บทที่ 3

กรอบแนวคิดทางทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

3.1 แนวคิดและทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์มหภาค: ทฤษฎีการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ (Economic growth theory)

แนวคิดเกี่ยวกับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของนักเศรษฐศาสตร์มีความแตกต่างกันออกไปตามพื้นฐานการวิเคราะห์ เช่น แบบจำแบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Solow (The Solow growth model), แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Ramsey (The Ramsey growth model) และแบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายใน (Endogenous growth model)

3.1.1 แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Solow (The Solow growth model): แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจที่กำหนดการออมจากภายนอก

แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Solow มีจุดกำเนิดจากการเสนอแบบจำลองของ Robert Solow และ Trevor Swan ในปี 1956 โดยใช้แนวคิดเรื่องสมการการผลิตที่มีผลตอบแทนต่อขนาดคงที่ (Constant returns to scale) ผลตอบแทนต่อการใช้ปัจจัยการผลิตมีลักษณะลดน้อยถอยลง (Diminishing returns to each input) และปัจจัยการผลิตสามารถทดแทนกันได้อย่างต่อเนื่องตามสมมติฐานของนักเศรษฐศาสตร์สำนักนีโอคลาสสิก ในแบบจำลองนี้ Solow แสดงให้เห็นว่าการเจริญเติบโตในทุน (Capital) แรงงาน (Labour) และความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีส่งผลอย่างไรต่อผลผลิต

แบบจำลองนี้กำหนดให้เป็นเศรษฐกิจแบบกระจายอำนาจ (Decentralization economy) โดยสมมติให้ระบบเศรษฐกิจเป็นแบบปิดไม่มีภาครัฐบาล หน่วยเศรษฐกิจประกอบด้วยภาคครัวเรือนและภาคธุรกิจ สินค้ามีเพียงชนิดเดียวที่สามารถนำไปบริโภค (Consumption: $C(t)$) และลงทุน (Investment: $I(t)$)

$$Y(t) = C(t) + I(t) = C(t) + S(t) \tag{3.1}$$

โดยที่ $Y(t)$ คือ ผลผลิตทั้งหมดที่ผลิตได้ ณ เวลา t

$C(t)$ คือ การบริโภคของครัวเรือน ณ เวลา t

$I(t)$ คือ การลงทุนของครัวเรือน ณ เวลา t

$S(t)$ คือ การออมองครัวเรือน ณ เวลา t

กำหนดให้การออม $S(t)$ เป็นส่วนหนึ่งของผลผลิตที่ถูกเก็บไว้เพื่อออม และอัตราการออมถูกกำหนดจากภายนอก และ $0 \le s \le 1$

$$S(t) = sY(t) \tag{3.2}$$

จากระบบเศรษฐกิจแบบปิด ที่มีส่วนที่รั่วไหลคือการออม และส่วนที่อัดฉีดคือการลงทุน ดังนั้นในภาวะดุลยภาพส่วนที่รั่วไหลเท่ากับส่วนที่อัดฉีดคือ การออมเท่ากับการลงทุน

$$I(t) = sY(t) \tag{3.3}$$

นอกจากนี้ทุนมีการเสื่อมสภาพที่อัตราคงที่ คือ $0 < \delta < 1$ คือ สินค้าทุนบางส่วนจะเสื่อมสภาพไป ดังนั้นการเพิ่มขึ้นสุทธิของสินค้าทุนจะเท่ากับ

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = sF\left(K(t), L(t)\right) - \delta K(t) \tag{3.4}$$

โดยที่ $\dot{K}(t) = \dfrac{dK(t)}{dt}$ คือ การเพิ่มขึ้นสุทธิของสินค้าทุน ณ เวลา t

$K(t)$ คือ สินค้าทุน ณ เวลา t

δ คือ อัตราการเสื่อมสภาพของสินค้าทุน

นอกจากนี้จำนวนประชากรมีการเพิ่มขึ้นในอัตราคงที่ $\dfrac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \;\; \ge 0$ คือ

$$L(t) = e^{nt}$$

ฟังก์ชั่นการผลิตของ Solow คือ

$$Y(t) = F\left(K(t), L(t)\right)$$

โดยที่ $Y(t)$ คือ จำนวนสินค้าและปริมาณที่ผลิตได้ทั้งหมด

$K(t)$ คือ ทุน (Capital)

$L(t)$ คือ แรงงาน (Labour)

สำหรับแบบจำลองของ Solow กำหนดให้ฟังก์ชันการผลิตมีลักษณะตามนีโอคลาสสิกที่สำคัญ 4 ประการ คือ

1. การลดน้อยถอยลงของผลผลิตส่วนเพิ่ม (Positive and diminishing marginal products)

$$F_K\left[K(t),L(t),A(t)\right]\equiv\frac{\partial F\left[K(t),L(t)\right]}{\partial K(t)}>0$$

$$F_{KK}\left[K(t),L(t),A(t)\right]\equiv\frac{\partial^2 F\left[K(t),L(t)\right]}{\partial K(t)^2}<0$$

$$F_L\left[K(t),L(t),A(t)\right]\equiv\frac{\partial F\left[K(t),L(t)\right]}{\partial L(t)}>0$$

$$F_{LL}\left[K(t),L(t),A(t)\right]\equiv\frac{\partial^2 F\left[K(t),L(t)\right]}{\partial L(t)^2}<0$$

2. ผลได้ต่อขนาดคงที่ (Constant return to scale)

$$Y\left[\lambda K(t),\lambda L(t)\right]=\lambda F\left[K(t),L(t)\right] \qquad ;\forall\lambda>0$$

3. Inada conditions คือผลผลิตส่วนเพิ่มของปัจจัยแรงงานหรือทุนจะเข้าใกล้ระยะอนันต์ (Infinity) ถ้าแรงงานหรือทุนเข้าใกล้ศูนย์ และผลผลิตส่วนเพิ่มของปัจจัยแรงงานหรือทุนจะเข้าใกล้ศูนย์ ถ้าแรงงานหรือทุนเข้าใกล้อนันต์ (Infinity)

$$\lim_{K\to\infty}F_K\left[K(t),L(t)\right]=0, \qquad \lim_{L\to\infty}F_L\left[K(t),L(t)\right]=0$$

$$\lim_{K\to 0}F_K\left[K(t),L(t)\right]=\infty, \qquad \lim_{L\to\infty}F_L\left[K(t),L(t)\right]=\infty$$

4. ปัจจัยแรงงาน (L) หรือทุน (K) มีความจำเป็นในกระบวนการผลิต

$$Y(t)=F\left[0,L(t)\right]=F\left[K(t),0\right]=f(0)=0$$

จากคุณสมบัติผลได้ต่อขนาดคงที่ นำ $1/L(t)$ คูณฟังก์ชั่นการผลิตทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{Y(t)}{L(t)}=\frac{F\left[K(t),L(t)\right]}{L(t)}=L(t)\cdot\left[\frac{K(t)}{L(t)},1\right]=L(t)\cdot f(k)$$

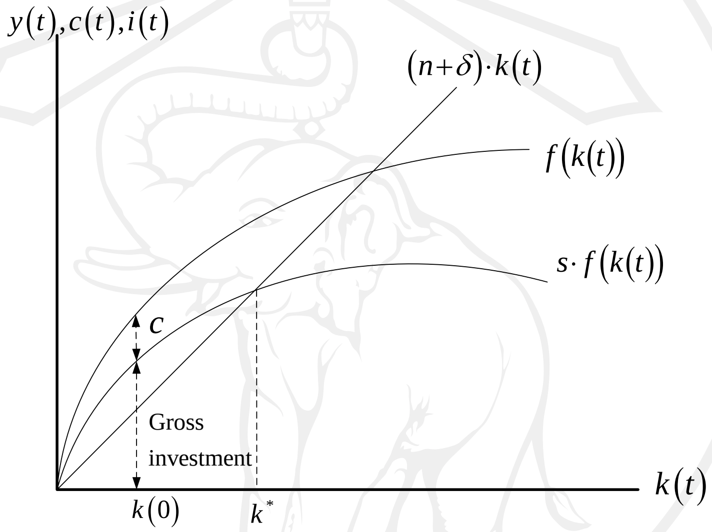
โดยที่ $k(t)=K(t)/L(t)$ คือ ทุนต่อประชากร

$y(t)=Y(t)/L(t)$ คือ ผลผลิตต่อประชากร

ทำการ Differentiate $Y(t)=L(t)\cdot f(k)$ เทียบกับปัจจัยการผลิตทุนและแรงงานจะได้ผลผลิตส่วนเพิ่มของทุนและแรงงาน

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)}=f'(k) \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial L(t)}=f(k)-k\cdot f'(k) \tag{3.6}$$



รูปที่ 3.1 แสดงการกำหนดทุนต่อประชากรในสภาวะหยุดนิ่ง (Steady-State) ของ Solow

จากรูปที่ 3.1 แสดงการบริโภคของบุคคลจะเท่ากับระยะห่างระหว่างเส้นฟังก์ชั่นการผลิต $f(k(t))$ และเส้นสัดส่วนการลงทุนต่อฟังก์ชั่นการผลิต $s(t)\cdot f(k(t))$ โดยที่ค่าเสื่อมที่แท้จริงคือ $(n+\delta)k(t)$ ดังนั้นระดับ Steady state ของทุนคือจุดที่เส้น $s(t)\cdot f(k(t))$ ตัดกับเส้น $(n+\delta)k(t)$ (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

แบบจำลองการเจริญเติบโตของ Solow กำหนดให้ครัวเรือนเป็นเจ้าของปัจจัยการผลิตได้รับผลตอบแทนคืออัตราผลตอบแทนจากสินทรัพย์ $r(t)$ และอัตราค่าจ้าง $w(t)$ ดังนั้นรายได้รวมของครัวเรือนคือ $r(t)\cdot(\text{assets})/dt=\left[r(t)\cdot(\text{assets})+w(t)\cdot L(t)\right]-C(t)$ และครัวเรือนจะทำการสะสมสินทรัพย์

$$\dot{a}(t)=\left[r(t)\cdot a(t)+w(t)\right]-c(t)-na(t) \tag{3.7}$$

ให้ $R(t)$ คือค่าเช่า และทุนมีค่าเสื่อมที่อัตราคงที่ ดังนั้นอัตราสุทธิผลตอบแทนของทุนคือ ดังนั้น $R(t)=r(t)+\delta$ หรือ $r(t)=R(t)-\delta$ ธุรกิจจะทำกำไรสูงสุด

$$\pi = F\left[K(t), L(t), A(t)\right] - \left[r(t) + \delta\right] \cdot K(t) - w(t)L(t) \tag{3.8}$$

กำไรของธุรกิจในรูปต่อประชากร

$$\pi = L(t) \cdot \left[f\left(k(t)\right) - \left(r(t) + \delta\right) \cdot k(t) - w(t) \right] \tag{3.9}$$

ที่ตลาดแข่งขันสมบูรณ์กำไรจะเท่ากับศูนย์ ดังนั้นแล้วธุรกิจจะเลือกสัดส่วนของทุนต่อแรงงานที่ผลผลิตส่วนเพิ่มของทุนเท่ากับค่าเช่าและผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงานเท่ากับอัตราค่าจ้าง

$$f'\left(k(t)\right) = r(t) + \delta \tag{3.10}$$

$$\left[f\left(k(t)\right) - k(t) \cdot f'\left(k(t)\right) \right] = w(t) \tag{3.11}$$

เนื่องจากในระบบเศรษฐกิจแบบปิดไม่มีการกู้ยืม ดุลยภาพตามแบบจำลองการเจริญเติบโตของ Solow สินทรัพย์จะเท่ากับทุน $\left[a(t) = k(t)\right]$ แทนค่าสมการ (3.10) และ (3.11) ในสมการ (3.7)

$$\dot{k}(t) = f\left(k(t)\right) - c(t) - (n + \delta) \cdot k(t)$$

ครัวเรือนบริโภคที่สัดส่วนของรายได้เท่ากับ $c(t) = \left[1 - s(t)\right] \cdot f\left(k(t)\right)$ จะได้สมการการเปลี่ยนแปลงของทุนดังนี้

$$\dot{k}(t) = s \cdot f\left(k(t)\right) - (n + \delta) \cdot k(t) \tag{3.12}$$

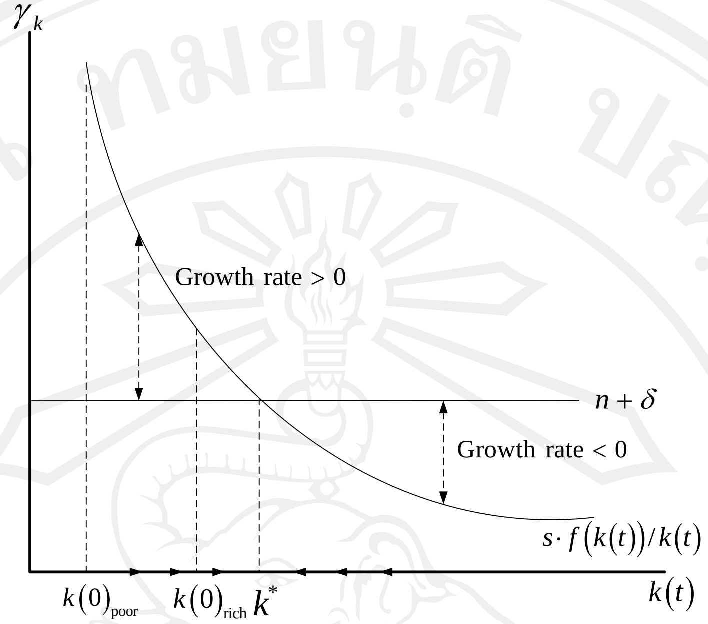
ที่ Steady state ของแบบจำลอง Solow คือ ทุนมีค่าคงที่ $\dot{k}(t) = 0$ ในสมการ (3.12) $y(t)$ และ $c(t)$ มีค่าคงที่เท่ากับ $y^* = f\left(k^*\right)$ และ $c^* = (1 - s) \cdot f\left(k^*\right)$ หรือที่จุดตัดของเส้น $s \cdot f\left(k(t)\right)$ และเส้น $(n + \delta)k(t)$ ในรูปที่3

แทนค่า $k(t) = k^*$

$$s \cdot f'\left(k^*\right) = (n + \delta)k^*$$

ดังนั้นอัตราการเจริญเติบโตในระยะยาวของแบบจำลอง Solow ที่ Steady state จะไม่ขึ้นอยู่กับอัตราการออม หรือระดับของเทคโนโลยี พิจารณาได้โดยหารสมการ (3.12) ด้วย $k(t)$ จะได้อัตราการเจริญเติบโตของ $k(t)$ หรือ $\left(\gamma_k\right)$

$$\gamma_k \equiv \dot{k}(t)/k(t) \equiv s \cdot f\left(k(t)\right)/k(t) - (n + \delta) \tag{3.13}$$



รูปที่ 3.2 แสดงพลวัต (Dynamic) ของแบบจำลอง Solow

รูปที่ 3.2 แสดงอัตราการเจริญเติบโตของ $k(t)$ คือจุดตัดระหว่างเส้นออม $s \cdot f(k(t))/k(t)$ และเส้นค่าเสื่อม $n+\delta$ ถ้า $k(t)<k^*$ อัตราการเจริญเติบโตของ $k(t)$ จะมีค่าเป็นบวกและเพิ่มเข้าสู่ k^* แต่ถ้า $k(t)>k^*$ อัตราการเจริญเติบโตของ $k(t)$ จะมีค่าเป็นลบและลดลงเข้าสู่ k^* ดังนั้น Steady state ของทุนต่อบุคคล k^* นั้นจะไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

จากสมมติฐานดังกล่าวข้างต้น นัยสำคัญเชิงนโยบายของตัวแบบการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Solow สามารถสรุปได้เป็นประเด็นสำคัญดังนี้ (พรรณี ญานะตื้อ, 2551)

1. การเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของแต่ละประเทศขึ้นอยู่กับการออมและการลงทุนในปัจจัยทุนเป็นสำคัญ ถ้าประเทศใดก็ตามมีการนำรายได้ของตนเองมาออมให้มากขึ้น แล้วนำเงินออมดังกล่าว มาใช้เพื่อลงทุนในโครงสร้างพื้นฐานทางเศรษฐกิจ ก็จะมีอัตราการเจริญเติบโตของเศรษฐกิจที่สูงกว่าประเทศที่มีการออมและการลงทุนต่ำ ดังนั้นประเทศที่ต้องการจะเพิ่มอัตราการขยายตัวทางเศรษฐกิจให้สูงขึ้น และปรับปรุงมาตรฐานความเป็นอยู่ของประชากรให้ดีขึ้นก็สามารถทำได้โดยการเพิ่มอัตราการออมและการลงทุนให้มากขึ้น

2. ตัวแบบของการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Solow ยังชี้ให้เห็นถึงความสามารถที่ประเทศยากจนจะสามารถตามทันประเทศที่ร่ำรวยได้ (Convergence of per capital income hypothesis) ซึ่งเป็นผลมาจากการลดน้อยถอยลงของผลผลิตส่วนเพิ่ม (Diminishing return) กล่าวคือ

ถึงแม้ประเทศที่มีการออมและการลงทุนสูง แต่อย่างไรก็ตามเมื่อมีการลงทุนเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ การเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจจะเริ่มถึงจุดจำกัด เนื่องจากทุกๆประเทศมีที่ดิน ทรัพยากรธรรมชาติตลอดจนแรงงานจำกัด ดังนั้นการเพิ่มการลงทุนมากขึ้น จะถึงจุดจำกัดทำให้ผลผลิตเพิ่มขึ้นได้น้อยและการเจริญเติบโตชะลอตัวในที่สุด ดังนั้นประเทศที่พัฒนาตามมาทีหลังและมีการออมการลงทุนที่สูงก็จะตามทัน โดยสามารถมีรายได้ประชาชาติเท่าเทียมกับประเทศที่พัฒนาแล้วในที่สุด

3.1.2 แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Ramsey (The Ramsey growth model): แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจที่ครัวเรือนมีการเลือกการบริโภคที่เหมาะสม

แบบจำลองของ Ramsey หรือ Ramsey-Cass-Koopmans model เป็นแบบจำลองตามแบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของนีโอคลาสสิกซึ่งมีการกำหนดการออมจากภายในและกำหนดการออมไม่คงที่ โดยที่ครัวเรือนจะแสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุดข้ามห้วงเวลา (Maximize intertemporal utility) ภายใต้ข้อจำกัดทางด้านงบประมาณ (Budget constraint) และหน่วยธุรกิจจะทำกำไรสูงสุด (Maximize profit) ภายใต้เงื่อนไขการสะสมปัจจัย แบบจำลองนี้สมมติให้ครัวเรือนมีการบริโภคและสะสมโดยครัวเรือนจะได้ผลตอบแทนเป็นสินทรัพย์ ที่ครัวเรือนมีการเจริญเติบโตที่อัตรา n โดยกำหนดให้เป็นเศรษฐกิจแบบกระจายอำนาจ (Decentralization economy)

อัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรถูกกำหนดจากภายนอกและมีค่าคงที่

$$L(t) = e^{nt}L(0) \tag{3.14}$$

ครัวเรือนจะแสวงหาอรรถประโยชน์สูงสุด จากการบริโภค $C(t)$

$$U(t) = \int_0^\infty u\left[c(t)\right]e^{-\rho t}e^{nt}dt \tag{3.15}$$

โดยที่	$c(t)$	คือ	การบริโภคของครัวเรือน ณ เวลา t
	ρ	คือ	อัตราคิดลด (Discount rate)
	n	คือ	อัตราการเจริญเติบโตของประชากร

ลักษณะฟังก์ชั่นความพอใจ (Utility function) ของ Ramsey มีลักษณะเป็นเป็นฟังก์ชั่นเพิ่ม คือ ถ้า $c(t)$ เพิ่มแล้ว $u(t)$ จะเพิ่มตาม และ Concave คือ $c(t)$ จะเพิ่มในอัตราที่ลดลง

$$u'\left[c(t)\right] > 0, \qquad u''\left[c(t)\right] < 0$$

จากเงื่อนไขของการแข่งขันสมบูรณ์ครัวเรือนจะไม่มีผลต่อการกำหนดราคาปัจจัยทำให้ ในตลาดแรงงานครัวเรือนขายปัจจัยแรงงานเท่ากับความต้องการแรงงานของตลาด

รายรับรวม = $w(t) + a(t)r(t)$

ข้อจำกัดงบประมาณของครัวเรือนต่อประชากรคือ

$$\dot{a}(t)=w(t)+r(t)a(t)-c(t)-na(t) \tag{3.16}$$

$$r(t)=R(t)-\delta \tag{3.17}$$

โดยที่ $\dot{a}(t)=\dfrac{da(t)}{dt}$ คือ สินทรัพย์ที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลง

$w(t)$ คือ ค่าจ้าง ณ เวลา t

$r(t)$ คือ อัตราดอกเบี้ยที่แท้จริง ณ เวลา t

$a(t)$ คือ สินทรัพย์สุทธิต่อบุคคล ณ เวลา t

δ คือ ค่าเสื่อมราคา

ครัวเรือนจะแสวงหาความพอใจสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดงบประมาณโดยการสร้างสมการ Present value Hamiltonian ดังนี้

$$H=u\left[c(t)\right]e^{-(\rho-n)t}+v(t)\left[w(t)+\left(r(t)-n\right)a(t)-c(t)\right] \tag{3.18}$$

โดยที่ $v(t)$ คือ มูลค่าปัจจุบันของราคาเงาของรายได้ในหน่วยความพอใจ

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)}=0 \quad \Rightarrow \quad v(t)=u'\left(c(t)\right)e^{-(\rho-n)t} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a(t)}=-\dot{v}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{v}(t)=-\left[r(t)-n\right]v(t) \tag{3.20}$$

โดยที่ Transversality condition คือ

$$\lim_{t\to\infty}\left[v(t)\cdot a(t)\right]=0 \tag{3.21}$$

แบบจำลองของ Ramsey มีการกำหนดให้หน่วยธุรกิจมีการผลิตสินค้าเพียงชนิดเดียว แต่ละหน่วยธุรกิจจะมีเทคโนโลยีการผลิต ซึ่งเป็นไปตามคุณสมบัติของนีโอคลาสสิก และให้ผลตอบแทนแรงงานและทุนเป็นค่าจ้าง $w(t)$ และดอกเบี้ย $r(t)$

ฟังก์ชั่นการผลิตของ Ramsey ที่มีความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีเพิ่มในแรงงาน คือ

$$Y(t)=F\left[K(t),L(t)\right] \tag{3.22}$$

โดยที่แต่ละหน่วยธุรกิจจะทำการเลือก ทุนและแรงงานที่ทำให้เกิดกำไรสูงสุด

$$\pi = \left[K(t), L(t)\right] - \left[r(t)+\delta\right]K(t) - w(t)L(t) \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K(t)} = 0 \qquad \Rightarrow \quad f'\left(k(t)\right) = r(t)+\delta \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K(t)} = 0 \qquad \Rightarrow \quad f\left(k(t)\right) - k(t)\,f'\left(k(t)\right) = w(t) \tag{3.25}$$

คือ ผลผลิตส่วนเพิ่มของทุนจะเท่ากับผลตอบแทนของทุน $R(t)$ ผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงานจะเท่ากับผลตอบแทนของแรงงาน $w(t)$

ดุลยภาพในแบบจำลองของ Ramsey ที่กำหนดพฤติกรรมการให้ครัวเรือนมีการแข่งขันสมบูรณ์ ที่อัตราดอกเบี้ย $r(t)$ และอัตราค่าจ้าง $w(t)$ สามารถรวมพฤติกรรมของครัวเรือนและหน่วยธุรกิจเพื่อจะวิเคราะห์โครงสร้างดุลยภาพในตลาดที่มีการแข่งขันสมบูรณ์ เมื่อเป็นระบบเศรษฐกิจแบบปิด หนี้สินในเศรษฐกิจจะเท่ากับศูนย์ ดังนั้นแล้วสินทรัพย์ต่อบุคคลจะเท่ากับทุนต่อแรงงาน $x+n$ (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

ที่สินทรัพย์จะเท่ากับทุน $\left[a(t)=k(t)\right]$ ดังนั้นครัวเรือนที่พิจารณาตามข้อจำกัดงบประมาณในสมการ (3.16)

$$\dot{k}(t) = f\left(k(t)\right) - (n+\delta)k(t) - c(t) \tag{3.26}$$

โดยที่ $c(t)=C(t)/L(t)=c(t)e^{-xt}$ เมื่อ $k(0)$, จากสมการ (3.26) การเปลี่ยนแปลงในสต็อกทุนจะเท่ากับ ผลผลิตลบการบริโภคและการเสื่อมค่า และการเปลี่ยนแปลงใน $k(t)\equiv K(t)/L(t)$ จะทำให้เกิดการเจริญเติบโต $L(t)$ ที่อัตรา $x+n$

สมการ (3.26) เป็นตัวกำหนดการขยายตัวของ $k(t)$ ดังนั้นแล้ว $y(t)=f\left(k(t)\right)$ อย่างไรก็ตามจะสามารถกำหนดค่า $c(t)$ ได้ถ้าเราทราบความสัมพันธ์ของ $c(t)$ และ $k(t)$ หรือ $y(t)$) จากเงื่อนไข $r(t)=f'\left(k(t)\right)-\delta$ และ $c(t)=c(t)e^{-xt}$ จะได้

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - x = \frac{1}{\theta}\cdot\left[f'\left(k(t)\right)-\delta-\rho-\theta x\right] \tag{3.27}$$

สมการ (3.27) นี้เป็นการรวมสมการ Differential ของ $c(t)$ และ $k(t)$ ดังนั้นแล้วในรูปแบบนี้ทั้ง $k(0)$ และ Transversality condition จะเป็นตัวกำหนด time path ของ $c(t)$ และ $k(t)$

จากเงื่อนไข Transversality condition

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot\exp\left(-\int_0^t\left[r(v)-n\right]dv\right)\right\} \tag{3.28}$$

ในสถานะคงตัว (Steady state) พิจารณาเงื่อนไขดุลภาพตามสมการ (3.26), (3.27) และ (3.28) ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงที่ Steady state ซึ่งตัวแปรต่าง ๆ มีการเติบโตที่อัตราคงที่ อัตราการเจริญเติบโตที่ Steady state ของ $k(t)$ และ $c(t)$ จะต้องเท่ากับศูนย์ เหมือนกับในแบบจำลองการเจริญเติบโตของ Solow

โดยที่ $(\gamma_k)^*$ คือ อัตราการเจริญเติบโตที่ Steady state ของ $k(t)$

$(\gamma_c)^*$ คือ อัตราการเจริญเติบโตที่ Steady state ของ $c(t)$

สมการ (3.27) ที่ steady state คือ

$$c(t)=f\left(k(t)\right)-(x+n+\delta)\cdot k(t)-k(t)\cdot(\gamma_k)^* \tag{3.29}$$

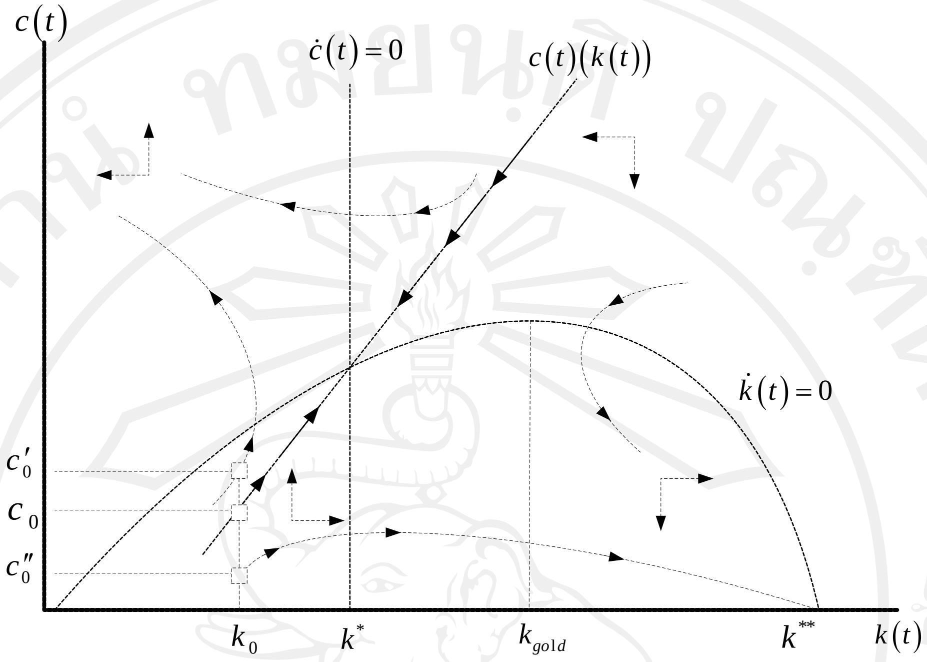
ทำการ Differential สมการ (3.27) เทียบกับเวลา (t) จะได้

$$\dot{c}(t)=\dot{k}(t)\cdot\left[f'\left(k(t)\right)-\left[n+\delta+(\gamma_k)^*\right]\right] \tag{3.30}$$

จาก Trasversality condition ตามสมการ (3.28) ที่ $(\gamma_k)^*$ และ $(\gamma_c)^*$ จะต้องมีเครื่องหมายในทิศทางเดียวกัน ถ้า $(\gamma_k)^*>0,\ k(t)\to\infty$ และ $f'\left(k(t)\right)\to 0$ ตามสมการ (3.27) แล้ว $(\gamma_c)^*<0$ และถ้า $(\gamma_k)^*<0, k(t)\to 0$ และ $f'\left(k(t)\right)\to\infty$ ตามสมการ (3.27) แล้ว $(\gamma_c)^*>0$ ผลที่ได้มานั้นค้านกับผลที่ว่า $(\gamma_k)^*$ และ $(\gamma_c)^*$ จะต้องมีเครื่องหมายในทิศทางเดียวกัน ดังนั้นความเป็นไปได้อย่างเดียวที่ $(\gamma_k)^*$ และ $(\gamma_c)^*$ จะมีเครื่องหมายในทิศทางเดียวกันนั้น คือ $(\gamma_k)^*=(\gamma_c)^*=0$, $(\gamma_k)^*=0$, $(\gamma_c)^*=0$

ดังนั้นตัวแปรต่อหน่วยของประสิทธิภาพแรงงาน (Effective labour) $k(t),c(t),y(t)$ จะมีค่าคงที่ ในขณะที่ตัวแปรต่อประชากร $k(t),c(t),y(t)$ ใน steady state จะมีอัตราการเจริญเติบโตเท่ากับ x และตัวแปร $K(t),X(t),Y(t)$ ใน Steady state จะมีอัตราการเจริญเติบโตเท่ากับ $x+n$ แสดงว่า อัตราการเจริญเติบโตในรูปแบบนี้จะเหมือนกับในแบบจำลองการเจริญเติบโตของ Solow ซึ่งกำหนดการออมจากภายนอกและคงที่

ค่า Steady state ของ $c(t)$ และ $k(t)$ กำหนดจากให้ สมการ (3.26) และ (3.27) เท่ากับศูนย์ จากรูปที่ 3.3 จะสอดคล้องกับ $c(t)=f\left(k(t)\right)-(x+n+\delta)\cdot k(t)$ ที่คู่อันดับ $\left(k(t),c(t)\right)$ ที่เป็นไปตาม $\dot{k}(t)=0$ ในสมการ (3.26)



