดถอยที่รวมเอาตัวแปรหุ่น (Dummy variable) สำหรับแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง i ในแบบจำลองได้ดังนี้

$$y_{it} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_i d_{ij} + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \tag{3.78}$$

โดยที่ $d_{ij} = 1$ ถ้า $i = j$ และ $d_{ij} = 0$ ถ้า $i \neq j$

ดังนั้นเซตของตัวแปรจำนวน N ในแบบจำลอง ค่าพารามิเตอร์ $\alpha_1,...,\alpha_N$ และค่า β สามารถประมาณค่าได้โดยทำการประมาณสมการ (3.78) โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary least squares: OLS) โดยค่า β ที่คำนวณโดยใช้ (Least Squares Dummy Variable: LSDV) นี้มีการเบี่ยงเบน จึงต้องกำจัดผลกระทบแต่ละหน่วยของ α_{it} โดยการเปลี่ยนแปลงข้อมูล

สามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\bar{y}_i = \alpha_i + \bar{x}'_i\beta + \bar{\varepsilon}_i \tag{3.79}$$

โดยที่ $\bar{y}_i = T^{-1}\sum_t y_{it}$

$$y_{it} - \bar{y}_i = (x_{it} - \bar{x}_i)'\beta + (\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i) \tag{3.80}$$

สมการ (3.80) เป็นแบบจำลองการถดถอยที่เบี่ยงเบนออกจากค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง และไม่รวมผลกระทบแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง α_{it} โดยการเปลี่ยนแปลงข้อมูลในสมการ (3.80) ที่มีการสร้างค่าสังเกตในรูปการเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง เรียกว่า "Within transformation" และตัวประมาณ OLS สำหรับค่า β ที่คำนวณได้จากแบบจำลองนี้เรียกว่า "Within estimator" หรือ "Fixed effect estimator" ซึ่งให้ผลที่ถูกต้องแม่นยำเช่นเดียวกับตัวประมาณแบบ LSDV (Verbeek, 2004: 346)

กำหนด

$$\hat{\beta}_{FE} = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{it} - \bar{x}_i)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(y_{it} - \bar{y}_i)' \tag{3.81}$$

จากข้อสมมติให้ x_{it} เป็นอิสระจาก ε_{it} ทุกค่า ตัวประมาณ Fixed effect สามารถแสดงในรูปที่ค่า β ไม่มีการเบี่ยงเบน และถ้ากำหนดให้ ε_{it} มีการกระจายแบบปกติ ค่า $\hat{\beta}_{FE}$ จะมีการกระจายตัวแบบปกติคือ

$$E\{(x_{it} - \bar{x}_{it})\varepsilon_{it}\} = 0 \tag{3.82}$$

สมการ (3.82) แสดงข้อสมมติ x_{it} ไม่สัมพันธ์กับ ε_{it} และ $\bar{x}_i$ จะไม่สัมพันธ์กับค่าความคลาดเคลื่อน (Error term) ดังนี้

$$E\{x_{it}\varepsilon_{it}\} = 0 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ ค่าของ i, t} \tag{3.83}$$

ในกรณีนี้จะเรียก x_{it} ว่า "Strictly exogenous" ที่กำหนดให้ไม่มีความสัมพันธ์กับค่าปัจจุบัน, อดีต และอนาคตของค่าความคลาดเคลื่อน

ที่ตัวแปรอธิบาย N เป็นอิสระต่อค่าความคลาดเคลื่อนทุกตัว ดังนั้นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงคือ

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{x}_i \hat{\beta}_{FE,} \qquad i = 1,\ldots,N \tag{3.84}$$

ภายใต้ข้อสมมติตามสมการ (3.82) α_{it} ของ Fixed effects ไม่มีการเปลี่ยนแปลง เพราะที่ค่า T คงที่ค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง $\bar{y}_i$ และ x_{it} นั้นจะไม่เบนเข้าหาค่าใดเลย

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance matrix) สำหรับตัวประมาณค่า Fixed effects $\left(\hat{\beta}_{FE}\right)$ ที่มีข้อสมมติให้ ε_{it} นั้นมีลักษณะ i.i.d. ระหว่างแต่ละหน่วยภาคตัดขวางและช่วงเวลา เมื่อค่าความแปรปรวน $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$ นั้นกำหนดโดย

$$\mathrm{V}\left\{\hat{\beta}_{FE}\right\} = \sigma_{\varepsilon}^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(x_{it} - \bar{x}_i\right)\left(x_{it} - \bar{x}_i\right)' \right)^{-1} \tag{3.85}$$

ถ้าค่า T มีจำนวนมากจะใช้ OLS ในการประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ภายใต้การถดถอยตามสมการ (3.80) จะได้ผลการประมาณที่ต่ำกว่าตัวแปรที่แท้จริง และค่าความแปรปรวนของ $\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i$ คือ $(T-1)/T\sigma_{\varepsilon}^2$ จะมีค่าค่อนข้างมากกว่า σ_{ε}^2 โดยตัวประมาณค่าที่ไม่มีเปลี่ยนแปลง (Consistent) ของ σ_{ε}^2 สามารถหาได้จากค่าผลรวมผลต่างกำลังสอง (Residual sum of squares: RSS) หารด้วย $N(T-1)$ นั้นคือ

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 &= \frac{1}{N(T-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(y_{it} - \hat{\alpha}_{it} - x_{it}' \hat{\beta}_{FE} \right)^2 \\ &= \frac{1}{N(T-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(y_{it} - \bar{y}_i - \left(x_{it} - \bar{x}_{it}\right)' \hat{\beta}_{FE} \right)^2 \end{aligned} \tag{3.86}$$

ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อให้ค่าระดับความเป็นอิสระ (Degree of freedom) มีความถูกต้องมากขึ้น โดยการนำค่า K ไปลบที่ตัวหารในสมการ (3.86) เพราะค่าระดับความเป็นอิสระที่ถูกต้องนั้นจะทำให้ค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าสอดคล้องกับ Individual intercept term

