บทที่ 3
ทฤษฎีและแนวคิดที่ใช้ในการศึกษา

ในการศึกษาเพื่อทดสอบแบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุนสำหรับดัชนีบางหมวดในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยจะอ้างถึงทฤษฎี กลุ่มหลักทรัพย์ของ Markowitz แบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (capital asset pricing model: CAPM) การทดสอบความนิ่งของข้อมูล (unit root tests) การประมาณค่าบนพื้นฐานวิธีการของโมเมนต์ (method of moments) การประมาณค่าด้วยวิธีการของโมเมนต์ในรูปทั่วไป (generalized method of moments estimation: GMM) และการทดสอบข้อจำกัดของสัมประสิทธิ์ด้วยวิธี Wald test ตามลำดับ

3.1 ทฤษฎีกลุ่มหลักทรัพย์ของ Markowitz

สถาบันพัฒนาบุคลากรธุรกิจหลักทรัพย์ ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (2546: 242) ได้กล่าวถึงทฤษฎีกลุ่มหลักทรัพย์ของ Markowitz ว่าแนวคิดดังกล่าวเริ่มจากการวางรากฐานเกี่ยวกับการกระจายการลงทุนจะช่วยลดความเสี่ยงเฉพาะในกรณีที่เป็นการลงทุนเป็นกลุ่มหลักทรัพย์ที่หลักทรัพย์แต่ละคู่มิได้มีความสัมพันธ์ในลักษณะที่ไปด้วยกันอย่างสมบูรณ์ (ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ต่ำกว่า +1.0) จึงสามารถลดค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มลงได้ แต่ถ้าการกระจายการลงทุนในหลักทรัพย์หลายชนิดที่มีลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างอัตราผลตอบแทนที่ไปด้วยกันอย่างสมบูรณ์ (ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เท่ากับ +1.0) จะไม่สามารถลดความเสี่ยงของกลุ่มหลักทรัพย์ลงได้

นอกจากนั้นทฤษฎีกลุ่มหลักทรัพย์ของ Markowitz ยังแสดงให้เห็นว่านักลงทุนสามารถสร้างกลุ่มหลักทรัพย์ที่ให้ผลตอบแทนที่คาดหวัง ณ ระดับความเสี่ยงหรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างๆได้ ทั้งนี้จะมีกลุ่มหลักทรัพย์ต่างๆ จำนวนหนึ่งที่เหนือกว่าหรือมีประสิทธิภาพกว่ากลุ่มหลักทรัพย์อื่นๆ กล่าวคือ เมื่อพิจารณา ณ ความเสี่ยงระดับหนึ่ง กลุ่มหลักทรัพย์เหล่านี้เป็นกลุ่มหลักทรัพย์ที่ให้อัตราผลตอบแทนสูงสุด และในทำนองเดียวกัน ณ อัตราผลตอบแทนระดับหนึ่ง กลุ่มหลักทรัพย์เหล่านี้เป็นกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีความเสี่ยงต่ำที่สุด กลุ่มหลักทรัพย์เหล่านี้จะเรียงตัวตามขอบแนวระดับอัตราผลตอบแทนที่สูงที่สุดกับขอบแนวระดับความเสี่ยงที่ต่ำที่สุด ตามทฤษฎีกลุ่มหลักทรัพย์ Markowitz เรียกขอบแนวที่กลุ่มหลักทรัพย์เหล่านี้เรียงตัวกันอยู่ว่า "เส้นโค้งกลุ่ม

หลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ" (efficient frontier) ผู้ลงทุนจะเลือกลงทุนในกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพตามทัศนะคติที่มีต่อผลตอบแทนและความเสี่ยงของผู้ลงทุนคนนั้น

3.1.1 ข้อสมมุติฐาน

ตามแนวคิดการสร้างกลุ่มหลักทรัพย์ของ Markowitz อยู่ภายใต้ข้อสมมุติฐานอันเกี่ยวกับพฤติกรรมของผู้ลงทุนดังนี้

1. การตัดสินใจลงทุนในแต่ละทางเลือก ผู้ลงทุนจะพิจารณาการกระจายของโอกาสที่จะเกิดผลตอบแทนของกลุ่มหลักทรัพย์ในงวดระยะเวลาลงทุน

2. ผู้ลงทุนจะพยายามทำให้อรรถประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับต่อ 1 งวดเวลาลงทุนให้สูงที่สุด โดยเส้นอรรถประโยชน์ของผู้ลงทุนแสดงถึงอรรถประโยชน์ที่เพิ่มขึ้นในอัตราที่ลดลง เมื่อมีความมั่งคั่งสูงขึ้น