รูปที่ 3.3 แสดง Phase diagram ของแบบจำลองการเจริญเติบโต Ramsey

โดยที่จุดสูงสุดของเส้นโค้งเกิดขึ้นเมื่อ $f'(k(t))=x+n+\delta$ ดังนั้น อัตราดอกเบี้ย $f'(k(t))-\delta$ จะเท่ากับอัตราการเติบโตที่ Steady-state ของผลผลิต $x+n$ การเท่ากันระหว่างอัตราดอกเบี้ยและการเจริญเติบโตนั้นสอดคล้องกับระดับ The golden rule ของ $k(t)$ เพราะจะทำให้เกิดการบริโภคสูงสุด ที่ Steady state แทน $k(t)$ ด้วย k_{gold} ที่ golden rule (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

3.1.3 แบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายใน (Endogenous growth model)

แบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายในเป็นแบบจำลองที่มีความแตกต่างจากแบบจำลองขั้นต้นคือ ไม่ปรากฏการลดน้อยถอยลงของทุน (Diminishing return to capital) ซึ่งเป็นคุณสมบัติหลักของแบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายใน เพราะการผลิตที่มีทุนมนุษย์ (Human capital) เช่น การศึกษา เป็นปัจจัยในการผลิตอย่างหนึ่งด้วยนั้น ทำให้มนุษย์มีความรู้ความสามารถที่จะวิจัยและพัฒนาความรู้และวิทยาการใหม่ ๆ ขึ้นตลอดเวลา (เกิดเทคโนโลยีใหม่ขึ้น) ความรู้ใหม่ที่เกิดขึ้นนั้นทำให้เกิดการคิดค้นสิ่งใหม่ ๆ ขึ้นมีการถ่ายทอดกันอย่างแพร่หลาย นักเศรษฐศาสตร์มีสมมติฐานว่าผลดีภายนอก (External benefits) ของทุนมนุษย์นั้นเกิดขึ้นมากพอที่จะทำการพัฒนาในระยะยาว และไม่ปรากฏการลดน้อยถอยลงในผลผลิตส่วนเพิ่มของทุนมนุษย์ (Diminishing marginal product of human capital) ซึ่งถ้าเป็นจริง หมายความว่าในระยะยาวการเจริญเติบโตทาง

เศรษฐกิจจะอาศัยการเพิ่มทุนมนุษย์ การค้นคว้าวิจัยและพัฒนา ทำให้เศรษฐกิจเติบโตไปได้เรื่อยๆ (Barro and Sala-i-Martin, 2004)

แบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายในมีข้อสมมติคือ เทคโนโลยีเข้าถึงได้ง่าย และทุกหน่วยธุรกิจสามารถเข้าถึงได้ และข้อสมมติ โดยมีปัจจัยการผลิต 2 ชนิด คือ ทุน (Capital) และแรงงาน (Labour) ดังนั้นแล้วจะได้ Homogeneity of degree 1 ในทุนและแรงงาน โดยกำหนดให้เป็นเศรษฐกิจแบบกระจายอำนาจ (Decentralization economy)

$$F\left[\lambda K(t), \lambda L(t)\right] = \lambda F\left[K(t), L(t)\right]$$

จาก Euler’s theorem สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$F\left[K(t), L(t)\right] = F_K K(t) + F_L L(t)$$

ลักษณะหลักของแบบจำลอง Endogenous growth คือไม่มีการลดน้อยถอยลงของทุน ดังนั้นฟังก์ชั่นการผลิตคือ AK model

$$Y(t) = AK(t) \tag{3.31}$$

โดยที่ A คือ ระดับของเทคโนโลยี

จะได้ผลิตต่อประชากรคือ

$$y(t) = Ak(t) \tag{3.32}$$

และค่าเฉลี่ยและผลผลิตหน่วยสุดท้ายของทุนมีค่าคงที่ ที่ระดับ $A > 0$

สมมติให้ครัวเรือนมีฟังก์ชั่นความพอใจอยู่ในรูปความยืดหยุ่นของการทดแทนกันข้ามห้วงเวลาคงที่ (Constant Intertemporal Elasticity of Substitution: CIES) ดังนี้

$$U = \int_0^{\infty} \left[\frac{c(t)^{(1-\theta)} - 1}{(1-\theta)}\right] dt \tag{3.33}$$

จากข้อสมมติให้ครัวเรือนเป็นเจ้าของปัจจัยการผลิตทุน (Capital) และแรงงาน (Labour) โดยได้รับอัตราผลตอบแทนจากสินทรัพย์ $r(t)$ และอัตราผลตอบแทนจากแรงงาน $w(t)$ จากการที่ทุนมีค่าเสื่อมที่อัตราคงที่ δ ดังนั้นแล้วอัตราค่าเช่าที่แท้จริงจะเท่ากับราคาค่าเช่าลบด้วยค่าเสื่อมของทุน $r(t) = R(t) - \delta$

ข้อจำกัดงบประมาณของครัวเรือนคือ

$$\dot{a}(t)=\left[r(t)-n\right]a(t)+w(t)-c(t) \tag{3.34}$$

โดยที่	$a(t)$	คือ	สินทรัพย์สุทธิต่อบุคคล ณ เวลา t
	$\dot{a}(t)=\dfrac{da(t)}{dt}$	คือ	สินทรัพย์ที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลง
	$r(t)$	คือ	ค่าเช่าที่แท้จริง ณ เวลา t
	n	คือ	อัตราการเจริญเติบโตของประชากร

ครัวเรือนจะแสวงหาความพอใจสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดงบประมาณ โดยการสร้างสมการ Present value Hamiltonian ดังนี้

$$H=u\left[c(t)\right]e^{-(\rho-n)t}+v(t)\left[w(t)+\left(r(t)-n\right)a(t)-c(t)\right] \tag{3.35}$$

โดยที่ $v(t)$ คือ มูลค่าปัจจุบันของราคาเงาของรายได้ในหน่วยความพอใจ

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)}=0 \quad\Rightarrow\quad v(t)=u'\left[c(t)\right]e^{-(\rho-n)t} \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a(t)}=-\dot{v}(t) \quad\Rightarrow\quad \dot{v}(t)=-\left[r(t)-n\right]v(t) \tag{3.37}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[v(t)\cdot a(t)\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\exp\left[-\int_0^t\left[r(v)-n\right]dv\right]\right\}=0 \tag{3.38}$$

จากสมการ (3.36) (3.37) และ (3.38) จะได้เงื่อนสำหรับดุลยภาพคือ

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{1}{\theta}\left[r(t)-\rho\right] \tag{3.39}$$

และ Transversality Condition ตามสมการ (3.38)

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\exp\left[-\int_0^t\left[r(v)-n\right]dv\right]\right\}=0 \tag{3.40}$$

พฤติกรรมของหน่วยธุรกิจตามแบบจำลอง AK model คือหน่วยธุรกิจจะมีฟังก์ชั่นการผลิตคือ

$$y(t)=f\left(k(t)\right)=Ak(t)$$

ซึ่ง $A > o$ และ $f'\left(k(t)\right) = A$ จากข้อสมมติข้างต้นที่กำหนดให้ทุนมีค่าเสื่อมโดยที่อัตราค่าเช่าที่แท้จริงจะเท่ากับราคาค่าเช่าลบด้วยค่าเสื่อมของทุนดังนั้นหน่วยธุรกิจจะทำกำไรสูงสุดภายใต้เงื่อนไข

$$R(t) = r(t) + \delta \tag{3.41}$$

$$r(t) = A - \delta \tag{3.42}$$

ถ้าผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงาน (Marginal product of labour) เท่ากับศูนย์แล้วอัตราค่าจ้าง $w(t)$ จะเท่ากับศูนย์ด้วย ดังนั้นจะได้ดุลยภาพโดยสมมติให้เป็นระบบเศรษฐกิจแบบปิด ที่ไม่มีการกู้ยืม ดังนั้นที่ดุลยภาพสินทรัพย์จะเท่ากับทุน $\left(a(t) = k(t)\right)$

แทนค่า $a(t) = k(t),\ r(t) = A - \delta,\ w(t) = 0$ ไปในสมการ (3.34) จะได้

$$\dot{k}(t) = (A - \delta - n)k(t) - c(t) \tag{3.43}$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - \rho) \tag{3.44}$$

$$\lim_{t \to \infty}\left\{k(t)e^{-(A-\delta-n)t}\right\} = 0 \tag{3.45}$$

สมการ (3.44) แสดงถึงการเจริญเติบโตของการบริโภค ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับการสะสมทุนต่อประชากร $\left(k(t)\right)$ หรือที่ระดับการบริโภคต่อประชากรที่จุดเริ่มต้น $c(0)$ ดังนั้นการบริโภคต่อประชากร ณ เวลา t $c(t)$ คือ

$$c(t) = c(0)e^{(1/\theta)\cdot(A-\delta-\rho)\cdot t}$$

การเจริญเติบโตของทุนและผลผลิตต่อประชากร สามารถหาได้โดยหารสมการ (3.43) ด้วย $\left(k(t)\right)$ จะได้

$$c(t)/k(t) = (A - \delta - n) - \dot{k}(t)/k(t)$$

ที่ Steady state ตัวแปรทุกตัวมีอัตราการเจริญเติบโตคงที่ จะได้พจน์ด้านขวา $(A - \delta - n) - \dot{k}(t)/k(t)$ คงที่ ดังนั้น c/k จะคงที่ และอัตราการเจริญเติบโตของทุนต่อประชากรจะเท่ากับอัตราการเจริญเติบโตของการบริโภคต่อประชากรในสมการ (3.44)

ทฤษฎีการเจริญเติบโตจากภายใน (Endogenous Growth) เห็นว่าการลงทุนในทุนมนุษย์ ในด้านการศึกษา การพัฒนาฝีมือแรงงาน การวิจัยและพัฒนา ล้วนแต่เป็นปัจจัยสำคัญต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ คือเมื่อมีการลงทุนในทุนมนุษย์มากขึ้นก็จะส่งผลกระทบต่อสังคมในทาง

ที่เป็นประโยชน์ (Positive externalities) โดยทำให้ประชากรและแรงงานในสังคมส่วนรวมสามารถพัฒนาประสิทธิภาพในการผลิตให้สูงมากขึ้นและสามารถผลิตสินค้าและบริการได้มากขึ้น แม้ในภาวะที่มีทรัพยากรจำกัด ทฤษฎีการเจริญเติบโตจากภายในยังเชื่อว่าผลกระทบต่อสังคมในทางที่เป็นประโยชน์จะยังคงมีสูงมาก ทำให้ประเทศที่มีการลงทุนในทุนมนุษย์สูงจะมีความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจที่ยั่งยืนอย่างไม่วันสิ้นสุด (ชิดชล ตั้งสุขขีย์ศิริ, 2550)

การลงทุนในทุนมนุษย์จะส่งผลกระทบต่อสังคมในทางที่เป็นประโยชน์ โดยผ่านกระบวนการดังนี้

1. ผลของการล้นออก (Spill-over effects)
2. ผลของการเรียนรู้ท่ามกลางการปฏิบัติ (Learning-by-doing effects)

Spill-over effects จะเกิดขึ้นเมื่อมีการลงทุนมนุษย์ในด้านการศึกษา การพัฒนาฝีมือแรงงาน หรือ การวิจัยและพัฒนา คือ เมื่อผู้ใช้แรงงานได้รับการศึกษามากขึ้น ทำให้มีประสิทธิภาพในการผลิตสูงขึ้นสามารถผลิตสินค้าและบริการได้มากขึ้น คนเหล่านี้ยังมักจะมีปฏิสัมพันธ์แลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อนร่วมงาน ส่งผลให้ประสิทธิภาพในการผลิตของบุคคลอื่น ๆ เพิ่มมากขึ้นไปด้วย และการขยายตัวของการศึกษาของประชาชนโดยทั่วไปยังทำให้เกิดกระบวนการ Learning-by-doing ดังนั้นกระบวนการทั้งสองจึงเป็นกระบวนการที่สามารถเพิ่มประสิทธิภาพและศักยภาพของแรงงานให้สูงขึ้น และทำให้เศรษฐกิจสามารถขยายตัวได้ถึงแม้จะมีทรัพยากรและการลงทุนที่จำกัด (พรรณี ญานะตื้อ, 2551)

ดังนั้นทฤษฎีการเจริญเติบโตจากภายในเป็นแนวความคิดที่แสดงให้เห็นว่าเศรษฐกิจจะเจริญเติบโตอย่างเข้มแข็งในระยะยาวได้นั้น การเน้นการลงทุนทางกายภาพอย่างเดียวไม่เพียงพอจะต้องให้ความสำคัญกับการลงทุนในทุนมนุษย์ด้วยเศรษฐกิจจึงจะเจริญเติบโตอย่างยั่งยืน จึงเน้นให้รัฐบาลเข้ามามีบทบาทในกานส่งเสริมการลงทุน ทั้งด้านทุนกายภาพ และทุนมนุษย์

3.2 แนวคิดและทฤษฎีทางเศรษฐมิติ (Econometric Theory)

3.2.1 ข้อมูลพาแนล (Panel Data)

ข้อมูลพาแนลเป็นข้อมูลที่มีลักษณะของข้อมูลภาคตัดขวาง (Cross-sectional data) ร่วมกับข้อมูลอนุกรมเวลา (Time series data) เกิดจากการเก็บหน่วยของตัวอย่างชุดเดิมซ้ำ ๆ หลายครั้ง เช่นบุคคล, ครัวเรือน และหน่วยธุรกิจ ภายในช่วงเวลาที่ทำการศึกษา

เนื่องจากข้อมูลพาแนลเป็นการรวมกันของข้อมูลภาคตัดขวางและข้อมูลอนุกรมเวลาทำให้ข้อมูลพาแนลมีประโยชน์ในการศึกษามากกว่าการใช้ข้อมูลภาคตัดขวางหรืออนุกรมเวลาเพียง

อย่างเดียว เพราะความหลากหลายของข้อมูลทำให้ค่าความเป็นอิสระ (Degree of freedom) มากขึ้น และเป็นการลดปัญหาภาวะร่วมเส้นตรง (Collinearity) ทำให้ค่าประมาณที่ได้มีความน่าเชื่อถือมากขึ้น นอกจากนั้นข้อมูลพาแนลสามารถระบุและวัดผลกระทบที่ไม่สามารถพบได้เมื่อใช้ข้อมูลภาคตัดขวางหรือข้อมูลอนุกรมเวลาเพียงอย่างเดียว

ในด้านของการประมาณค่านั้นข้อมูลพาแนลสามารถใช้ศึกษาการปรับตัวหรือการเปลี่ยนแปลงแบบพลวัตรของข้อมูลที่เกิดจากการสังเกตซ้ำ ๆ ได้ดี และใช้วิเคราะห์แบบจำลองที่มีความซับซ้อนได้ดีกว่าข้อมูลภาคตัดขวางและข้อมูลอนุกรมเวลา (Baltagi, 2001: 6-8)

นอกจากนี้เหตุผลสำคัญที่ทำให้การใช้ข้อมูลพาแนลในวิเคราะห์มีความได้เปรียบคือ ข้อมูลพาแนลไม่มีข้อจำกัดด้านสมมติฐาน และสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลแต่ละหน่วยข้ามช่วงเวลาได้

แบบจำลองข้อมูลพาแนลแบบทั่วไปในรูปเชิงเส้น สามารถเขียนได้ดังนี้ (Verbeek, 2004: 342)

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta_{it} + \varepsilon_{it} \tag{3.46}$$

โดยที่	i	คือ	ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1,...,N$
	t	คือ	ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1,...,T$
	y_{it}	คือ	เวกเตอร์ 1×1 ของตัวแปรตาม
	α_i	คือ	จำนวนจริง (ค่าคงที่)
	x_{it}	คือ	เวกเตอร์ $k\times1$ ของตัวแปรอธิบาย
	β_{it}	คือ	เวกเตอร์ $k\times1$ ของค่าสัมประสิทธิ์
	ε_{it}	คือ	ค่าความคลาดเคลื่อน