ดังนั้นแบบจำลอง Fixed effect ได้รวบรวมข้อแตกต่างของ "ภายใน" แต่ละหน่วยภาคตัดขวาง คืออธิบายขนาดความแตกต่างของ y_{it} และ $\bar{y}_i$ แต่ไม่อธิบายว่าทำไม $\bar{y}_i$ ถึงแตกต่างจาก $\bar{y}_j$ (Verbeek, 2004: 347)

2. แบบจำลอง Random Effects

ในการวิเคราะห์การถดถอยโดยทั่วไปนั้นมีข้อสมมติว่าทุกตัวแปรมีอิทธิพลต่อตัวแปรตาม ซึ่งสามารถแสดงในรูปค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม (Random error term) โดยให้ α_i เป็นตัวแปรสุ่ม (Random Factors) ที่เป็นอิสระและมีการแจกแจงในแต่ละหน่วย ดังนั้นสามารถเขียนแบบจำลอง Random effects ดังนี้ (Verbeek, 2004: 347)

$$y_{it} = \mu + \beta x_{it}' + \alpha_i + \varepsilon_{it}, \qquad \varepsilon_{it} \sim IID(0,\sigma_\varepsilon^2)\,;\ \alpha_i \sim IID(0,\sigma_\alpha^2) \tag{3.87}$$

โดยที่ $\alpha_i + \varepsilon_{it}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน (Error Term) ที่ประกอบด้วย ส่วนประกอบเฉพาะแต่ละหน่วยภาคตัดขวางที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา และส่วนที่เหลือ ซึ่งสมมติให้ไม่มีความสัมพันธ์กันตลอดช่วงเวลา

จากข้อสมมติที่ α_i และ ε_i สัมพันธ์กันอย่างอิสระแสดงว่า $\alpha_i + \varepsilon_{it}$ เป็นรูปแบบของอัตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation) ดังนั้นการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสำหรับตัวประมาณ OLS และตัวประมาณค่า GLS ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพ สามารถหาได้จาก Error covariance matrix

การหาตัวประมาณ GLS สำหรับทุก ๆความคลาดเคลื่อนของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง i คือ $\alpha_i\iota_T + \varepsilon_i$ โดยที่ $\iota_T = (1,1,...,1)'$ มีขนาด (Dimension) เท่ากับ T และ $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1},...,\varepsilon_{iT})'$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเวคเตอร์นี้คือ

$$V\{\alpha_i\iota_T + \varepsilon_i\} = \Omega = \sigma_\alpha^2\iota_T\iota_T' + \sigma_\alpha^2\iota_T \tag{3.88}$$

โดยที่ I_t คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาดเท่ากับ T

สามารถหาค่าตัวประมาณ GLS สำหรับค่าพารามิเตอร์ในสมการ (3.87) โดยการแปลงข้อมูลแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง คือคูณเวคเตอร์ $y_i = (y_{i1},...,y_{iT})'$ ด้วย Ω^{-1}

กำหนดโดย

$$\Omega^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2}\left[I_T - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}\iota_T\iota_T' \right] \tag{3.89}$$

หรือเขียนในรูป

$$\Omega^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2}\left[\left(I_T - \frac{1}{T}\iota_T\iota_T' \right) + \psi\frac{1}{T}\iota_T\iota_T' \right] \tag{3.90}$$

โดยที่ $$\psi = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}$$

ตัวประมาณ GLS สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it}-\bar{x}_i)' + \psi T \sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{x}_i-\bar{x})' \right)^{-1} \times \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it}-\bar{x}_i)(y_{it}-\bar{y}_i) + \psi T \sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y}) \right) \quad (3.91)$$

โดยที่ $\bar{x}$ คือค่าเฉลี่ยของ x_{it} ทั้งหมดที่ $\bar{x} = (1/(NT))\sum_{i,t} x_{it}$

ที่ $\psi = 0$ ตัวประมาณค่า Fixed effects จะเพิ่มขึ้น เพราะ $\psi \to 0$ ถ้า $T \to \infty$ นั้นเป็นไปตามที่ว่าตัวประมาณค่า Fixed effect และ Random effects จะมีค่าเท่ากันเมื่อค่า T มีจำนวนมาก แต่ถ้า $\psi = 1$ ตัวประมาณค่า GLS จะเท่ากับตัวประมาณ OLS (และ Ω เป็นเมทริกซ์ Diagonal)

จากสูตรการคำนวณตัวประมาณ GLS โดยทั่วไป คือ

$$\hat{\beta}_{GLS} = \Delta\hat{\beta}_B + (I_k - \Delta)\hat{\beta}_{FE} \quad (3.92)$$

โดยที่

$$\hat{\beta}_B = \left(\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{x}_i-\bar{x})' \right) \sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{y}_i-\bar{y}) \quad (3.93)$$

ดังนั้นจะเรียกค่า β ของตัวประมาณ OLS ในแบบจำลองสำหรับค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวางว่า "Between estimator"

$$\bar{y}_i = \mu + \bar{x}_i'\beta + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i, \qquad i = 1,\ldots,N \quad (3.94)$$

ซึ่งเมทริกซ์ Δ คือเมทริกซ์ที่มีการถ่วงน้ำหนัก ที่ตัวประมาณ GLS เป็นเมทริกซ์ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของ Between estimator และ Within estimator โดยที่ตัวถ่วงน้ำหนักขึ้นอยู่กับค่าความสัมพันธ์ของความแปรปรวนระหว่างตัวประมาณค่าทั้งสอง

สำหรับตัวประมาณ GLS นั้นเป็นการรวมกันของตัวประมาณ Between estimator และ Within estimator ซึ่งโดยทั่วไปตัวประมาณ GLS จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ OLS ถ้าตัวแปรอธิบายเป็นอิสระต่อ ε_{it} และ α_i ทุกตัว และตัวประมาณ GLS จะไม่มีการเอนเอียง (Unbiased) และไม่เปลี่ยนแปลง (Consistent) ที่ค่า N หรือ T (หรือทั้ง N และ T) มีค่าเข้าสู่อนันต์ (Infinity) ภายใต้ $E\{\bar{x}_i\varepsilon_{it}\} = 0$ และ

$$E\{\bar{x}_i\alpha_i\} = 0 \quad (3.95)$$

โดยจะใช้เงื่อนไขดังกล่าวเพื่อทำให้ Between estimator ไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Consistent)