3. ผู้ลงทุนแต่ละคนจะกำหนดความเสี่ยงจากการลงทุนบนพื้นฐานของความแปรปรวนของอัตราผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับ

4. การตัดสินใจของผู้ลงทุนขึ้นกับอัตราผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับและความเสี่ยงเท่านั้น ดังนั้นเส้นอรรถประโยชน์จึงเป็นฟังก์ชั่นของอัตราผลตอบแทนที่คาดไว้กับค่าที่คาดไว้ของความแปรปรวนหรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราผลตอบแทน

5. ภายใต้ความเสี่ยงระดับหนึ่ง ผู้ลงทุนจะเลือกการลงทุนที่ให้อัตราผลตอบแทนสูงสุด ในทำนองเดียวกันภายใต้อัตราผลตอบแทนระดับหนึ่ง ผู้ลงทุนจะเลือกการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำที่สุด

3.1.2 เส้นโค้งกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ

จากกลุ่มหลักทรัพย์ที่ประกอบไปด้วยหลักทรัพย์ 2 ชนิด เมื่อสมมติให้หลักทรัพย์ทั้งสองมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ต่างๆ จะสามารถสร้างกลุ่มหลักทรัพย์ได้มากมายตามสัดส่วนของเงินลงทุนที่เปลี่ยนไป ดังนั้น หากผู้ลงทุนคัดเลือกหลักทรัพย์ที่สอดคล้องกับนโยบายการลงทุนจนได้หลักทรัพย์มาจำนวนหนึ่ง ผู้ลงทุนสามารถสร้างกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีค่าอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงที่หลากหลายตามตัวแปรต่างๆคือ

1. จำนวนหลักทรัพย์ที่ประกอบขึ้นเป็นกลุ่มหลักทรัพย์

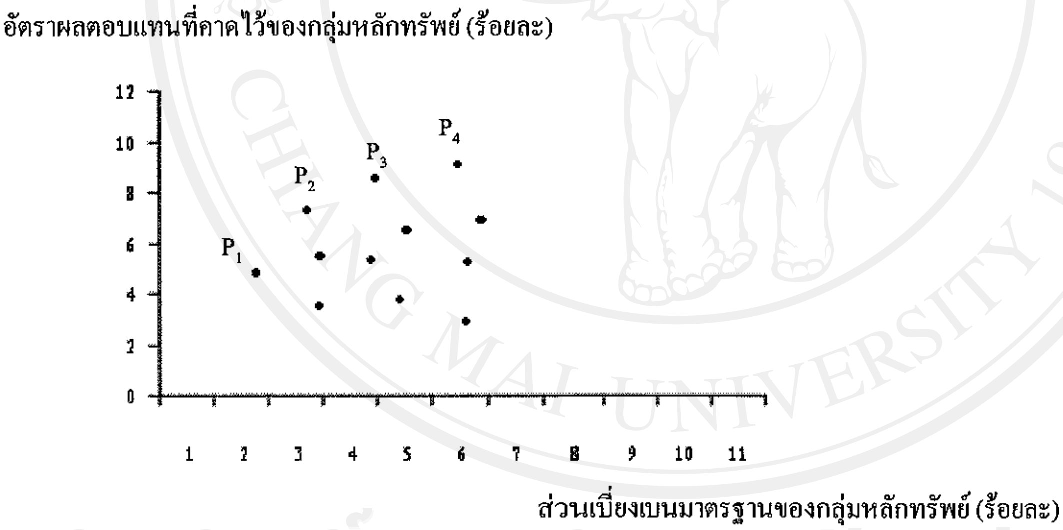
2. ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ในกลุ่มหลักทรัพย์

3. ความสัมพันธ์ระหว่างความผันผวนของอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ในกลุ่มหลักทรัพย์