การประมาณค่าความสัมพันธ์ของแบบจำลองพาแนล ขึ้นอยู่กับข้อสมมติเบื้องต้นของค่าคงที่ (α_i) ค่าสัมประสิทธิ์ (β_{it}) และค่าความคลาดเคลื่อน (ε_{it})

ในกรณีทั่วไปนั้นจะสมมติให้ค่าความคลาดเคลื่อน (ε_{it}) มีการแจงแจงเหมือนกันในทุก ๆ หน่วยภาคตัดขวางและช่วงเวลา หมายความว่า ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ_ε^2 (Verbeek, 2004: 345)

3.2.2 การทดสอบพาแนลยูนิทรูท (Panel unit root test)

การใช้ข้อมูลพาแนลประมาณความสัมพันธ์ของแบบจำลองนั้น จะต้องมีการทดสอบความนิ่ง (Stationary) ของข้อมูลก่อน เพื่อหลีกเลี่ยงข้อมูลที่มีค่าเฉลี่ย (Mean) และความแปรปรวน

(Variance) ที่ไม่คงที่ในแต่ละช่วงเวลาที่แตกต่างกัน เพื่อไม่ให้เกิดปัญหาความสัมพันธ์ที่ไม่แท้จริง (Spurious regression) จากสมการ AR (1) ของข้อมูลพาแนล

$$y_{it} = \alpha_i + \rho_i y_{it} + \varepsilon_{it} \qquad (3.47)$$

เปลี่ยนรูปสมการจะได้

$$y_{it} = \rho y_{it-1} + \varepsilon_{it} \qquad (3.48)$$

โดยที่ i คือ ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1,\ldots,N$

t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1,\ldots,T$

y_{it} คือ ตัวแปรภายนอก

ρ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของ Autoregressive

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

$H_o : \rho = 0$ (ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)

$H_a : \rho < 0$ (ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท)

ซึ่งการทดสอบพาแนลยูนิทรูทมีวิธีการทดสอบทั้งหมด 5 วิธี คือทดสอบพาแนลยูนิทรูทด้วยวิธี Levin, Lin and Chu (LLC) test , Breitung test, Hadri test, Im, Pesaran and Shin (IPS) test และ Fisher-Type Tests โดยใช้ Fisher-ADF และ Fisher-PP ดังนี้

1. วิธีการทดสอบของ Levin, Lin and Chu (LLC) (2000)

จากสมการ

$$\Delta y_{it} = \rho y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta y_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad m = 1,2,3 \qquad (3.49)$$

โดยที่ d_{1m} = เซ็ทว่าง, $d_{2m} = \{1\}$ และ $d_{3m} = \{1,t\}$

Δy_{it} คือ ผลต่างของ y_{it}

p_i คือ จำนวน Lag order สำหรับผลต่างของ y_{it}

α_{mi} คือ เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์

d_{mt} คือ เวกเตอร์ของ Deterministic variable

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

การทดสอบได้กำหนดสมมติฐาน คือ

$H_0 : \rho = 0$ (ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)

$H_a : \rho < 0$ (ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท)

วิธีการทดสอบมี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ถดถอยสมการ Augmented Dickey-Fuller (ADF) ในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง

$$\Delta y_{it} = \rho_i y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i} \theta_{iL} \Delta y_{it-L} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad m = 1,2,3 \qquad (3.50)$$

ให้ Lag order ของ p_i มีการเปลี่ยนแปลงไปในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง เลือกค่า Lag order ที่ $p_{\max}$ โดยใช้ค่าสถิติ t (t-statistic) ของ $\hat{\theta}_{iL}$ ในการตัดสิน จากนั้นถดถอย สมการเสริม (Auxiliary) ทั้งสองสมการเพื่อหาค่าส่วนที่เหลือโดย

ประมาณค่าสมการ Δy_{it} กับ $\Delta y_{i,t-L}\left(L = 1,\ldots,p_i\right)$ และ d_{mt} ได้ค่า $\hat{e}_{it}$

ประมาณค่าสมการ $y_{i,t-1}$ กับ $\Delta y_{i,t-L}\left(L = 1,\ldots,p_i\right)$ และ d_{mt} ได้ค่า $\hat{v}_{i,t-1}$

จากนั้นปรับค่าส่วนที่เหลือ (Residual) เพื่อควบคุมความแปรปรวนระหว่างข้อมูลภาคตัดขวางจะได้

$$\tilde{e}_{it} = \frac{\hat{e}_{it}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon t}}, \quad \tilde{v}_{i,t-1} = \frac{\hat{v}_{it}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon t}} \qquad (3.51)$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_{\varepsilon t}$ คือค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานจากการถดถอยสมการ ADF ในแต่ละหน่วยของข้อมูลภาคตัดขวาง

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณอัตราส่วนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระยะยาวกับระยะสั้น ภายใต้ข้อสมมติฐานหลักของยูนิทรูทการหาความแปรปรวนระยะยาวสามารถหาค่าได้จาก

$$\hat{\sigma}_{yi}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^{T} \Delta y_{it}^2 + 2 \sum_{L=1}^{\bar{K}} w_{\bar{K}L} \left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=2+L}^{T} \Delta y_{it} \, \Delta y_{i,t-L} \right] \qquad (3.52)$$

โดยที่ $\bar{K}$ คือ Truncations lag และ $w_{\bar{K}L} = 1 - \left(L / \bar{K} + 1\right)$ และในแต่ละหน่วยภาคตัดขวางค่าอัตราส่วนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระยะยาวคำนวณจาก $\hat{s}_i = \hat{\sigma}_{yi} / \hat{\sigma}_{\varepsilon i}$ ส่วนค่าเฉลี่ยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานคำนวณจาก $\hat{S}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{s}_i$

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบข้อมูลพาแนล โดยการถดถอยแบบ Pooled (The pooled regression)

$$\tilde{e}_{it} = \rho \tilde{v}_{i,t-1} + \tilde{\varepsilon}_{it} \qquad (3.53)$$

จากค่าสังเกตจำนวน $N\tilde{T}$ โดยที่ $\tilde{T} = T - \bar{p} - 1$ คือ ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตต่อหน่วยของข้อมูลพาแนล ซึ่ง $\bar{p} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i}{N}$ คือค่าเฉลี่ยของ Lag order แต่ละหน่วยของ ADF

ค่าสถิติ t ที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$t_{\rho}=\frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}(\hat{\rho})} \tag{3.54}$$

โดยที่

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2+p_i}^{T}\tilde{v}_{i,t-1}\tilde{e}_{it}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2+p_i}^{T}\tilde{v}_{i,t-1}^{2}} \tag{3.55}$$

$$\hat{\sigma}(\hat{\rho})=\frac{\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}}{\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2+p_i}^{T}\tilde{v}_{i,t-1}^{2}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.56}$$

และค่าความแปรปรวนของ $\tilde{\varepsilon}_{it}$

$$\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}^{2}=\frac{1}{N\tilde{T}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2+p_i}^{T}\left(\tilde{e}_{it}-\hat{\rho}\tilde{v}_{it-1}\right)^{2} \tag{3.57}$$

คำนวณค่า Adjusted t-statistic จาก

$$t_{\rho}^{*}=\frac{t_{\rho}-N\tilde{T}\hat{S}_{N}\,\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}^{-2}\,\hat{\sigma}(\hat{\rho})\,\mu_{m\tilde{T}}^{*}}{\sigma_{m\tilde{T}}^{*}} \tag{3.58}$$

โดย $\hat{\sigma}_{\tilde{\varepsilon}}^{-2}$ คือ ค่าความแปรปรวนของ $\tilde{\varepsilon}_{it}$

$\hat{\sigma}(\hat{\rho})$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $(\hat{\rho})$

$\hat{S}_{N}$ คือ ค่าเฉลี่ยของค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน

$\mu_{m\tilde{T}*}$ และ $\sigma_{m\tilde{T}*}$ คือ Adjustment Term ของค่าเฉลี่ย (Mean) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation)

ในการพิจารณาจะดูว่าค่าสถิติ t_{ρ}^{*} ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ t_{ρ}^{*} ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

2. วิธีการทดสอบของ Im, Pesaran and Shin (IPS) (2003)

เป็นการทดสอบโดยใช้ Augmented Dickey-Fuller (ADF)

$$\Delta y_{it}=\rho_{i}y_{i,t-1}+\sum_{L=1}^{p_i}\theta_{iL}\Delta y_{it-L}+\alpha_{mi}d_{mt}+\varepsilon_{it} \tag{3.59}$$

สมมติฐานการทดสอบคือ

$H_0:\rho_i=0 \quad for \quad ,\forall i$ (ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)

$$H_a : \begin{cases} \rho_i < 0 \quad for \quad i = 1, 2, \ldots, N_1 \\ \rho_i = 0 \quad for \quad i = N_1 + 1, \ldots N \end{cases}$$ (ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท)

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$\bar{t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_{\rho_i} \tag{3.60}$$

โดยที่ $\bar{t} \sim N(0,1)$ และ $t_{\rho_i} \Rightarrow \left(\int_0^1 W_{iZ}\, dW_{iZ}\right) \Big/ \left[\int_0^1 W_{iZ}^2\right] = t_{iT}$ เมื่อ $T \to \infty$ จากข้อสมมติของ IPS ที่กำหนดให้ t_{iT} เป็น i.i.d ดังนั้นสามารถปรับสมการได้

$$\frac{\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_{iT} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left[t_{iT} \mid \rho_i = 0\right]\right)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{var}\left[t_{iT} \mid \rho_i = 0\right]}} \Rightarrow N(0,1) \tag{3.61}$$

เมื่อ $N \to \infty$ จากทฤษฎีลิมิตลู่เข้าสู่ศูนย์กลาง (Central limit theorem) สามารถเขียนสมการใหม่ได้

$$t_{IPS} = \frac{\sqrt{N}\left(\bar{t} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left[t_{iT} \middle| \rho_i = 0\right]\right)}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{var}\left[t_{iT} \middle| \rho_i = 0\right]}} \Rightarrow N(0,1) \tag{3.62}$$

การพิจารณาจะดูว่าค่าสถิติ t_{IPS} ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ t_{IPS} ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

3. วิธีการทดสอบของ Breitung (2000)

Breitung ทดสอบค่าสถิติโดยไม่พิจารณาการปรับค่าความเอนเอียง (Bias adjustment) ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 วิธีหาค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบมีวิธีเหมือนกับวิธีของ LLC แต่แตกต่างกันตรงที่ค่า $\Delta y_{i,t-L}$ ที่ใช้ในการหาค่า $\hat{e}_{it}$ และ $\hat{v}_{i,t-1}$

ขั้นตอนที่ 2 ค่าส่วนที่เหลือ (Residual) $\hat{e}_{it}$ ถูกปรับเปลี่ยนโดยการใช้ Forward orthogonalization transformation จะได้สมการ

$$e_{it}^{*} = \sqrt{\frac{T-t}{(T-t+1)}}\left(\tilde{e}_{it} - \frac{\tilde{e}_{i,t+1} + \ldots \tilde{e}_{i,T}}{T-t}\right) \tag{3.63}$$

และ

$$v^*_{i,t-1} = \tilde{v}_{i,t-1} - \tilde{v}_{i,1} - \frac{t-1}{T}\tilde{v}_{iT}$$ มีค่าคงที่และแนวโน้ม

$$v^*_{i,t-1} = \tilde{v}_{i,t-1} - \tilde{v}_{i,1}$$ มีค่าคงที่

$$v^*_{i,t-1} = \tilde{v}_{i,t-1}$$ ไม่มีค่าคงที่และแนวโน้ม

ขั้นตอนสุดท้าย ประมาณค่า Pooled regression

$$e^*_{it} = \rho v^*_{i,t-1} + \varepsilon^*_{it} \tag{3.64}$$

ดังนั้นค่าสถิติที่ใช้ในการประมาณคือ

$$B_{nT} = \left[\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{nT^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=2}^{T-1}(v^*_{it-1})^2\right]^{-1/2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{nT}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=2}^{T-1}(e^*_{it})(v^*_{it-1})\right)\right] \tag{3.65}$$

การทดสอบได้กำหนดสมมติฐานคือ

$H_0 : \rho = 0$ (ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท)

$H_a : \rho < 0$ (ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท)

การพิจารณาจะดูว่าค่าสถิติ B_{nT} ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ B_{nT} ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

4. วิธีการทดสอบของ Fisher-type (Maddala and Wu (1999) และ Choi (2001))

จากสมการ Augmented Dickey-Fuller (ADF)

$$\Delta y_{it} = \rho y_{i,t-1} + \sum_{L=1}^{p_i}\theta_{iL}\Delta y_{it-L} + \alpha_{mi}d_{mt} + \varepsilon_{it} \qquad ; m = 1,2,3 \tag{3.66}$$

โดยที่ d_{1m} เป็นเซ็ทว่าง, $d_{2m} = \{1\}$ และ $d_{3m} = \{1, t\}$

Δy_{it} คือ ผลต่างของ y_{it}

p_i คือ จำนวน Lag order สำหรับผลต่างของ y_{it}

α_{mi} คือ เวกเตอร์ค่าสัมประสิทธิ์

d_{mt} คือ เวกเตอร์ของ Deterministic variable

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

การทดสอบโดยการรวมค่า p-value ของค่าสถิติที่ทดสอบความนิ่งของข้อมูลแต่ละหน่วยภาคตัดขวางจากสมการ ADF มาใช้ในการทดสอบพาแนลยูนิทรูท

$$P = -2\sum_{i=1}^{N} \ln p_i \rightarrow \chi^2_{2N} \qquad (3.67)$$

โดย p คือค่าที่ใช้ทดสอบความนิ่งของข้อมูลแต่ละภาคตัดขวาง ค่า $-2\ln p_i$ มีการแจกแจงแบบ χ^2 มีระดับความเป็นอิสระเท่ากับ 2 ดังนั้น P จึงมีการแจกแจงแบบ χ^2 และมีระดับความเป็นอิสระเท่ากับ $2N$

Choi (2001) ได้เสนอวิธีการในการทดสอบคือ The inverse normal test (Z) และ The logit test (L) คือ

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} \Phi^{-1}(p_i) \qquad (3.68)$$

ซึ่ง $0 \le p_i \le 1$ และ $\Phi^{-1}(p_i) \sim N(0,1)$ ดังนั้นส่งผลให้ $Z \sim N(0,1)$ และ

$$L = \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) \qquad (3.69)$$

ซึ่ง $\ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)$ มีการแจกแจงแบบโลจิสติคที่ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ $\pi^2/3$

การทดสอบได้กำหนดสมมติฐาน คือ

H_0: ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

H_a: ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

ถ้าทั้ง Fisher's (P) Test และ Z - Statistic ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท แต่ถ้าทั้ง Fisher's (P) Test และ Z – Statistic ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

5. วิธีการทดสอบของ Hadri (1999)

ทดสอบโดยการประมาณค่าส่วนที่เหลือ (Residual) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary least square: OLS) ประมาณค่าตัว y_{it} ที่มีค่าคงที่ (Constant) หรือมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้ม (Trend) พิจารณาจาก 2 สมการคือ

$$y_{it} = r_{it} + \varepsilon_{it} \qquad i = 1,\ldots,N;\ t = 1,\ldots,T \qquad (3.70)$$

และ

$$y_{it} = r_{it} + \beta_i t + \varepsilon_{it} \qquad (3.71)$$

ซึ่ง $r_{it} = r_{i,t-1} + u_{it}$ คือ Random walk และ $\varepsilon_{it} \sim INN\left(0, \sigma_{\varepsilon}^{2}\right)$, $u_{it} \sim INN\left(0, \sigma_{\mu}^{2}\right)$ มีคุณสมบัติ i.i.d. ระหว่างข้อมูลภาคตัดขวางที่ i และช่วงเวลาที่ t ดังนั้น สามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$y_{it} = r_{io} + \beta_i t + \sum_{s=1}^{t} u_{is} + \varepsilon_{it} \tag{3.72}$$

$$y_{it} = r_{io} + \beta_i t + v_{it} \tag{3.73}$$

โดยที่ $v_{it} = \sum_{s=1}^{t} u_{is} + \varepsilon_{it}$ จะได้ค่าสถิติ LM ที่ใช้ในการประมาณมีค่าดังนี้

$$LM_1 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} S_{it}^{2}\right) \bigg/ \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} \tag{3.74}$$