วิธีการคำนวณหาตัวประมาณ GLS จะมีการเปลี่ยนแปลงแบบจำลองดังนี้

$$\left(y_{it}-\vartheta\overline{y}_i\right)=\mu\left(1-\vartheta\right)+\left(x_{it}-\overline{x}_i'\right)'\beta+u_{it} \tag{3.96}$$

โดยที่ $\vartheta=1-\psi^{1/2}$ ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนในรูปแบบการเปลี่ยนแปลงนี้เป็น i.i.d ที่ค่า $\psi=0$ นั้นจะสอดคล้องกับ Within estimator $(\vartheta=1)$ และสัดส่วนที่คงที่ (ϑ) ของค่าเฉลี่ยแต่ละหน่วยภาคตัดขวางคือการลบข้อมูลที่ได้จากแบบจำลองที่มีการเปลี่ยนแปลงข้อมูล $(0\le\vartheta\le1)$

การใช้ตัวประมาณ GLS ที่มีความเหมาะสมจะต้องคำนวณหาค่าความแปรปรวนก่อน ซึ่งตัวประมาณ σ_ε^2 สามารถหาได้จากสมการ (3.86) ดังนั้นค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน $\sigma_\alpha^2+\left(1/T\right)\sigma_\varepsilon^2$ สามารถประมาณค่าได้จาก

$$\hat{\sigma}_B^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{y}_i-\hat{\mu}_B-\overline{x}_i'\hat{\beta}_B\right)^2 \tag{3.97}$$

โดยที่ $\hat{\mu}_B$ คือ Between estimatior ของ μ

จากสมการ (97) ตัวแปรที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของ σ_α^2 จะเป็นไปตาม

$$\hat{\sigma}_\alpha^2=\hat{\sigma}_B^2-\frac{1}{T}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \tag{3.98}$$

ซึ่งสามารถปรับค่าตัวประมาณนี้โดยการปรับปรุงค่าระดับความเป็นอิสระ (Degree of freedom) ให้ถูกต้อง โดยนำ $K+1$ ลบกับตัวหารในสมการ (3.97) ผลของตัวประมาณ EGLS จะเป็นตัวประมาณ Random effect ของ β (และ μ) คือแทนค่า β เท่ากับ $\hat{\beta}_{RE}$ หรือที่รู้จักในชื่อของตัวประมาณ Balestra-Nerlove (Verbeek, 2004: 347-351)

3. การประมาณค่าแบบ Pooled Estimator

เป็นการวิเคราะห์ที่สมมติให้ค่าคงที่และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการมีค่าเท่ากันทุกหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) และช่วงเวลา (Time) ที่พิจารณา ซึ่งไม่ได้ประมาณค่าความแตกต่างระหว่างแต่ละหน่วยภาคตัดขวางและช่วงเวลาที่พิจารณา โดยมีแบบจำลองพื้นฐานตามสมการ (กรรณิการ์ ดวงเนตร, 2553)

แบบจำลองของ Pooled OLS คือ

$$y_{it}=\alpha_i+x_{it}'\beta_{it}+\varepsilon_{it} \tag{3.99}$$

โดยที่	i	คือ	ข้อมูลภาคตัดขวาง $i=1,\ldots,N$
	t	คือ	ข้อมูลอนุกรมเวลา $t=1,\ldots,T$

y_{it} คือ เวกเตอร์ 1×1 ของตัวแปรตาม

α_i คือ จำนวนจริง (ค่าคงที่)

x_{it} คือ เวกเตอร์ $k \times 1$ ของตัวแปรอธิบาย

β_{it} คือ เวกเตอร์ $k \times 1$ ของค่าสัมประสิทธิ์

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

สมมติฐานที่แตกต่างระหว่างแบบจำลอง Fixed effects, แบบจำลอง Random effects และ Pooled OLS แสดงได้ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ความแตกต่างระหว่าง แบบจำลอง Fixed effects, แบบจำลอง Random effects และ Pooled OLS

วิธีการ	**สมมติฐานเกี่ยวกับค่า β**
Fixed Effects	$\beta_{it} = \beta_i$ โดยที่ $E(\beta_i, X_{it}) \neq 0$
Random Effects	$\beta_{it} = \beta + \varepsilon_i$ โดยที่ $E(\varepsilon_i, X_{it}) = 0$
Pooled OLS	$\beta_{it} = \beta$

3.2.4 การทดสอบสมการพาแนล (Panel equation testing)

การทดสอบสมการพาแนล เป็นการทดสอบว่าควรทำการประมาณแบบจำลอง Panel Cointegration ในรูปแบบใด ระหว่าง Pooled estimator, Fixed effects หรือ Random effects โดยทำการทดสอบ 3 วิธี คือ Lagrange multiplier test (LM-Test), Hausman test และ Redundant Fixed effects test ดังนี้

1. วิธีการทดสอบแบบ Lagrange multiplier (LM-test)

เป็นการทดสอบว่าควรประมาณแบบจำลองในรูปแบบใดระหว่าง Random effects และ Pooled estimator โดย Baltagi et al. (1992b) ได้เสนอการทดสอบเงื่อนไขผลกระทบแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual effects condition) เกี่ยวกับผลกระทบที่เกิดเฉพาะช่วงเวลา (Time-specific effects) ที่ $\sigma_\lambda^2 > 0$ (Baltagi, 2008)

ที่มีสมมติฐานหลักในการทดสอบคือ

$$H_0^d : \sigma_\mu^2 = 0$$

ค่าสถิติการทดสอบด้วยวิธี Lagrange multiplier คือ

$$\mathrm{LM}_{\mu} = \frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_2^2\tilde{\sigma}_2^2}{\sqrt{T(T-1)\left[\tilde{\sigma}_v^4 + (N-1)\tilde{\sigma}_v^4\right]}}\tilde{D}_{\mu} \tag{3.100}$$