โดยที่ $S_{it} = \sum_{s=1}^{t} \hat{\varepsilon}_{is}$ คือผลรวมของส่วนที่เหลือ $\left(\hat{\varepsilon}_{is}\right)$ ด้วยวิธี OLS และ

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_{it}^{2}$$

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสำหรับการเกิดปัญหาค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่คงที่ (Heteroskedasticity) ระหว่างข้อมูลภาคตัดขวางที่ i , $\hat{\sigma}_{\varepsilon i}^{2}$ ดังนี้

$$LM_2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} S_{it}^{2} \big/ \hat{\sigma}_{\varepsilon i}^{2}\right)\right) \tag{3.75}$$

ดังนั้นจึงใช้ LM_1 ในกรณีเป็น Homoskedasticity และใช้ LM_2 ในกรณีที่เป็น Heteroskedasticity

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานคือ ค่าสถิติ Z ดังนี้

$$Z = \sqrt{N}\left(LM - \xi_1\right) \big/ \zeta \rightarrow N(0,1) \tag{3.76}$$

โดยที่ ξ = 1/6 และ ζ = 1/45 ถ้าแบบจำลองประกอบด้วยค่าคงที่เพียงอย่างเดียว

ξ = 1/15 และ ζ = 11/6300 สำหรับกรณีอื่น

การทดสอบได้กำหนดสมมติฐาน คือ

H_0 : ข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

H_a : ข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท

ถ้าค่าสถิติ Z ที่ได้จากการประมาณมีค่ามากกว่าค่าวิกฤติ (Critical) แสดงว่าปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลมียูนิทรูท แต่ถ้าค่าสถิติ Z ที่ได้น้อยกว่าค่าวิกฤติแสดงว่ายอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือข้อมูลพาแนลไม่มียูนิทรูท

3.2.3 การประมาณค่าความสัมพันธ์ของแบบจำลองพาแนล

เป็นการประมาณค่าของข้อมูลพาแนล ที่พิจารณาแยกความแตกต่างระหว่างแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) และช่วงเวลา (Time) โดยมีข้อสมมติว่าค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์แตกต่างกัน แบ่งออกเป็นการประมาณค่าแบบจำลอง Fixed effect, แบบจำลอง Random effect และ Pooled estimator

1. แบบจำลอง Fixed effects

แบบจำลอง Fixed effect หรือแบบจำลองการถดถอย Lest-Squares Dummy Variable (LSDV) เป็นแบบจำลองการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่ค่าคงที่ (Intercept term) มีการผันแปรตามแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง i นั้นคือเป็นไปตามสมการ (3.77)

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \qquad \varepsilon_{it} \sim IID(0, \sigma^2_\varepsilon) \tag{3.77}$$

มีข้อสมมติคือ x_{it} และ ε_{it} เป็นอิสระต่อกันทุกค่า สามารถเขียนรูปแบบการถดถอยที่รวมเอาตัวแปรหุ่น (Dummy variable) สำหรับแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง i ในแบบจำลองได้ดังนี้

$$y_{it} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_i d_{ij} + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \tag{3.78}$$

โดยที่ $d_{ij} = 1$ ถ้า $i = j$ และ $d_{ij} = 0$ ถ้า $i \neq j$

ดังนั้นเซตของตัวแปรจำนวน N ในแบบจำลอง, ค่าพารามิเตอร์ $\alpha_1, ..., \alpha_N$ และค่า β สามารถประมาณค่าได้โดยทำการประมาณสมการ (3.78) โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary least squares: OLS) โดยค่า β ที่คำนวณโดยใช้ (Least Squares Dummy Variable: LSDV) นี้มีการเบี่ยงเบน จึงต้องกำจัดผลกระทบแต่ละหน่วยของ α_{it} โดยการเปลี่ยนแปลงข้อมูลสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\bar{y}_i = \alpha_i + \bar{x}'_i\beta + \bar{\varepsilon}_i \tag{3.79}$$

โดยที่ $\bar{y}_i = T^{-1}\sum_t y_{it}$

$$y_{it} - \bar{y}_i = (x_{it} - \bar{x}_i)'\beta + (\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i) \tag{3.80}$$

สมการ (3.80) เป็นแบบจำลองการถดถอยที่เบี่ยงเบนออกจากค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง และไม่รวมผลกระทบแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง α_{it} โดยการเปลี่ยนแปลงข้อมูลในสมการ (3.80) ที่มีการสร้างค่าสังเกตในรูปการเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง เรียกว่า “Within transformation” และตัวประมาณ OLS สำหรับค่า β ที่คำนวณได้จากแบบจำลองนี้เรียกว่า “Within estimator” หรือ “Fixed effect estimator” ซึ่งให้ผลที่ถูกต้องแม่นยำเช่นเดียวกับตัวประมาณแบบ LSDV (Verbeek, 2004: 346)

กำหนดโดย

$$\hat{\beta}_{FE} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{it} - \bar{x}_i)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(y_{it} - \bar{y}_i)' \quad (3.81)$$

จากข้อสมมติให้ x_{it} เป็นอิสระจาก ε_{it} ทุกค่า ตัวประมาณ Fixed effect สามารถแสดงในรูปที่ค่า β ไม่มีการเบี่ยงเบน และถ้ากำหนดให้ ε_{it} มีการกระจายแบบปกติ ค่า $\hat{\beta}_{FE}$ จะมีการกระจายตัวแบบปกติคือ

$$E\{(x_{it} - \bar{x}_{it})\varepsilon_{it}\} = 0 \quad (3.82)$$

สมการ (3.82) แสดงข้อสมมติ x_{it} ไม่สัมพันธ์กับ ε_{it} และ $\bar{x}_i$ จะไม่สัมพันธ์กับค่าความคลาดเคลื่อน (Error term) ดังนี้

$$E\{x_{it}\varepsilon_{it}\} = 0 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ ค่าของ s, t} \quad (3.83)$$

ในกรณีนี้จะเรียก x_{it} ว่า “Strictly exogenous” ที่กำหนดให้ไม่มีความสัมพันธ์กับค่าปัจจุบัน, อดีต และอนาคตของค่าความคลาดเคลื่อน

ที่ตัวแปรอธิบาย N เป็นอิสระต่อค่าความคลาดเคลื่อนทุกตัว ดังนั้นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงคือ

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{x}_i \hat{\beta}_{FE,} \qquad i = 1, \ldots, N \quad (3.84)$$

ภายใต้ข้อสมมติตามสมการ (3.82) α_{it} ของ Fixed effects ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเพราะที่ค่า T คงที่ค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง $\bar{y}_i$ และ x_{it} นั้นจะไม่เบนเข้าหาค่าใดเลย

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance matrix) สำหรับตัวประมาณค่า Fixed effects $\left(\hat{\beta}_{FE}\right)$ ที่มีข้อสมมติให้ ε_{it} นั้นมีลักษณะ i.i.d. ระหว่างแต่ละหน่วยภาคตัดขวางและช่วงเวลา เมื่อค่าความแปรปรวน $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$ นั้นกำหนดโดย

$$\mathrm{V}\{\hat{\beta}_{FE}\} = \sigma_{\varepsilon}^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{it} - \bar{x}_i)' \right)^{-1} \quad (3.85)$$

ถ้าค่า T มีจำนวนมากจะใช้ OLS ในการประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมภายใต้การถดถอยตามสมการ (3.80) จะได้ผลการประมาณที่ต่ำกว่าตัวแปรที่แท้จริง และค่าความแปรปรวนของ $\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i$ คือ $(T-1)/T\sigma_\varepsilon^2$ จะมีค่าค่อนข้างมากกว่า σ_ε^2 โดยตัวประมาณค่าที่ไม่มีเปลี่ยนแปลง (Consistent) ของ σ_ε^2 สามารถหาได้จากค่าผลรวมผลต่างกำลังสอง (Residual sum of squares: RSS) หารด้วย $N(T-1)$ นั้นคือ

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N(T-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(y_{it} - \hat{\alpha}_{it} - x_{it}' \hat{\beta}_{FE} \right)^2$$

$$= \frac{1}{N(T-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(y_{it} - \bar{y}_i - \left(x_{it} - \bar{x}_{it} \right)' \hat{\beta}_{FE} \right)^2 \qquad (3.86)$$

ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อให้ค่าระดับความเป็นอิสระ (Degree of freedom) มีความถูกต้องมากขึ้น โดยการนำค่า K ไปลบที่ตัวหารในสมการ (3.86) เพราะค่าระดับความเป็นอิสระที่ถูกต้องนั้นจะทำให้ค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าสอดคล้องกับ Individual intercept term

ดังนั้นแบบจำลอง Fixed effect ได้รวบรวมข้อแตกต่างของ “ภายใน” แต่ละหน่วยภาคตัดขวาง คืออธิบายขนาดความแตกต่างของ y_{it} และ $\bar{y}_i$ แต่ไม่อธิบายว่าทำไม $\bar{y}_i$ ถึงแตกต่างจาก $\bar{y}_j$ (Verbeek, 2004: 347)

2. แบบจำลอง Random Effects

ในการวิเคราะห์การถดถอยโดยทั่วไปนั้นมีข้อสมมติว่าทุกตัวแปรมีอิทธิพลต่อตัวแปรตาม ซึ่งสามารถแสดงในรูปค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม (Random error term) โดยให้ α_i เป็นตัวแปรสุ่ม (Random Factors) ที่เป็นอิสระและมีการแจกแจงในแต่ละหน่วย ดังนั้นสามารถเขียนแบบจำลอง Random effects ดังนี้ (Verbeek, 2004: 347)

$$y_{it} = \mu + \beta x_{it}' + \alpha_i + \varepsilon_{it}, \qquad \varepsilon_{it} \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2);\ \alpha_i \sim IID(0, \sigma_\alpha^2) \qquad (3.87)$$

โดยที่ $\alpha_i + \varepsilon_{it}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน (Error Term) ที่ประกอบด้วยส่วนประกอบเฉพาะแต่ละหน่วยภาคตัดขวางที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา และส่วนที่เหลือ ซึ่งสมมติให้ไม่มีความสัมพันธ์กันตลอดช่วงเวลา

จากข้อสมมติที่ α_i และ ε_i สัมพันธ์กันอย่างอิสระแสดงว่า $\alpha_i + \varepsilon_{it}$ เป็นรูปแบบของอัตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation) ดังนั้นการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสำหรับตัวประมาณ OLS และตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดทั่วไป (Generalized Least square: GLS) ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพ สามารถหาได้จาก Error covariance matrix

การหาตัวประมาณ GLS สำหรับทุก ๆความคลาดเคลื่อนของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง i คือ $\alpha_i \iota_T + \varepsilon_i$ โดยที่ $\iota_T = (1,1,...,1)'$ มีขนาด (Dimension) เท่ากับ T และ $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1},...,\varepsilon_{iT})'$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเวคเตอร์นี้คือ

$$V\{\alpha_i \iota_T + \varepsilon_i\} = \Omega = \sigma_\alpha^2 \iota_T \iota_T' + \sigma_\alpha^2 \iota_T \tag{3.88}$$

โดยที่ I_t คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาดเท่ากับ T

สามารถหาค่าตัวประมาณ GLS สำหรับค่าพารามิเตอร์ในสมการ (3.87) โดยการแปลงข้อมูลแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง คือคูณเวคเตอร์ $y_i = (y_{i1},..., y_{iT})'$ ด้วย Ω^{-1}

กำหนดโดย

$$\Omega^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2}\left[I_T - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}\iota_T \iota_T'\right] \tag{3.89}$$

หรือเขียนในรูป

$$\Omega^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2}\left[\left(I_T - \frac{1}{T}\iota_T \iota_T'\right) + \psi \frac{1}{T}\iota_T \iota_T'\right] \tag{3.90}$$

โดยที่ $\psi = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}$

ตัวประมาณ GLS สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{GLS} = &\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \overline{x}_i)' + \psi T \sum_{i=1}^{N}(\overline{x}_i - \overline{x})(\overline{x}_i - \overline{x})'\right)^{-1} \\ &\times \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \overline{x}_i)(y_{it} - \overline{y}_i) + \psi T \sum_{i=1}^{N}(\overline{x}_i - \overline{x})(\overline{y}_i - \overline{y})\right)\end{aligned} \tag{3.91}$$

โดยที่ $\overline{x}$ คือค่าเฉลี่ยของ x_{it} ทั้งหมดที่ $\overline{x} = (1/(NT))\sum_{i,t} x_{it}$

ที่ $\psi = 0$ ตัวประมาณค่า Fixed effects จะเพิ่มขึ้น เพราะ $\psi \to 0$ ถ้า $T \to \infty$ นั้นเป็นไปตามที่ว่าตัวประมาณค่า Fixed effect และ Random effects จะมีค่าเท่ากันเมื่อค่า T มีจำนวนมาก แต่ถ้า $\psi = 1$ ตัวประมาณค่า GLS จะเท่ากับตัวประมาณ OLS (และ Ω เป็นเม-ทริกซ์ Diagonal)

จากสูตรการคำนวณตัวประมาณ GLS โดยทั่วไป คือ

$$\hat{\beta}_{GLS} = \Delta\hat{\beta}_B + (I_k - \Delta)\hat{\beta}_{FE} \tag{3.92}$$

โดยที่

$$\hat{\beta}_B = \left(\sum_{i=1}^{N} (\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{x}_i - \bar{x})' \right) \sum_{i=1}^{N} (\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y}) \tag{3.93}$$

ดังนั้นจะเรียกค่า β ของตัวประมาณ OLS ในแบบจำลองสำหรับค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวางว่า “Between estimator”

$$\bar{y}_i = \mu + \bar{x}_i'\beta + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i, \qquad i = 1,\dots,N \tag{3.94}$$

ซึ่งเมทริกซ์ Δ คือเมทริกซ์ที่มีการถ่วงน้ำหนัก ที่ตัวประมาณ GLS เป็นเมทริกซ์ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของ Between estimator และ Within estimator โดยที่ตัวถ่วงน้ำหนักขึ้นอยู่กับค่าความสัมพันธ์ของความแปรปรวนระหว่างตัวประมาณค่าทั้งสอง

สำหรับตัวประมาณ GLS นั้นเป็นการรวมกันของตัวประมาณ Between estimator และ Within estimator ซึ่งโดยทั่วไปตัวประมาณ GLS จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณ OLS ถ้าตัวแปรอธิบายเป็นอิสระต่อ ε_{it} และ α_i ทุกตัว และตัวประมาณ GLS จะไม่มีการเอนเอียง (Unbiased) และไม่เปลี่ยนแปลง (Consistent) ที่ค่า N หรือ T (หรือทั้ง N และ T) มีค่าเข้าสู่อนันต์ (Infinity) ภายใต้ $E\{\bar{x}_i\varepsilon_{it}\} = 0$ และ

$$E\{\bar{x}_i\alpha_i\} = 0 \tag{3.95}$$

โดยจะใช้เงื่อนไขดังกล่าวเพื่อทำให้ Between estimator ไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Consistent)

วิธีการคำนวณหาตัวประมาณ GLS จะมีการเปลี่ยนแปลงแบบจำลองดังนี้

$$(y_{it} - \vartheta\bar{y}_i) = \mu(1-\vartheta) + (x_{it} - \bar{x}_i')'\beta + u_{it} \tag{3.96}$$

โดยที่ $\vartheta = 1 - \psi^{1/2}$ ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนในรูปแบบการเปลี่ยนแปลงนี้เป็น i.i.d ที่ค่า $\psi = 0$ นั้นจะสอดคล้องกับ Within estimator $(\vartheta = 1)$ และสัดส่วนที่คงที่ (ϑ) ของค่าเฉลี่ยแต่ละหน่วยภาคตัดขวางคือการลบข้อมูลที่ได้จากแบบจำลองที่มีการเปลี่ยนแปลงข้อมูล $(0 \le \vartheta \le 1)$