และ

$$\tilde{D}_{\mu} = \frac{T}{2}\left\{\frac{1}{\tilde{\sigma}_2^2}\left[\frac{\tilde{u}'\left(\bar{J}_N \otimes \bar{J}_T\right)\tilde{u}}{\tilde{\sigma}_2^2} - 1\right] + \frac{(N-1)}{\tilde{\sigma}_v^2}\left[\frac{\tilde{u}'\left(E_N \otimes \bar{J}_T\right)\tilde{u}}{(N-1)\tilde{\sigma}_v^2} - 1\right]\right\} \tag{3.101}$$

โดยที่ $\tilde{\sigma}_2^2 = \tilde{u}'\left(\bar{J}_N \otimes I_T\right)\tilde{u}/T$ และ $\tilde{\sigma}_v^2 = \tilde{u}'\left(E_N \otimes I_T\right)\tilde{u}/T(N-1)$ ซึ่ง LM_{μ} มีการกระจายตัวแบบ Asymptotically $N(0,1)$ และการประมาณค่าตัวรบกวน $\tilde{u}$ หาได้จากส่วนที่เหลือจากการประมาณ GLS ในทิศทางเดียวโดยใช้ Maximum likelihood ประมาณ $\tilde{\sigma}_v^2$ และ $\tilde{\sigma}_2^2$

ในการทดสอบด้วยวิธี Lagrange multiplier ภายใต้สมมติฐาน $H_0^e : \sigma_{\lambda}^2 = 0$ ที่ $\sigma_{\mu}^2 > 0$ คือ

$$\mathrm{LM}_{\lambda} = \frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_1^2\tilde{\sigma}_2^2}{\sqrt{N(N-1)\left[\tilde{\sigma}_v^4 + (T-1)\tilde{\sigma}_1^4\right]}}\tilde{D}_{\lambda} \tag{3.102}$$

และ

$$\tilde{D}_{\lambda} = \frac{N}{2}\left\{\frac{1}{\tilde{\sigma}_2^2}\left[\frac{\tilde{u}'\left(\bar{J}_N \otimes \bar{J}_T\right)\tilde{u}}{\tilde{\sigma}_1^2} - 1\right] + \frac{(T-1)}{\tilde{\sigma}_v^2}\left[\frac{\tilde{u}'\left(\bar{J}_N \otimes E_T\right)\tilde{u}}{(T-1)\tilde{\sigma}_v^2} - 1\right]\right\} \tag{3.103}$$

โดยที่ $\tilde{\sigma}_1^2 = \tilde{u}'\left(I_N \otimes \bar{J}_T\right)\tilde{u}/N$ และ $\tilde{\sigma}_v^2 = \tilde{u}'\left(I_N \otimes E_T\right)\tilde{u}/N(T-1)$ ซึ่ง LM_{λ} มีการกระจายตัวแบบ Asymptotically distributed ภายใต้สมมติฐานหลัก H_0^e

ถ้าผลการทดสอบยอมรับสมมติฐานหลัก แสดงว่าควรทำการประมาณค่าแบบจำลองโดยใช้ Pooled Estimator แต่ถ้าปฏิเสธสมมติฐานหลักควรทำการประมาณโดยใช้ Random Effects

2. วิธีทดสอบแบบ Hausman

เป็นการทดสอบว่าควรทำการประมาณแบบจำลองในรูปแบบใดระหว่าง Fixed Effects หรือ Random Effects โดยมีสมมติฐานที่สำคัญคือ ส่วนประกอบของค่าความคลาดเคลื่อนในแบบจำลองการถดถอยไม่มีความสัมพันธ์กับ X_{it} คือ $E(u_{it}/X_{it}) = 0$ ที่มีการกำหนดให้พจน์รบกวน (μ_i) มีผลต่อแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) ซึ่งไม่สามารถหาค่าได้และมีความสัมพันธ์กับ X_{it}

ในกรณีที่ $E\left(u_{it} / X_{it}\right) \neq 0$ และตัวประมาณ GLS $\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}\right)$ จะมีความเอนเอียง (Biased) และมีการเปลี่ยนแปลง (Inconsistent) สามารถกำจัดค่า μ_i ได้โดยใช้ Within estimator $\left(\tilde{\beta}_{\text{Within}}\right)$ ที่ไม่เอนเอียง (Unbiased) และไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Consistent) (Baltagi, 2008: 72-73)

Hausman (1978) ทำการเปรียบเทียบ $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$ และ $\tilde{\beta}_{\text{Within}}$ ได้ผลว่าตัวประมาณทั้งสองมีความแตกต่างกันในข้อจำกัดของความน่าจะเป็นคือ $\tilde{\beta}_{\text{Within}}$ จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Consistent) ทั้งในกรณีที่ยอมรับสมมติฐานหลัก $H_0 : E\left(u_{it} / X_{it}\right) = 0$ และปฏิเสธสมมติฐานหลัก แต่ $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$ ในกรณีที่ปฏิเสธสมมติฐานหลักตัวประมาณจะมีการเปลี่ยนแปลง (Unconsistent)

ดังนั้นการทดสอบโดยทั่วไปจะเป็นไปตาม $\hat{q}_1 = \hat{\beta}_{\text{GLS}} - \tilde{\beta}_{\text{Within}}$ ซึ่ง $\operatorname{plim} \hat{q}_1 = 0$ ถ้า $\operatorname{cov}\left(\hat{q}_1, \hat{\beta}_{\text{GLS}}\right) = 0$

โดยที่
$$\hat{\beta}_{\text{GLS}} - \beta = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}u$$
$$\tilde{\beta}_{\text{Within}} - \beta = \left(X'QX\right)^{-1} X'Qu$$

จะได้ค่า $E\left(\hat{q}_1\right) = 0$ และ

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}, \hat{q}_1\right) &= \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}\right) - \operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}, \tilde{\beta}_{\text{Within}}\right) \\
&= \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} - \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}E\left(uu'\right)QX\left(X'QX\right)^{-1} \qquad (3.104) \\
&= \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} - \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} = 0
\end{aligned}$$

จาก $\tilde{\beta}_{\text{Within}} = \hat{\beta}_{\text{GLS}} - \hat{q}_1$ และ $\operatorname{var}\left(\tilde{\beta}_{\text{Within}}\right) = \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}\right) + \operatorname{var}\left(\hat{q}_1\right)$ ที่ค่า $\operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}, \hat{q}_1\right) = 0$ จะได้

$$\operatorname{var}\left(\hat{q}_1\right) = \operatorname{var}\left(\tilde{\beta}_{\text{Within}}\right) - \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}\right) = \sigma_v^2\left(X'QX\right)^{-1} - \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} \qquad (3.105)$$

ดังนั้นค่าสถิติการทดสอบ Hausman คือ

$$m_1 = \hat{q}_1'\left[\operatorname{var}\left(\hat{q}_1\right)\right]^{-1}\hat{q}_1 \qquad (3.106)$$

ถ้าผลการทดสอบยอมรับสมมติฐานหลักแสดงว่าควรทำการประมาณค่าแบบจำลองโดยใช้ Random effects แต่ถ้าปฏิเสธสมมติฐานหลักแสดงว่าควรใช้ Fixed effects

3. วิธีการทดสอบแบบ Redundant fixed effects

Moulton and Randolph (1989) ได้เสนอว่า Anova F-test ที่ใช้ทดสอบ Fixed Effects เหมาะสำหรับทดสอบแบบจำลอง One-way Error Component โดยมีสมมติฐานหลักในการทดสอบคือ

$$H_0^a : \sigma_\mu^2 = 0$$

ดังนั้นสมการในรูปทั่วไปคือ

$$F = \frac{y'MD\left(D'MD\right) - D'My / \left(p-r\right)}{y'Gy / \left[NT - \left(\tilde{k} + p - r\right)\right]} \tag{3.107}$$

ภายใต้สมมติฐานหลักที่มีการกระจายตัวแบบ F-distribution มีระดับความเป็นอิสระ $p-r$ และ $NT - \left(\tilde{k} + p - r\right)$ และ $D = I_N \otimes \iota_T$, $M = \bar{P}_Z$, $\tilde{k} = K'$, $p = N$, $r = K' + N - \mathrm{rank}\left(Z, D\right)$ และ $G = \bar{P}_{(Z,D)}$ โดยที่ $\bar{P}_Z = I - P_Z$ และ $P_Z = Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'$

การทดสอบ One-side likelihood ration (LR) จะมีการทดสอบดังนี้

$$LR = -2\log\frac{l\left(res\right)}{l\left(unres\right)} \tag{3.108}$$

โดยที่ $l\left(res\right)$ คือ ค่า Maximum likelihood ที่มีข้อจำกัด และ $l\left(unres\right)$ คือค่า Maximum likelihood ที่ไม่มีข้อจำกัด ภายใต้สมมติฐานหลักที่ทำการทดสอบ LR test มีการกระจายตัวแบบ Asymptotic distribution

3.2.5 การประมาณแบบจำลองพาแนล (Panel estimation)

1. วิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square: OLS)

เป็นการประมาณค่าเส้นถดถอยที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธี OLS โดยการทำให้ผลบวกของกำลังสองของค่าความคลาดเคลื่อน (Error term) มีค่าน้อยที่สุด จากสมการ OLS

$$\hat{\beta}_{OLS} = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it} - \bar{X}_i\right)^2\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{it} - \bar{X}_i\right)\left(Y_{it} - \bar{Y}_i\right) \tag{3.109}$$

โดยที่	i	คือ	ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1,\ldots,N$
	t	คือ	ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1,\ldots,T$
	Y_{it}	คือ	ตัวแปรตาม
	X_{it}	คือ	ตัวแปรอธิบาย
	$\bar{Y}_{it}$	คือ	ค่าเฉลี่ยของ Y_{it}
	$\bar{X}_i$	คือ	ค่าเฉลี่ยของ X_{it}

3.2.6 การทดสอบพาเนลโคอินทิเกรชัน (Panel cointegration test)

เป็นการทดสอบหาความสัมพันธ์ในระยะยาวของตัวแปรของตัวอธิบายและตัวแปรตาม โดยการทดสอบที่ใช้มีทั้งหมด 3 วิธีดังนี้

1. การทดสอบพาเนลโคอินทิเกรชันแบบ Residual-Based DF and ADF หรือการทดสอบพาแนบโคอินทิเกรชันแบบ Kao (Kao test)

จากสมการถดถอยแบบพาแนล

$$y_{it} = x'_{it}\beta + z'_{it}\gamma + e_{it} \tag{3.110}$$

โดยที่ y_{it} และ x_{it} เป็น $I(1)$ และ $z_{it} = \{\mu_i\}$ การทดสอบแบบ DF-type สามารถคำนวณได้จากส่วนที่เหลือของ Fixed effects

$$\hat{e}_{it} = \rho\hat{e}_{it-1} + v_{it} \tag{3.111}$$

โดยที่ $\hat{e}_{it} = \tilde{y}_{it} - \tilde{x}_{it}\hat{\beta}$ และ $\tilde{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$ ในการทดสอบนี้ใช้วิธีประมาณค่าด้วย OLS ประมาณค่าสัมประสิทธิ์ ρ และ t-statistic จากสมการ

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}\hat{e}_{it}\hat{e}_{it-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}\hat{e}_{it}^2} \tag{3.112}$$

และ

$$t_\rho = \frac{(\hat{\rho}-1)\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}e_{it-1}^2}}{s_e} \tag{3.113}$$

ซึ่ง $s_e^2 = \frac{1}{NT}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}\left(\hat{e}_{it} - \hat{\rho}\hat{e}_{it-1}\right)^2$