การใช้ตัวประมาณ GLS ที่มีความเหมาะสมจะต้องคำนวณหาค่าความแปรปรวนก่อน ซึ่งตัวประมาณ σ_ε^2 สามารถหาได้จากสมการ (3.86) ดังนั้นค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน $\sigma_\alpha^2 + (1/T)\sigma_\varepsilon^2$ สามารถประมาณค่าได้จาก

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \hat{\mu}_B - \bar{x}_i'\hat{\beta}_B\right)^2 \tag{3.97}$$

โดยที่ $\hat{\mu}_B$ คือ Between estimation ของ μ

จากสมการ (97) ตัวแปรที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของ σ_{α}^{2} จะเป็นไปตาม

$$\hat{\sigma}_{\alpha}^{2} = \hat{\sigma}_{B}^{2} - \frac{1}{T}\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} \tag{3.98}$$

ซึ่งสามารถปรับค่าตัวประมาณนี้โดยการปรับปรุงค่าระดับความเป็นอิสระ (Degree of freedom) ให้ถูกต้อง โดยนำ $K+1$ ลบกับตัวหารในสมการ (3.97) ผลของตัวประมาณ EGLS จะเป็นตัวประมาณ Random effect ของ β (และ μ) คือแทนค่า β เท่ากับ $\hat{\beta}_{RE}$ หรือที่รู้จักในชื่อของตัวประมาณ Balestra-Nerlove (Verbeek, 2004: 347-351)

3. การประมาณค่าแบบ Pooled Estimator

เป็นการวิเคราะห์ที่สมมติให้ค่าคงที่และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการมีค่าเท่ากันทุกหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) และช่วงเวลา (Time) ที่พิจารณา ซึ่งไม่ได้ประมาณค่าความแตกต่างระหว่างแต่ละหน่วยภาคตัดขวางและช่วงเวลาที่พิจารณา โดยมีแบบจำลองพื้นฐานตามสมการ (กรรณิการ์ ดวงเนตร, 2553)

แบบจำลองของ Pooled OLS คือ

$$y_{it} = \alpha_i + x_{it}'\beta_{it} + \varepsilon_{it} \tag{3.99}$$

โดยที่ i คือ ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1,...,N$

t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1,...,T$

y_{it} คือ เวกเตอร์ 1×1 ของตัวแปรตาม

α_i คือ จำนวนจริง (ค่าคงที่)

x_{it} คือ เวกเตอร์ $k\times 1$ ของตัวแปรอธิบาย

β_{it} คือ เวกเตอร์ $k\times 1$ ของค่าสัมประสิทธิ์

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

สมมติฐานที่แตกต่างระหว่างแบบจำลอง Fixed effects, แบบจำลอง Random effects และ Pooled OLS แสดงได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 3.1 แสดงความแตกต่างระหว่าง แบบจำลอง Fixed effects, แบบจำลอง Random effects และ Pooled OLS

วิธีการ	**สมมติฐานเกี่ยวกับค่า** β
Fixed Effects	$\beta_{it} = \beta_i$ โดยที่ $E(\beta_i, X_{it}) \neq 0$
Random Effects	$\beta_{it} = \beta + \varepsilon_i$ โดยที่ $E(\varepsilon_i, X_{it}) = 0$
Pooled OLS	$\beta_{it} = \beta$

3.2.4 การทดสอบสมการพาแนล (Panel equation testing)

การทดสอบสมการพาแนล เป็นการทดสอบว่าควรทำการประมาณแบบจำลองในรูปแบบใด ระหว่าง Pooled estimator, Fixed effects หรือ Random effects โดยทำการทดสอบ 3 วิธี คือ Lagrange multiplier test (LM-Test), Hausman test และ Redundant Fixed effects test ดังนี้

1. วิธีการทดสอบแบบ Lagrange multiplier (LM-test)

เป็นการทดสอบว่าควรประมาณแบบจำลองในรูปแบบใดระหว่าง Random effects และ Pooled estimator โดย Baltagi et al. (1992b) ได้เสนอการทดสอบเงื่อนไขผลกระทบแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual effects condition) เกี่ยวกับผลกระทบที่เกิดเฉพาะช่วงเวลา (Time-specific effects) ที่ $\sigma_\lambda^2 > 0$ (Baltagi, 2008)

ที่มีสมมติฐานหลักในการทดสอบคือ

$$H_0^d : \sigma_\mu^2 = 0$$

ค่าสถิติการทดสอบด้วยวิธี Lagrange multiplier คือ

$$\mathrm{LM}_\mu = \frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_2^2\tilde{\sigma}_2^2}{\sqrt{T(T-1)\left[\tilde{\sigma}_v^4 + (N-1)\tilde{\sigma}_v^4\right]}}\tilde{D}_\mu \tag{3.100}$$

และ

$$\tilde{D}_\mu = \frac{T}{2}\left\{\frac{1}{\tilde{\sigma}_2^2}\left[\frac{\tilde{u}'(\bar{J}_N \otimes \bar{J}_T)\tilde{u}}{\tilde{\sigma}_2^2} - 1\right] + \frac{(N-1)}{\tilde{\sigma}_v^2}\left[\frac{\tilde{u}'(E_N \otimes \bar{J}_T)\tilde{u}}{(N-1)\tilde{\sigma}_v^2} - 1\right]\right\} \tag{3.101}$$

โดยที่ $\tilde{\sigma}_2^2 = \tilde{u}'(\bar{J}_N \otimes I_T)\tilde{u}/T$ และ $\tilde{\sigma}_v^2 = \tilde{u}'(E_N \otimes I_T)\tilde{u}/T(N-1)$ ซึ่ง LM_μ มีการกระจายตัวแบบ Asymptotically $N(0,1)$ และการประมาณค่าตัวรบกวน $\tilde{u}$ หาได้จากส่วนที่เหลือจากการประมาณ GLS ในทิศทางเดียวโดยใช้ Maximum likelihood ประมาณ $\tilde{\sigma}_v^2$ และ $\tilde{\sigma}_2^2$

ในการทดสอบด้วยวิธี Lagrange multiplier ภายใต้สมมติฐาน $H_0^e : \sigma_\lambda^2 = 0$ ที่ $\sigma_\mu^2 > 0$ คือ

$$\mathrm{LM}_\lambda = \frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_1^2\tilde{\sigma}_2^2}{\sqrt{N(N-1)\left[\tilde{\sigma}_v^4 + (T-1)\tilde{\sigma}_1^4\right]}}\tilde{D}_\lambda \tag{3.102}$$

และ

$$\tilde{D}_{\lambda} = \frac{N}{2}\left\{\frac{1}{\tilde{\sigma}_2^2}\left[\frac{\tilde{u}'\left(\bar{J}_N \otimes \bar{J}_T\right)\tilde{u}}{\tilde{\sigma}_1^2} - 1\right] + \frac{(T-1)}{\tilde{\sigma}_v^2}\left[\frac{\tilde{u}'\left(\bar{J}_N \otimes E_T\right)\tilde{u}}{(T-1)\tilde{\sigma}_v^2} - 1\right]\right\} \qquad (3.103)$$

โดยที่ $\tilde{\sigma}_1^2 = \tilde{u}'\left(I_N \otimes \bar{J}_T\right)\tilde{u}/N$ และ $\tilde{\sigma}_v^2 = \tilde{u}'\left(I_N \otimes E_T\right)\tilde{u}/N(T-1)$ ซึ่ง LM_{λ} มีการกระจายตัวแบบ Asymptotically distributed ภายใต้สมมติฐานหลัก H_0^e

ถ้าผลการทดสอบยอมรับสมมติฐานหลัก แสดงว่าควรทำการประมาณค่าแบบจำลองโดยใช้ Pooled Estimator แต่ถ้าปฏิเสธสมมติฐานหลักควรทำการประมาณโดยใช้ Random Effects

2. วิธีทดสอบแบบ Hausman

เป็นการทดสอบว่าควรทำการประมาณแบบจำลองในรูปแบบใดระหว่าง Fixed Effects หรือ Random Effects โดยมีสมมติฐานที่สำคัญคือ ส่วนประกอบของค่าความคลาดเคลื่อนในแบบจำลองการถดถอยไม่มีความสัมพันธ์กับ X_{it} คือ $E\left(u_{it}/X_{it}\right)=0$ ที่มีการกำหนดให้พจน์รบกวน $\left(\mu_i\right)$ มีผลต่อแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) ซึ่งไม่สามารถหาค่าได้และมีความสัมพันธ์กับ X_{it}

ในกรณีที่ $E\left(u_{it}/X_{it}\right)\neq 0$ และตัวประมาณ GLS $\left(\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}\right)$ จะมีความเอนเอียง (Biased) และมีการเปลี่ยนแปลง (Inconsistent) สามารถกำจัดค่า μ_i ได้โดยใช้ Within estimator $\left(\tilde{\beta}_{\mathrm{Within}}\right)$ ที่ไม่เอนเอียง (Unbiased) และไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Consistent) (Baltagi, 2008: 72-73)

Hausman (1978) ทำการเปรียบเทียบ $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}$ และ $\tilde{\beta}_{\mathrm{Within}}$ ได้ผลว่าตัวประมาณทั้งสองมีความแตกต่างกันในข้อจำกัดของความน่าจะเป็นคือ $\tilde{\beta}_{\mathrm{Within}}$ จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง (Consistent) ทั้งในกรณีที่ยอมรับสมมติฐานหลัก $H_0: E\left(u_{it}/X_{it}\right)=0$ และปฏิเสธสมมติฐานหลัก แต่ $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}$ ในกรณีที่ปฏิเสธสมมติฐานหลักตัวประมาณจะมีการเปลี่ยนแปลง (Unconsistent)

ดังนั้นการทดสอบโดยทั่วไปจะเป็นไปตาม $\hat{q}_1 = \hat{\beta}_{\mathrm{GLS}} - \tilde{\beta}_{\mathrm{Within}}$ ซึ่ง $\operatorname{plim}\hat{q}_1 = 0$ ถ้า $\operatorname{cov}\left(\hat{q}_1, \hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}\right)=0$

โดยที่ $$\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}} - \beta = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}u$$

$$\tilde{\beta}_{\mathrm{Within}} - \beta = \left(X'QX\right)^{-1} X'Qu$$

จะได้ค่า $E\left(\hat{q}_1\right)=0$ และ

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}},\hat{q}_1\right) &= \operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}\right)-\operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}},\tilde{\beta}_{\text{Within}}\right)\\ &=\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}-\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}X'\Omega^{-1}E\left(uu'\right)QX\left(X'QX\right)^{-1} \qquad (3.104)\\ &=\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}-\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1}=0\end{aligned}$$

จาก $\tilde{\beta}_{\text{Within}}=\hat{\beta}_{\text{GLS}}-\hat{q}_1$ และ $\operatorname{var}\left(\tilde{\beta}_{\text{Within}}\right)=\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}\right)+\operatorname{var}\left(\hat{q}_1\right)$ ที่ค่า $\operatorname{cov}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}},\hat{q}_1\right)=0$ จะได้

$$v\operatorname{ar}\left(\hat{q}_1\right)=\operatorname{var}\left(\tilde{\beta}_{\text{Within}}\right)-\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_{\text{GLS}}\right)=\sigma_v^2\left(X'QX\right)^{-1}-\left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} \qquad (3.105)$$

ดังนั้นค่าสถิติการทดสอบ Hausman คือ

$$m_1=\hat{q}_1'\left[\operatorname{var}\left(\hat{q}_1\right)\right]^{-1}\hat{q}_1 \qquad (3.106)$$

ถ้าผลการทดสอบยอมรับสมมติฐานหลัก แสดงว่าควรทำการประมาณค่าแบบจำลองโดยใช้ Random effects แต่ถ้าปฏิเสธสมมติฐานหลักควรทำการประมาณโดยใช้ Fixed effects

3. วิธีการทดสอบแบบ Redundant fixed effects

Moulton and Randolph (1989) ได้เสนอว่า Anova F-test ที่ใช้ทดสอบ Fixed Effects เหมาะสำหรับทดสอบแบบจำลอง One-way Error Component โดยมีสมมติฐานหลักในการทดสอบคือ

$$H_0^a:\sigma_\mu^2=0$$

ดังนั้นสมการในรูปทั่วไปคือ

$$F=\frac{y'MD\left(D'MD\right)-D'My/\left(p-r\right)}{y'Gy/\left[NT-\left(\tilde{k}+p-r\right)\right]} \qquad (3.107)$$

ภายใต้สมมติฐานหลักที่มีการกระจายตัวแบบ F-distribution มีระดับความเป็นอิสระ $p-r$ และ $NT-\left(\tilde{k}+p-r\right)$และ $D=I_N\otimes\iota_T$, $M=\bar{P}_Z$, $\tilde{k}=K'$, $p=N$, $r=K'+N-\operatorname{rank}\left(Z,D\right)$ และ $G=\bar{P}_{(Z,D)}$ โดยที่ $\bar{P}_Z=I-P_Z$ และ $P_Z=Z\left(Z'Z\right)^{-1}Z'$

การทดสอบ One-side likelihood ration (LR) จะมีการทดสอบดังนี้

$$LR=-2\log\frac{l\left(res\right)}{l\left(unres\right)} \qquad (3.108)$$

โดยที่ $l(res)$ คือ ค่า Maximum likelihood ที่มีข้อจำกัด และ $l(unres)$ คือค่า Maximum likelihood ที่ไม่มีข้อจำกัด ภายใต้สมมติฐานหลักที่ทำการทดสอบ LR test มีการกระจายตัวแบบ Asymptotic distribution

3.2.5 การประมาณแบบจำลองพาแนล (Panel estimation)

1. วิธีการประมาณค่าแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square: OLS)

เป็นการประมาณค่าเส้นถดถอยที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธี OLS โดยการทำให้ผลบวกของกำลังสองของค่าความคลาดเคลื่อน (Error term) มีค่าน้อยที่สุด จากสมการ OLS

$$\hat{\beta}_{OLS} = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(X_{it} - \bar{X}_i \right)^2 \right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(X_{it} - \bar{X}_i \right)\left(Y_{it} - \bar{Y}_i \right) \tag{3.109}$$

โดยที่ i คือ ข้อมูลภาคตัดขวาง $i = 1, \ldots, N$

t คือ ข้อมูลอนุกรมเวลา $t = 1, \ldots, T$

Y_{it} คือ ตัวแปรตาม

X_{it} คือ ตัวแปรอธิบาย

$\bar{Y}_{it}$ คือ ค่าเฉลี่ยของ Y_{it}

$\bar{X}_i$ คือ ค่าเฉลี่ยของ X_{it}

2. วิธีกำลังสองน้อยที่สุดเชิงพลวัตร (Dynamic Ordinary Least Square: DOLS)

เป็นการประมาณการแบบ OLS ที่มีการเพิ่มการประมาณแบบพลวัตรเข้าไปในสมการ OLS จึงเรียกว่าการประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงเชิงพลวัตรแบบกำลังสองน้อยที่สุด (DOLS) จากสมการ

จากสมการพื้นฐาน

$$y_{it} = x_{it}'\beta + \sum_{k=K_i}^{K_i} \gamma_{ik} \Delta x_{it-k} + \varepsilon_{it} \tag{3.110}$$

สมการประมาณค่า จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเชิงพลวัตร (DOLS) ได้จาก

$$\hat{\beta}_{OLS} = \left[N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{t=1}^{T} z_{it} z_{it}' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} z_{it} \tilde{y}_{it} \right) \right] \tag{3.111}$$

โดยที่ $z_{it} = 2(K+1)x1$ และ $\tilde{y}_{it}{}' = y_{it} - \bar{y}_{it}$

3. วิธีการโมเมนต์ในรูปทั่วไป (Generalized method of moments: GMM)