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบแบบ DF มีทั้งหมด 4 แบบ โดยสมมติฐานหลักของการทดสอบคือ $H_0 : \rho = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

$$DF_\rho = \frac{\sqrt{N}T(\hat{\rho}-1) + 3\sqrt{N}}{\sqrt{10.2}} \tag{3.114}$$

$$DF_t = \sqrt{1.25}t_\rho + \sqrt{1.875N} \tag{3.115}$$

$$DF_\rho^* = \frac{\sqrt{N}T(\hat{\rho}-1) + \frac{3\sqrt{N}\hat{\rho}_v^2}{\hat{\rho}_{0v}^2}}{\sqrt{3 + \frac{36\hat{\rho}_v^4}{\hat{\rho}_{0v}^4}}} \tag{3.116}$$

$$DF_t^* = \frac{t_\rho + \dfrac{\sqrt{6N}\hat{\sigma}_v}{2\hat{\sigma}_{0v}}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}_{0v}^2}{2\sigma_v^2} + \dfrac{3\hat{\sigma}_v^2}{10\sigma_{0v}^2}}} \qquad (3.117)$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_v^2 = \hat{\Sigma}_{yy} - \hat{\Sigma}_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}$ และ $\sigma_{0v}^2 = \hat{\Omega}_{yy} - \hat{\Omega}_{yx}\hat{\Omega}_{xx}^{-1}$

ซึ่งค่าสถิติ DF_ρ, DF_t พิจารณาจากความสัมพันธ์จากภายนอกของตัวถดถอยกับค่าความคลาดเคลื่อนและค่าสถิติ DF_ρ^*, DF_t^* พิจารณาจากความสัมพันธ์ภายในของตัวถดถอยกับค่าความคลาดเคลื่อน สำหรับค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบแบบ ADF สามารถประมาณค่าได้จากการถดถอยดังนี้

$$\hat{e}_{it} = \rho\hat{e}_{it-1} + \sum_{j=1}^{p}\vartheta_j\Delta\hat{e}_{it-j} + v_{itp} \qquad (3.118)$$

ดังนั้นค่าสถิติ ADF คือ

$$ADF = \frac{t_{ADF} + \dfrac{\sqrt{6N}\hat{\sigma}_v}{2\hat{\sigma}_{0v}}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}_{0v}^2}{2\hat{\sigma}_v^2} + \dfrac{3\hat{\sigma}_v^2}{10\hat{\sigma}_{0v}^2}}} \qquad (3.119)$$

โดยที่ t_{ADF} คือ t-statistic ของ ρ จากสมการ $\hat{e}_{it} = \rho\hat{e}_{it-1} + \sum_{j=1}^{p}\vartheta_j\Delta\hat{e}_{it-j} + v_{itp}$ โดยสมมติฐานหลักของการทดสอบคือ $H_0 : \rho = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

2. การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Pedroni (Engle-Granger based)

การทดสอบโคอินทิเกรชันของ Engle-Granger จะทำการทดสอบจากส่วนที่เหลือ (Residual) ถ้าตัวแปรมีโคอินทิเกรชัน ส่วนที่เหลือที่ได้จะเป็น $I(0)$ แต่ถ้าตัวแปรไม่มีโคอินทิเกรชัน ส่วนที่เหลือที่ได้จะเป็น $I(1)$ Pedroni เสนอวิธีการทดสอบโคอินทิเกรชันที่สมมติให้ค่าคงที่ (Intercept) และค่าแนวโน้ม (Trend) มีความแตกต่างกันระหว่างข้อมูลแต่ละหน่วย จากสมการ

$$y_{it} = \alpha_i + \delta_i t + \beta_{1i}x_{1i,t} + \beta_{2i}x_{2i,t} + \ldots + \beta_{Mi}x_{Mi,t} + e_{i,t} \qquad (3.120)$$

โดยที่ $t = 1,\ldots,T, i = 1,\ldots,N, m = 1,\ldots M$ และกำหนดให้ x, y นิ่งที่ $I(1)$, ค่า α_i, δ_i คือค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้ม (Intercept and Trend) ตามลำดับ เมื่อถดถอย

สมการ (124) จะได้ส่วนที่เหลือ (Residual) จากนั้นทำการทดสอบส่วนที่เหลือดังกล่าวว่าเป็น $I(1)$ โดยการถดถอยจากสมการ

$$e_{it} = \rho_i e_{it-1} + u_{it} \qquad (3.121)$$

หรือ

$$e_{it} = \rho_i e_{it-1} + \sum_{j=1}^{p_i} \psi_{it} \Delta e_{it-j} + \upsilon_{it} \qquad (3.122)$$

ซึ่งในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง มีการแบ่งสมมติฐานทางรอง (Alternative hypothesis) ออกเป็น 2 อย่างคือ

กรณีที่ข้อมูลภาคตัดขวางทุกหน่วยมีลักษณะเหมือนกัน (Homogeneous)

$H_0 : \rho_i = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

$H_a : (\rho_i = \rho) < 1$ (มีโคอินทิเกรชัน)

กรณีที่ข้อมูลภาคตัดขวางแต่ละหน่วยมีลักษณะแตกต่างกัน (Heterogeneous)

$H_0 : \rho_i = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

$H_a : \rho_i < 1$ (มีโคอินทิเกรชัน)

โดยค่าสถิติในการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน $\aleph_{N,T}$ คำนวณจากส่วนที่เหลือในสมการ (125) และ (126) Pedroni แสดงให้เห็นว่าค่าสถิติมีการแจกแจงแบบ Asymptotically ดังนี้

$$\frac{\aleph_{N,T} - \mu\sqrt{N}}{\sqrt{\upsilon}} \Rightarrow N(0,1) \qquad (3.123)$$

โดยที่ μ และ υ คือ Adjustment term ที่สร้างโดย Monte Carlo

3. การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Fisher (Fisher test)

ได้อ้างอิงแนวคิดการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Johansen ซึ่ง Fisher (1932) ได้เสนอการทดสอบที่รวบรวมการทดสอบแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) ต่อมา Maddala and Wu (1999) ได้พัฒนาการทดสอบของ Fisher (1932) ในการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน โดยการรวบรวมการทดสอบข้อมูลแต่ละหน่วยภาคตัดขวางเพื่อให้ได้การทดสอบทางสถิติแบบกลุ่ม (Full panel)

$$2\sum_{i=1}^{N}\log(\pi_i) \rightarrow \chi^2_{2n} \tag{3.124}$$

โดยที่ π_i คือ $p-value$ จากการทดสอบโคอินทิเกรชันแต่ละตัว สำหรับข้อมูลตัดขวาง i ภายใต้สมมติฐานหลักการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน

3.2.7 การหาความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะสั้น (Error correction mechanism: ECM)

การทดสอบ ECM เป็นการทดสอบที่ใช้อย่างแพร่หลายในการวิเคราะห์ความผันผวนในระยะสั้น เมื่อตัวแปรมีลักษณะไม่นิ่ง และไม่มีปัญหาความสัมพันธ์ไม่แท้จริง (Spurious Regression) ซึ่งสามารถเขียนแบบจำลอง ECM โดยทั่วไปได้ดังนี้

$$\Delta Y_{it} = \alpha_1 + \alpha_2 u_{it-1} + \alpha_3 \Delta X_{it} + \alpha_4 \sum_{h=1}^{p} \Delta X_{it-h} + \alpha_5 \sum_{j=0}^{q} \Delta Y_{it-j} + \varepsilon_{it} \tag{3.125}$$

โดยที่	Δ	คือ	ผลต่างระดับที่ 1 (1^{st} Difference)
	ε_{it}	คือ	ตัวแปรความคลาดเคลื่อนแบบสุ่ม
$u_{it-1} = (Y_{it-1} - \beta_1 - \beta_2 X_{it-1})$		คือ	ตัวแปรความคลาดเคลื่อนของการถดถอยหนึ่งช่วงเวลาของ Panel cointegrating

จากสมการ (3.125) ΔY ขึ้นอยู่กับ ΔX และค่าความคลาดเคลื่อนดุลยภาพ ถ้าค่าความคลาดเคลื่อนดุลยภาพไม่เท่ากับศูนย์แบบจำลองก็จะออกจากดุลยภาพ ถ้าสมมติให้ ΔY เท่ากับศูนย์ และ u_{it-1} มีค่าเป็นบวก หมายความว่า Y_{it-1} จะมีค่ามากกว่าดุลยภาพ หลังจากนั้นถ้า α_2 มีค่าเป็นลบทำให้ตัวแปร $\alpha_2 u_{it-1}$ มีค่าเป็นลบด้วย จึงทำให้ ΔY_{it} มีค่าลดลงเพื่อกลับเข้าสู่ดุลยภาพ

ดังนั้นถ้า Y_{it} มีค่าสูงกว่าจุดดุลยภาพ ค่าความคลาดเคลื่อนก็จะถูกขจัดออกไปเพื่อให้ Y_{it} กลับเข้าสู่ดุลยภาพในระยะยาวต่อไป (ขจรพรรณ วณิชมหานนท์, 2553)

3.2.8 การทดสอบความเป็นเหตุเป็นผล (Granger causality test)

การทดสอบความเป็นเหตุเป็นผลเป็นการทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรโดยแสดงให้เห็นถึงลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรว่าตัวแปรใด คือ ตัวแปรสาเหตุ และตัวแปรใด คือ ผลจากสาเหตุ โดยใช้วิธี Granger's causality Test ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอน (Mehrara and Musai., 2011) ได้แก่

ขั้นที่ 1 ประมาณค่าส่วนที่เหลือจากการหาความสัมพันธ์ระยะยาว (cointegrated Model) โดยสมมติให้ ECT_{it} คือ ค่าส่วนที่เหลือจากการประมาณค่าแบบจำลองการหาความสัมพันธ์ระยะยาว

ขั้นที่ 2 ประมาณการแบบจำลอง Granger Causality Model ดังต่อไปนี้

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{J} \delta_i^j \Delta y_{it-j} + \sum_{j=1}^{J} \beta_i^j \Delta x_{it-j} + \lambda_{it} ECT_{it-1} + \varepsilon_{yit} \tag{3.126}$$

$$\Delta x_{it} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{J} \delta_i^j \Delta x_{it-j} + \sum_{j=1}^{J} \beta_i^j \Delta y_{it-j} + \lambda_{it} ECT_{it-1} + \varepsilon_{xit} \tag{3.127}$$

โดยที่ Δ คือ ผลต่างระดับที่ 1 (1st Difference)

ECT คือ Error Correction term ที่ได้จากการประมาณค่าแบบจำลองความสัมพันธ์ระยะยาว

λ_{it} คือ Adjust Coefficients

ε_{it} คือ ค่าความคลาด

สมมติฐานในการทดสอบ คือ สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร ΔX_{it-j} และ ΔY_{it-j} มีค่าต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญ โดยใช้ค่า F -statistic ในการตัดสินใจหรือ พิจารณาสัมประสิทธิ์หน้า Error Correction Term (λ_{it}) ซึ่งการมีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงถึงการมีความสัมพันธ์เชิงเหตุในระยะยาว

3.3 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยต่างๆ ในอดีตต่างก็ค้นพบถึงความสัมพันธ์ระหว่างสาธารณูปโภคประเภทต่างๆ ซึ่งรวมถึงการคมนาคมขนส่งต่างๆกับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ แต่แตกต่างกันไปในเรื่องของขนาดและทิศทางของความสัมพันธ์

Bose and Haque (2005) ศึกษากลุ่มตัวอย่างของกลุ่มประเทศกำลังพัฒนาในช่วงระหว่างปี ค.ศ. 1970 ถึง 1989 ด้วยวิธีการทดสอบความเป็นเหตุเป็นผลของแกรงเกอร์ (Granger causality) เป็นวิธีทดสอบหลักและยืนยันผลการทดสอบโดยใช้วิธีการทดสอบความเป็นเหตุเป็นผลแบบทางเลือกของ Sim(1972) และ Geweke(1983) พบว่ามีความสัมพันธ์ระหว่างการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและการลงทุนด้านสาธารณะภาคการขนส่งและการสื่อสาร โดยมีทิศทางจากการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจไปหาการลงทุนด้านสาธารณะภาคการขนส่งและการสื่อสารเพียงทิศทาง

เดียว ไม่พบความสัมพันธ์จากการลงทุนด้านสาธารณะภาคการขนส่งและการสื่อสารมาหาการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ

Boonpen (2006) ศึกษากลุ่มประเทศในเขตซับซาฮารา ทวีปแอฟริกา และประเทศที่มีลักษณะเป็นเกาะขนาดเล็กโดยมุ่งเน้นศึกษาประเทศที่กำลังพัฒนาด้วยวิธีประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยที่สุด(Ordinary Least Square: OLS) การถดถอยข้อมูลพาเนลเชิงพลวัตร(Dynamic Panel Data Regression) และวิธี Generalised Methods of Moments (GMM)โดยใช้ข้อมูลพาเนลในช่วงระหว่างปี ค.ศ. 1990-2000 พบว่าเงินลงทุนด้านการขนส่งถือเป็นปัจจัยที่สำคัญอย่างยิ่งในการพัฒนาประเทศรวมถึงอาจจะเป็นการลงทุนที่มีประสิทธิภาพมากกว่าการลงทุนทั้งหมด อีกทั้งอาจจะมีผลแบบทิ้งช่วงเวลาของการลงทุนที่ส่งผลไปถึงระดับศักยภาพสูงสุดด้านผลผลิต (lagged effect for investment to fully reach its potential on output)

Eddington (2006) ศึกษาระบบขนส่งของสหราชอาณาจักรโดยการรวบรวมฐานข้อมูลจากนโยบายและโครงการต่างๆราว 200 โครงการจากทั่วประเทศ ด้วยวิธีอัตราผลตอบแทนต่อทุนแบบทั่วไป(Conventional Cost-Benefit Ratio) ผลิตภัณฑ์มวลรวมในประเทศต่อปอนด์ (GDP per pound) อัตราผลตอบแทนต่อทุนแบบกว้าง (Wider Cost-Benefit Ratio) การประเมินความคุ้มค่า (Value for Money) พบความสำคัญของระบบขนส่งต่างๆดังนี้ ระบบขนส่งที่มีประสิทธิภาพสูงนั้นสำคัญต่อความเจริญทางเศรษฐกิจที่ยั่งยืน การขนส่งนั้นไม่สามารถสร้างการเจริญเติบโตได้ด้วยตัวเองแต่จะช่วยพัฒนาประสิทธิภาพร่วมกับปัจจัยอื่นๆที่มีความพร้อม การประหยัดเวลาในการขนส่งช่วยเพิ่มประสิทธิภาพของภาคธุรกิจ การขนส่งมีส่วนกระตุ้นให้เกิดการลงทุนและสร้างนวัตกรรมโดยการช่วยให้เกิดการประหยัดต่อขนาดและแนวทางการทำงานรูปแบบใหม่(New ways of working) การขนส่งช่วยให้เกิดการประหยัดจากการอยู่รวมกัน(Agglomeration economies) ซึ่งทำให้ภาคธุรกิจใกล้กันมากขึ้นทั้งในด้านพื้นที่และเวลา การขนส่งช่วยพัฒนาประสิทธิภาพของตลาดแรงงานโดยเพิ่มการเข้าถึงอุปทานแรงงานที่ใหญ่ขึ้นและกว้างขึ้น การขนส่งช่วยก่อให้เกิดการแข่งขันโดยการเพิ่มการเข้าถึงตลาดใหม่ๆ การขนส่งช่วยสงเสริมการค้าทั้งภายในและระหว่างประเทศจากการลดต้นทุนการค้า การขนส่งช่วยส่งเสริมกิจกรรมการเคลื่อนย้ายในระดับโลกโดยการจัดหาบรรยากาศธุรกิจที่น่าสนใจ

Worku (2004) ศึกษาผลของเครือข่ายถนนที่มีต่อการเจริญเติบโตในเอธิโอเปีย โดยใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาในช่วงระหว่างปี ค.ศ. 1971 ถึง 2009 ด้วยวิธี two-step GMM และวิธีการทดสอบความเป็นเหตุเป็นผลของแกรงเกอร์ (Granger causality) พบว่าเครือข่ายถนนต่อแรงงานมีผลดีต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและการตัดถนนราดยางมะตอยมีผลต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ

ในภาพรวม แม้ว่าจะมีผลดีน้อยกว่าในการเจริญเติบโตของผลผลิตมวลรวมด้านการเกษตรก็ตาม อีกทั้งยังพบผลบวกที่ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติของถนนลูกรังที่มีต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ

Esfahani and Ramírez (2003) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสาธารณูปโภคพื้นฐานกับผลิตภัณฑ์มวลรวมในประเทศโดยใช้ข้อมูลพาเนลของประเทศต่างๆ 75 ประเทศในช่วงระหว่างปี ค.ศ. 1965 ถึง 1995 ด้วยวิธีตัวแปรเครื่องมือและการวิเคราะห์แบบถดถอยสองขั้น(Instrumental Variable/Two-stage Least Square; IV/2SLS) พบว่าสาธารณูปโภคมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ แต่อย่างไรก็ตามผลกระทบที่มีต่อการเจริญเติบโตนั้นก็ขึ้นอยู่กับสถาบันและลักษณะทางเศรษฐกิจ โดยเฉพาะอย่างยิ่งความสามารถขององค์กรที่ทำให้รัฐบาลดูน่าเชื่อถือและเพิ่มประสิทธิภาพให้กับนโยบายของรัฐที่มีบทบาทสำคัญในกระบวนการพัฒนาผ่านการเจริญเติบโตของสาธารณูปโภคพื้นฐานดังนั้นประเทศต่างๆสามารถได้รับผลประโยชน์มหาศาลจากการพัฒนาการลงทุนและสมรรถนะภาคสาธารณูปโภคพื้นฐาน

Wang (2009) ศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างการขนส่งและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจในมณฑลซินเจียง สาธารณรัฐประชาชนจีนโดยใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาจากปี ค.ศ.1993 ถึง 2007 ด้วยวิธี Grey Correlation Analysis พบว่ามีความสัมพันธ์กันในสองทิศทาง อีกทั้งยังพบว่าการขนส่งช่วยส่งเสริมกระบวนการการทำให้เป็นเมือง (urbanization) ช่วยลดช่องว่างระหว่างคนรวยกับคนจน และเพิ่มการจ้างงานในระดับท้องถิ่น