วิธีนี้เสนอโดย Hansen (1982) เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยตรงจาก Moment condition ที่ใส่ในแบบจำลอง

จากสมการพื้นฐาน

$$y_{it} = x_{it}'\beta + z_{it}'\gamma + u_{it} \tag{3.112}$$

จากสมการ (112) สามารถเขียนได้เป็น

$$y_{it} - y_{it-1} = \beta'\left(x_{it} - x_{it-1}\right) + \gamma'\left(z_{it} - z_{it-1}\right) + \left(u_{it} - u_{it-1}\right) \tag{3.113}$$

โดยที่ $i = 1,\ldots,n$ และ $t = 2,\ldots,T_i$

สมการ (3.113) ถ้า $y_{it-1} - y_{it-2}$ มีความสัมพันธ์กับค่าความคลาดเคลื่อน $\left(u_{it} - u_{it-1}\right)$ จะทำให้การประมาณมีความเอนเอียงมากขึ้น ดังนั้นในกรณีนี้การประมาณค่าด้วยวิธี DOLS จะมีความเหมาะสมกว่า

แต่ถ้ามีการใช้เครื่องมือ (Instrument) ที่ถูกต้องการประมาณด้วยวิธี GMM จะมีประสิทธิภาพกว่าในการประมาณค่าสมการ โดยทั่วไปจะมีการใส่ค่าความล่าช้า (Lag) ของตัวแปรตามสองช่วงเวลาที่ y_{it-2} นั้นจะไม่มีความสัมพันธ์กับ $\left(u_{it} - u_{it-1}\right)$ ดังนั้น ค่าของ y_{it-k} , $k \geq 2$ จึงเป็นเครื่องมือ ที่เหมาะสม

3.2.6 การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน (Panel Cointegration Test)

เป็นการทดสอบหาความสัมพันธ์ในระยะยาวของตัวแปรของตัวอธิบายและตัวแปรตาม โดยการทดสอบที่ใช้มีทั้งหมด 3 วิธีดังนี้

1. การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Residual-Based DF and ADF หรือการทดสอบพาแนบโคอินทิเกรชันแบบ Kao (1999) (Kao test)

จากสมการถดถอยแบบพาแนล

$$y_{it} = x_{it}'\beta + z_{it}'\gamma + e_{it} \tag{3.114}$$

โดยที่ y_{it} และ x_{it} เป็น $I(1)$ และ $z_{it} = \{\mu_i\}$ การทดสอบแบบ DF-type สามารถคำนวณได้จากส่วนที่เหลือของ Fixed effects

$$\hat{e}_{it} = \rho\hat{e}_{it-1} + v_{it} \tag{3.115}$$

โดยที่ $\hat{e}_{it} = \tilde{y}_{it} - \tilde{x}_{it}\hat{\beta}$ และ $\tilde{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$ ในการทดสอบนี้ใช้วิธีประมาณค่าด้วย OLS ประมาณค่าสัมประสิทธิ์ ρ และ t-statistic จากสมการ

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}\hat{e}_{it}\hat{e}_{it-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}\hat{e}_{it}^{2}} \tag{3.116}$$

และ

$$t_{\rho} = \frac{(\hat{\rho}-1)\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}e_{it-1}^{2}}}{s_e} \tag{3.117}$$

ซึ่ง $s_e^2 = \frac{1}{NT}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}\left(\hat{e}_{it} - \hat{\rho}\hat{e}_{it-1}\right)^2$

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบแบบ DF มีทั้งหมด 4 แบบ โดยสมมติฐานหลักของการทดสอบคือ $H_0 : \rho = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

$$DF_{\rho} = \frac{\sqrt{N}T(\hat{\rho}-1) + 3\sqrt{N}}{\sqrt{10.2}} \tag{3.118}$$

$$DF_t = \sqrt{1.25}t_{\rho} + \sqrt{1.875N} \tag{3.119}$$

$$DF_{\rho}^{*} = \frac{\sqrt{N}T(\hat{\rho}-1) + \frac{3\sqrt{N}\hat{\rho}_v^2}{\hat{\rho}_{0v}^2}}{\sqrt{3 + \frac{36\hat{\rho}_v^4}{\hat{\rho}_{0v}^4}}} \tag{3.120}$$

$$DF_t^{*} = \frac{t_{\rho} + \frac{\sqrt{6N}\hat{\sigma}_v}{2\hat{\sigma}_{0v}}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{0v}^2}{2\sigma_v^2} + \frac{3\hat{\sigma}_v^2}{10\sigma_{0v}^2}}} \tag{3.121}$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_v^2 = \hat{\Sigma}_{yy} - \hat{\Sigma}_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}$ และ $\sigma_{0v}^2 = \hat{\Omega}_{yy} - \hat{\Omega}_{yx}\hat{\Omega}_{xx}^{-1}$

ซึ่งค่าสถิติ DF_{ρ}, DF_t พิจารณาจากความสัมพันธ์จากภายนอกของตัวถดถอยกับค่าความคลาดเคลื่อนและค่าสถิติ DF_{ρ}^{*}, DF_t^{*} พิจารณาจากความสัมพันธ์ภายในของตัวถดถอยกับค่าความคลาดเคลื่อน สำหรับค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบแบบ ADF สามารถประมาณค่าได้จากการถดถอยดังนี้

$$\hat{e}_{it} = \rho\hat{e}_{it-1} + \sum_{j=1}^{p}\vartheta_j\Delta\hat{e}_{it-j} + v_{itp} \tag{3.122}$$

ดังนั้นค่าสถิติ ADF คือ

$$ADF = \frac{t_{ADF} + \dfrac{\sqrt{6N}\hat{\sigma}_v}{2\hat{\sigma}_{0v}}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}_{0v}^2}{2\hat{\sigma}_v^2} + \dfrac{3\hat{\sigma}_v^2}{10\hat{\sigma}_{0v}^2}}} \quad (3.123)$$

โดยที่ t_{ADF} คือ t-statistic ของ ρ จากสมการ $\hat{e}_{it} = \rho\hat{e}_{it-1} + \sum_{j=1}^{p}\vartheta_j \Delta\hat{e}_{it-j} + v_{itp}$ โดยสมมติฐานหลักของการทดสอบคือ $H_0 : \rho = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

2. การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Pedroni (Engle-Granger based)

การทดสอบโคอินทิเกรชันซึ่ง Pedroni (1999, 2000) และ Kao (1995) ได้ทำการศึกษาตามแบบของ Engle-Granger (1987) จะทำการทดสอบจากส่วนที่เหลือ (Residual) ถ้าตัวแปรมีโคอินทิเกรชัน ส่วนที่เหลือที่ได้จะเป็น I(0) แต่ถ้าตัวแปรไม่มีโคอินทิเกรชัน ส่วนที่เหลือที่ได้จะเป็น I(1) Pedroni เสนอวิธีการทดสอบโคอินทิเกรชันที่สมมติให้ค่าคงที่ (Intercept) และค่าแนวโน้ม (Trend) มีความแตกต่างกันระหว่างข้อมูลแต่ละหน่วย จากสมการ

$$y_{it} = \alpha_i + \delta_i t + \beta_{1i}x_{1i,t} + \beta_{2i}x_{2i,t} + \ldots + \beta_{Mi}x_{Mi,t} + e_{i,t} \quad (3.124)$$

โดยที่ $t = 1,\ldots,T$, $i = 1,\ldots,N$, $m = 1,\ldots M$ และกำหนดให้ x , y นิ่งที่ I(1) ค่า α_i , δ_i คือค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้ม (Intercept and Trend) ตามลำดับ เมื่อถดถอยสมการ (3.124) จะได้ส่วนที่เหลือ (Residual) จากนั้นทำการทดสอบส่วนที่เหลือดังกล่าวว่าเป็น I(1) โดยการถดถอยจากสมการ

$$e_{it} = \rho_i e_{it-1} + u_{it} \quad (3.125)$$

หรือ

$$e_{it} = \rho_i e_{it-1} + \sum_{j=1}^{p_i}\psi_{it}\Delta e_{it-j} + \upsilon_{it} \quad (3.126)$$

ซึ่งในแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง มีการแบ่งสมมติฐานทางรอง (Alternative hypothesis) ออกเป็น 2 อย่างคือ

กรณีที่ข้อมูลภาคตัดขวางทุกหน่วยมีลักษณะเหมือนกัน (Homogeneous)

$H_0 : \rho_i = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

$H_a : (\rho_i = \rho) < 1$ (มีโคอินทิเกรชัน)

กรณีที่ข้อมูลภาคตัดขวางแต่ละหน่วยมีลักษณะแตกต่างกัน (Heterogeneous)

$H_0 : \rho_i = 1$ (ไม่มีโคอินทิเกรชัน)

$H_a : \rho_i < 1$ (มีโคอินทิเกรชัน)

โดยค่าสถิติในการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน $\aleph_{N,T}$ คำนวณจากส่วนที่เหลือในสมการ (3.125) และ (3.126) Pedroni แสดงให้เห็นว่าค่าสถิติมีการแจกแจงแบบ Asymptotically ดังนี้

$$\frac{\aleph_{N,T} - \mu\sqrt{N}}{\sqrt{\upsilon}} \Rightarrow N(0,1) \quad (3.127)$$

โดยที่ μ และ υ คือ Adjustment term ที่สร้างโดยวิธี Monte Carlo

3. การทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Fisher (Fisher test)

ได้อ้างอิงแนวคิดการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชันแบบ Johansen ซึ่ง Fisher (1932) ได้เสนอการทดสอบที่รวบรวมการทดสอบแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (Individual) ต่อมา Maddala and Wu (1999) ได้พัฒนาการทดสอบของ Fisher (1932) ในการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน โดยการรวบรวมการทดสอบข้อมูลแต่ละหน่วยภาคตัดขวางเพื่อให้ได้การทดสอบทางสถิติแบบกลุ่ม (Full panel)

$$2\sum_{i=1}^{N} \log(\pi_i) \rightarrow \chi^2_{2n} \quad (3.128)$$

โดยที่ π_i คือ $p-value$ จากการทดสอบโคอินทิเกรชันแต่ละตัว สำหรับข้อมูลตัดขวาง i ภายใต้สมมติฐานหลักการทดสอบพาแนลโคอินทิเกรชัน

3.2.7 การหาความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะสั้น (Error Correction Mechanism: ECM)

การทดสอบ ECM เป็นการทดสอบที่ใช้อย่างแพร่หลายในการวิเคราะห์ความผันผวนในระยะสั้น เมื่อตัวแปรมีลักษณะไม่นิ่งและไม่มีปัญหาความสัมพันธ์ไม่แท้จริง (Spurious Regression) ซึ่งสามารถเขียนแบบจำลอง ECM โดยทั่วไปได้ดังนี้

$$\Delta Y_{it} = \alpha_1 + \alpha_2 u_{it-1} + \alpha_3 \Delta X_{it} + \alpha_4 \sum_{h=1}^{p} \Delta X_{it-h} + \alpha_5 \sum_{j=0}^{q} \Delta Y_{it-j} + \varepsilon_{it} \quad (3.129)$$

โดยที่ Δ คือ ผลต่างระดับที่ 1 (1st Difference)

ε_{it} คือ ตัวแปรความคลาดเคลื่อนแบบสุ่ม

$u_{it-1} = (Y_{it-1} - \beta_1 - \beta_2 X_{it-1})$ คือ ตัวแปรความคลาดเคลื่อนของการถดถอยหนึ่งช่วงเวลาของ Panel cointegrating

จากสมการ (3.129) ΔY ขึ้นอยู่กับ ΔX และค่าความคลาดเคลื่อนดุลยภาพ ถ้าค่าความคลาดเคลื่อนดุลยภาพไม่เท่ากับศูนย์แบบจำลองก็จะออกจากดุลยภาพ ถ้าสมมติให้ ΔY เท่ากับศูนย์

และ u_{it-1} มีค่าเป็นบวก หมายความว่า Y_{it-1} จะมีค่ามากกว่าดุลยภาพ หลังจากนั้นถ้า α_2 มีค่าเป็นลบทำให้ตัวแปร $\alpha_2 u_{it-1}$ มีค่าเป็นลบด้วย จึงทำให้ ΔY_{it} มีค่าลดลงเพื่อกลับเข้าสู่ดุลยภาพ

ดังนั้นถ้า Y_{it} มีค่าสูงกว่าจุดดุลยภาพ ค่าความคลาดเคลื่อนก็จะถูกขจัดออกไปเพื่อให้ Y_{it} กลับเข้าสู่ดุลยภาพในระยะยาวต่อไป (ขจรพรรณ วณิชมหานนท์, 2553)

3.2.8 การทดสอบความเป็นเหตุเป็นผล (Granger causality test)

Granger causality (GC) test เป็นเครื่องมือทางเศรษฐมิติที่คิดค้นโดย Granger (1969) ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการ Cointegration ที่ใช้หาความสัมพันธ์การเป็นเหตุเป็นผลกัน โดยใช้ตัวแปรนั้น ๆ ในช่วงเวลาก่อนหน้ามาอธิบายความสัมพันธ์ทางเศรษฐศาสตร์ระหว่างตัวแปรสองตัวว่าตัวแปรใดเป็นสาเหตุ และตัวแปรใดเป็นตัวที่เป็นผลกระทบที่เกิดจากตัวแปรนั้น

ในการทดสอบ Granger causality แบบพาแนลจะต้องมีการระบุความสัมพันธ์ของตัวแปรก่อน โดยมีสมมติฐานหลักคือไม่มีความเป็นเหตุเป็นผลกันระหว่างตัวแปร ดังนั้นจะได้สมการการทดสอบตามแบบจำลองเชิงเส้นดังนี้ (Chen et al., 2007)

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{J} \delta_i^j \Delta y_{it-j} + \sum_{j=1}^{J} \beta_i^j \Delta x_{it-j} + \lambda_{it} ECT_{it-1} + \varepsilon_{yit} \qquad (3.130)$$

$$\Delta x_{it} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{J} \delta_i^j \Delta x_{it-j} + \sum_{j=1}^{J} \beta_i^j \Delta y_{it-j} + \lambda_{it} ECT_{it-1} + \varepsilon_{xit} \qquad (3.131)$$

โดยที่ Δ คือ ผลต่างระดับที่หนึ่ง (1st Difference)

ECT คือ Error Correction term ที่ได้จากการประมาณค่าแบบจำลองความสัมพันธ์ระยะยาว

ε_{it} คือ ค่าความคลาด

3.3 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาความสัมพันธ์การใช้จ่ายทางการทหารและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ สามารถแยกได้เป็นสี่ประเภท คือ ลำดับแรก เป็นการศึกษาโดยใช้แบบจำลองของ Feder-Ram (1986) จากนั้นเป็นการศึกษาโดยใช้แบบจำลองการเจริญเติบโตของคลาสสิก ลำดับสามเป็นการศึกษาโดยใช้แบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายใน และสุดท้ายเป็นการศึกษาเปรียบเทียบแบบจำลองทั้งสามข้างต้น

จุดเริ่มต้นของการศึกษาเกี่ยวกับการใช้จ่ายทางการทหารและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจคือการศึกษาโดยใช้แบบจำลองของ Feder-Ram (The Feder-Ram Model) แบบจำลองนี้มีพื้นฐานมา

จากฟังก์ชั่นการผลิตของ Feder (1983) ที่ทำการศึกษาว่าการส่งออกมีผลกระทบต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจอย่างไร และได้มีการเพิ่มเติมแบบจำลองโดย Biswas และ Ram (1986) ที่รวมตัวแปรค่าใช้จ่ายในการป้องกันประเทศเข้าไป โดยพิจารณาสองภาคเศรษฐกิจคือ ผลผลิตด้านการทหารและผลผลิตของพลเรือนซึ่งใช้ปัจจัยทุนและแรงงานเหมือนกัน Wilkins (2004) ได้ทำการประมาณเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าใช้จ่ายในการป้องกันประเทศและความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจจำนวน 85 ประเทศตั้งแต่ปี 1988 ถึงปี 2002 โดยใช้วิธีการ Fixed effects และ Random effects ทำการศึกษา 85 ประเทศ แล้วแยกศึกษาออกเป็น 5 ภูมิภาคโดยแบ่งตามลักษณะทางภูมิศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า GDP ที่เป็นฟังก์ชั่นของ ทุน แรงงาน และค่าใช้จ่ายในการป้องกันประเทศนั้นมีผลลัพธ์ในทิศทางเดียวกันกับทุนและแรงงาน แต่กรณีของค่าใช้จ่ายในการป้องกันประเทศมีผลที่เฉพาะของแต่ละประเทศ

เนื่องจากข้อจำกัดและความผิดพลาดบางประการของแบบจำลอง Feder-Ram ต่อมาได้มีการพัฒนาแบบจำลองที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการใช้จ่ายทางการทหารและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ โดยพัฒนาแบบจำลองที่มีพื้นฐานมาจาก Augmented Solow growth model with Harrod-neutral technical progress ซึ่งแบบจำลองนี้มีสมมติฐานที่สำคัญคือ สัดส่วนของการใช้จ่ายทางการทหารส่งผลต่อประสิทธิภาพการผลิตผ่านทางผลของ Labour-augmenting technical change การศึกษาที่ใช้แบบจำลอง Augmented Solow growth model ได้แก่ Dunne (2010) ทำการวิเคราะห์เชิงประจักษ์ถึงผลกระทบของการใช้จ่ายทางการทหารที่มีต่อเศรษฐกิจของประเทศในแถบแอฟริกาตอนใต้ (Sub Saharan African: SSA) ทั้งหมด 35 ประเทศ โดยใช้ข้อมูลพาเนลเป็นรายปีตั้งแต่ปี 1988 ถึงปี 2006 ทำการวิเคราะห์โดยแบ่งการศึกษาออกเป็นประเทศใน SSA ที่มีสงครามและประเทศใน SSA ที่ไม่มีสงคราม ด้วยวิธีการ Dynamic first order model และ Fixed effects method ผลการศึกษาพบว่า การใช้จ่ายทางการทหารเกิดผลกระทบทางลบต่อการเจริญเติบโตเฉพาะประเทศใน SSA ที่มีสงครามในระยะสั้นอย่างมีนัยสำคัญ แต่ในระยะยาวนั้นผลที่ได้ไม่ปรากฏชัดเจน

ซึ่งมีความสอดคล้องกับการศึกษาของ Dunne (2011) ที่ทำการศึกษาผลกระทบการใช้จ่ายทางการทหาร, การเจริญเติบโต, การพัฒนาและสงคราม โดยใช้ข้อมูลพาเนลเป็นรายปีตั้งแต่ปี 1988 ถึงปี 2006 ทำการศึกษาด้วยวิธีการ Fixed effects เมื่อทำการศึกษา 126 ประเทศทั่วโลกพบว่าการใช้จ่ายทางการทหารมีผลกระทบทางลบต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจในระยะสั้น และเมื่อทำการศึกษาโดยแบ่งประเทศที่ทำการศึกษาตามเกณฑ์ของรายได้พบว่า กลุ่มประเทศที่มีรายได้มากกว่ารายได้เฉลี่ยและกลุ่มประเทศที่มีรายได้ต่ำการใช้จ่ายทางการทหารมีผลกระทบทางลบต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ

ลำดับสามเป็นการศึกษาที่ใช้แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจจากภายใน (Endogenous growth model) ที่ได้มีการพัฒนาจากแบบจำลองของ Barro (1990) ที่ได้ศึกษาจุดที่เหมาะสมที่จะทำให้เกิดสวัสดิการสังคมสูงสุด โดยรวมการบริการสาธารณะเป็นปัจจัยหนึ่งของฟังก์ชั่นการผลิตส่วนบุคคล Barro แสดงให้เห็นว่าจุดที่เหมาะสมที่รัฐบาลเก็บภาษีได้มากที่สุดคือจุดที่สังคมได้รับสวัสดิการสูงสุดเช่นเดียวกัน Shieh et al. (2001) ทำการศึกษาเพื่อดูการจัดสรรอัตราการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและสวัสดิการทางสังคมว่ามีการตอบสนองต่อการเพิ่มขึ้นของการใช้จ่ายทางการทหารได้อย่างไร โดยใช้แบบจำลองการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจจากภายใน พบว่า ณ จุดที่ทำให้อัตราการเจริญเติบโตมากที่สุดนั้นสัดส่วนของค่าใช้จ่ายในการป้องกันจะมีค่าน้อยกว่าสัดส่วนของสวัสดิการทางสังคม ถ้าในกรณีที่รัฐบาลมีเป้าหมายเพื่อทำให้เกิดการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจแล้วไม่ควรจัดสรรปัจจัยไปใช้จ่ายในภาคการป้องกันประเทศมากจนเกินไป

นอกจากนี้ยังมีการศึกษาเกี่ยวกับขนาดของภาคการทหาร (การป้องกันประเทศ) และการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจโดยใช้แบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายใน จากการศึกษาของ Stroup (2001) ทำการศึกษาอิทธิพลของการใช้จ่ายในการป้องกันประเทศ และแรงงานที่ใช้ในภาคการทหารต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจในประเทศแอฟริกาและลาตินอเมริกาทั้งหมด 44 ประเทศ โดยใช้แบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายในทำการวิเคราะห์ข้อมูลพาแนลรายปี ตั้งแต่ปี 1975 ถึงปี 1989 เพื่อศึกษาผลกระทบส่วนเพิ่มและประสิทธิภาพของผลการวิเคราะห์โดยใช้ข้อมูลพาแนล พบว่าการใช้จ่ายทางการทหารมีอิทธิพลทางลบต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจแต่การใช้แรงงานในภาคทหารนั้นมีอิทธิพลทางบวกต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ

การศึกษาที่ใช้แบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายในทำการศึกษาเกี่ยวกับการใช้จ่ายด้านการทหาร, คอร์รัปชั่นและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจได้แก่ Aizenman et al. (2006) ทำการทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรการใช้จ่ายด้านการทหาร, คอร์รัปชั่นและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของทุกประเทศทั่วโลก โดยใช้ข้อมูลรายปีตั้งแต่ปี 1989 ถึงปี 1998 พบว่าค่าใช้จ่ายทางการทหารที่เกิดจากการรุกรานจากภายนอกจะทำให้การเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจเพิ่มขึ้น แต่ถ้าค่าใช้จ่ายทางการทหารเกิดจากการแสวงหาค่าเช่าทางเศรษฐกิจ (Rent-seeking) หรือการคอร์รัปชั่นจะทำให้การเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจลดลง ผลการศึกษาที่ได้นี้สอดคล้องกับการศึกษาของ d’Agostino et al. (2011) ที่ทำการพิจารณาถึงผลกระทบของคอร์รัปชั่นและการใช้จ่ายทางการทหารต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ โดยทำการวิเคราะห์ผลกระทบทางตรงและผลกระทบต่อการจัดสรรค่าใช้จ่ายของรัฐบาล โดยใช้ข้อมูลรายปีตั้งแต่ปี 2003 ถึงปี 2007 การศึกษาประเทศในแอฟริกาพบว่าการคอร์รัปชั่นทำให้ค่าใช้จ่ายทางการทหารเพิ่มขึ้นและทำให้ค่าใช้จ่ายทางการทหารเกิดผลกระทบทางลบต่ออัตราการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่ามีการใช้แบบจำลองหลายรูปแบบในการศึกษาการใช้จ่ายทางการทหารและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ ทำให้เกิดประเด็นในการศึกษาว่าแบบจำลองในรูปแบบใดที่เหมาะสมที่สุดในการใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าใช้จ่ายทางการทหารและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ Dunne (2001) ศึกษาหาทฤษฎีและประเด็นทางเศรษฐมิติเกี่ยวกับการประมาณแบบจำลองการเจริญเติบโตที่ประกอบไปด้วยการใช้จ่ายทางการทหาร โดยใช้ข้อมูลพาแนลเป็นรายปีจำนวน 28 ประเทศ ตั้งแต่ปี 1960 ถึงปี 1997 ทำการศึกษาด้วยวิธี One and two way fixed effects กับแบบจำลองที่แตกต่างกันคือแบบจำลอง Feder-Ram และแบบจำลอง Solow (Solow growth model with Harrod-neutral technical progress) จากการศึกษาพบว่าแบบจำลอง Feder-Ram ยังคงมีจุดอ่อนและอาจทำให้เกิดข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์ได้ และยังเสนอแนะการว่าการศึกษาโดยใช้ข้อมูลพาแนล (Panel data) โดยเฉลี่ยแล้วจะให้ผลการศึกษาที่ดีกว่าการศึกษาโดยใช้ข้อมูลภาคตัดขวาง (Cross sections data)

Dunne (2004) ได้ทำการศึกษาเพิ่มเติมโดยเพิ่มแบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายใน (Endogenous growth) หรือแบบจำลองที่พัฒนาโดย Barro นำไปเปรียบเทียบกับแบบจำลอง Feder-Ram และแบบจำลอง Solow โดยใช้ข้อมูลพาแนลเป็นรายปีจำนวน 91 ประเทศทั่วโลกตั้งแต่ปี 1989 ถึงปี 1998 วิเคราะห์ Cross-section regression กับแบบจำลองทั้ง 3 รูปแบบ ผลที่ได้นั้นสอดคล้องกับการศึกษาข้างต้นที่ว่า แบบจำลอง Feder-Ram ดูเหมือนจะเป็นแบบจำลองที่มีความเข้มข้นทางทฤษฎีอย่างมากแต่ในส่วนของการประมาณยังมีการเอนเอียง ในส่วนของแบบจำลอง Solow มีจุดอ่อนด้านทฤษฎีเล็กน้อย คือค่อนข้างจะเป็นไปไม่ได้ที่ผลกระทบของการใช้จ่ายทางการทหารจะส่งผ่านทางเทคโนโลยี แต่การประมาณตัวแปรนั้นมีนัยสำคัญต่อการเจริญเติบโต และสุดท้ายแบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายในที่กำหนดให้การคุกคามประเทศเป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อการใช้จ่ายทางการทหาร ถือว่ามีความเป็นไปได้ทั้งในทางทฤษฎีและทางเศรษฐมิติในการประมาณเพื่ออธิบายตัวแปรทั้งสอง ผลที่ได้นี้เป็นไปในทิศทางเดียวกับการศึกษาของ d'Agostino et al. (2010) ที่ทำการประเมินผลกระทบของการใช้จ่ายทางการทหารต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ

ตารางที่ 3.2 สรุปเอกสารและงานวิจัยการศึกษาเกี่ยวกับการใช้จ่ายทางการทหารและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ

ชื่อ	วัตถุประสงค์	ข้อมูล	วิธีการ	สรุป
การศึกษาโดยใช้แบบจำลองของ Feder-Ram (The Feder-Ram Model)				
Wilkins (2004)	ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าใช้จ่ายทางการทหารและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ	ข้อมูลพาแนล 85 ประเทศ ปี 1988-2002	- Fixed effects และ Random effects -แบ่งการศึกษาออกเป็น 5 ทวีป	GDP มีผลในทิศทางเดียวกับทุนและแรงงาน แต่ GDP มีผลกับการใช้จ่ายทางการทหารที่เฉพาะของแต่ละประเทศ
การศึกษาโดยใช้แบบจำลองของ Solow (The Solow growth model)				
Dunne (2010)	วิเคราะห์ผลกระทบของการใช้จ่ายทางการทหารต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ	ข้อมูลพาแนล 35 ประเทศของประเทศในแถบแอฟริกาตอนใต้ (SSA) ปี 1988-2006	- Fixed effects -แบ่งประเทศในแถบแอฟริกาตอนใต้ออกเป็นประเทศที่มีสงครามและประเทศที่ไม่มีสงคราม	การใช้จ่ายทางการทหารเกิดผลกระทบทางลบต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจใน 35 ประเทศในแถบแอฟริกาตอนใต้และประเทศแถบแอฟริกาตอนใต้ ที่มีสงคราม
Dunne (2011)	ศึกษาผลกระทบการใช้จ่ายทางการทหาร, การเจริญเติบโต, การพัฒนา และสงคราม	ข้อมูลพาแนล 126 ประเทศ ปี 1988-2006	-Fixed effects -แบ่งการศึกษาออกตามเกณฑ์ของรายได้	การใช้จ่ายทางการทหารมีผลกระทบทางลบต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจใน 126 ประเทศ,ประเทศที่มีรายได้มากกว่ารายได้เฉลี่ยและประเทศที่มีรายต่ำ

ตารางที่ 3.2 (ต่อ)

ชื่อ	วัตถุประสงค์	ข้อมูล	วิธีการ	สรุป
การศึกษาโดยใช้แบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายใน (Endogenous growth model)				
Shieh et al. (2001)	ศึกษาการจัดสรรอัตราการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและสวัสดิการทางสังคมว่าตอบสนองต่อการเพิ่มขึ้นของการใช้จ่ายทางการทหารอย่างไร	-	ทำการศึกษาแบบจำลองและศึกษาทฤษฎีเพื่ออธิบายผลการศึกษา	อัตราการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจจะมากที่สุดเมื่อสัดส่วนของค่าใช้จ่ายทางการทหารมีค่าน้อยกว่าสัดส่วนของสวัสดิการทางสังคม
Stroup (2001)	ศึกษาอิทธิพลของการใช้จ่ายทางการทหาร และแรงงานที่ใช้ในภาคการทหารต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ	ข้อมูลพาแนลรายปี 44 ประเทศ ปี 1975-1989	ทำการวิเคราะห์ข้อมูลพาแนลเพื่อศึกษาผลกระทบส่วนเพิ่ม	- การใช้จ่ายทางการทหารมีอิทธิพลทางลบต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ -การใช้แรงงานในภาคทหารมีอิทธิพลทางบวกต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ
Aizenman et al. (2006)	แยกผลของการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ,การใช้จ่ายทางการทหารและการคุกคาม	ข้อมูลพาแนลรายปี 85 ประเทศ ปี 1989-1998	Ordinary least square: OLS	-ถ้าการใช้จ่ายทางการทหารที่เกิดจากการคุกคามจากภายนอกจะทำให้การเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 3.2 (ต่อ)

ชื่อ	วัตถุประสงค์	ข้อมูล	วิธีการ	สรุป
d'Agostino et al. (2011)	พิจารณาถึงผลกระทบของคอร์รัปชั่นและการใช้จ่ายทางการทหารต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ	ข้อมูลพาแนลรายปี 53 ประเทศในทวีปแอฟริกา ปี 2003-2007	Generalized method of moments: GMM	การคอร์รัปชั่นทำให้การใช้จ่ายทางการทหารเพิ่มขึ้นและการใช้จ่ายทางการทหารเกิดผลกระทบทางลบต่ออัตราการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ
การศึกษาเปรียบเทียบแบบจำลองแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการใช้จ่ายทางการทหารและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ				
Dunne (2001)	เพื่อเปรียบเทียบแบบจำลอง Feder-Ram และแบบจำลอง Solow	ข้อมูลพาแนลรายปี 28 ประเทศ ปี 1960-1997	One and two way fixed effects	แบบจำลอง Feder-Ram มีจุดอ่อนและอาจทำให้เกิดข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์ได้
Dunne (2004)	เพื่อเปรียบเทียบแบบจำลอง Feder-Ram, แบบจำลอง Solow และแบบจำลองการเจริญเติบโตจากภายใน	ข้อมูลพาแนลรายปี 91 ประเทศ ปี 1989-1998	Cross-section regression	- แบบจำลอง Feder-Ram ได้ผลการประมาณค่าที่เอนเอียง - แบบจำลอง Solow มีจุดอ่อนเรื่องทฤษฎี - แบบจำลอง Endogenous growth มีความเป็นไปได้ในการอธิบายทั้งทางทฤษฎีเศรษฐศาสตร์และศรษฐมิติ