4. สัดส่วนของเงินลงทุนในแต่ละหลักทรัพย์

รูปที่ 3.1 แสดงอัตราผลตอบแทนที่คาดไว้ และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มหลักทรัพย์ต่างๆที่เป็นไปได้ ซึ่งสามารถสร้างขึ้นได้ตามความหลากหลายของจำนวนหลักทรัพย์ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของหลักทรัพย์ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์และสัดส่วนเงินลงทุนในหลักทรัพย์แต่ละชนิดที่ประกอบเป็นกลุ่มหลักทรัพย์ กลุ่มหลักทรัพย์ P_1, P_2, P_3 และP_4 เป็นกลุ่มหลักทรัพย์ที่ให้อัตราผลตอบแทนสูงสุด ณ ระดับความเสี่ยงระดับหนึ่ง หรือให้ความเสี่ยงที่ต่ำที่สุด ณ ระดับอัตราผลตอบแทนระดับหนึ่ง กลุ่มหลักทรัพย์เหล่านี้จึงได้ชื่อว่าเป็น “กลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ” (efficient portfolio) ผู้ลงทุนสามารถจัดสรรเงินลงทุนระหว่างกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ และสามารถสร้างกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพอีกจำนวนมาก จนอาจลากเส้นเชื่อมจุดแสดงอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงของกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพได้ เรียกเส้นนี้ว่า “เส้นโค้งกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ” (efficient frontier) ดังรูปที่ 3.2

รูปที่ 3.1 กลุ่มหลักทรัพย์ต่างๆที่เป็นไปได้

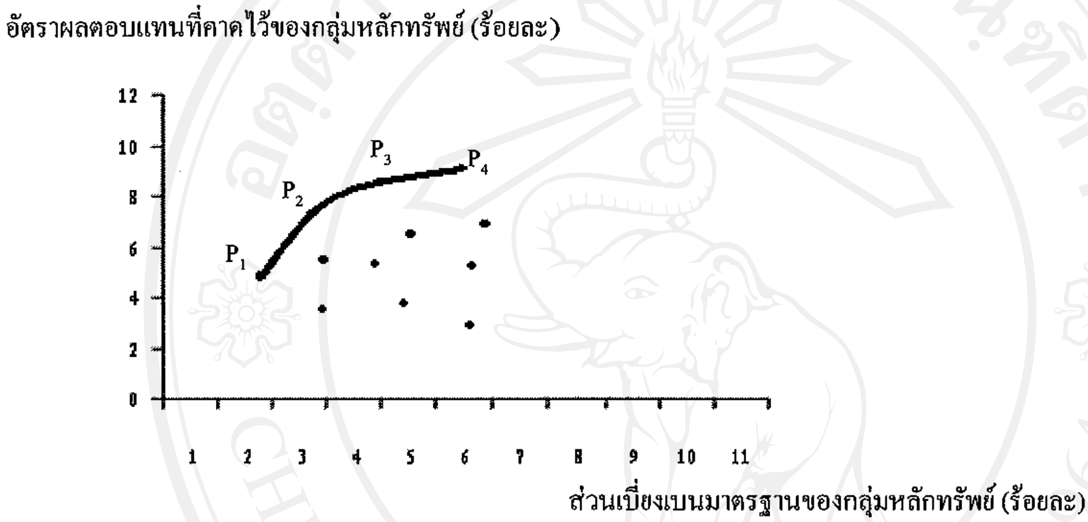


ที่มา : สถาบันพัฒนาบุคลากรธุรกิจหลักทรัพย์ ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (2546: 243)

เนื่องจากกลุ่มหลักทรัพย์ต่างๆ บนเส้นกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพเป็นกลุ่มหลักทรัพย์ที่เหนือกว่ากลุ่มหลักทรัพย์อื่นๆ กลุ่มหลักทรัพย์เหล่านี้จะเป็นกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพมากกว่าหลักทรัพย์อื่นๆ ผู้ลงทุนย่อมเลือกเฉพาะกลุ่มหลักทรัพย์บนเส้นโค้งนี้เท่านั้น อย่างไรก็ตามจากรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่ากลุ่มหลักทรัพย์บนเส้นกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพต่างมีอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงต่างๆกันไป เช่นกลุ่มหลักทรัพย์ P_1 มีระดับอัตราผลตอบแทนต่ำและความเสี่ยงก็ต่ำด้วย ในขณะที่กลุ่มหลักทรัพย์ P_4 ให้อัตราผลตอบแทนใน

ระดับสูงและความเสี่ยงก็สูงด้วย ผู้ลงทุนแต่ละคนย่อมชั่งใจระหว่างอัตราผลตอบแทนที่ต้องการกับความเสี่ยงที่ตนจะต้องเผชิญ หากผู้ลงทุนคนนั้นมีความพอใจในระดับอัตราผลตอบแทนระดับต่ำ และไม่ต้องการเผชิญความเสี่ยงที่สูงเขาย่อมเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ ที่มีคุณสมบัติตามที่เขาต้องการ (เช่นกลุ่มหลักทรัพย์ P_1)

รูปที่ 3.2 เส้นโค้งกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ



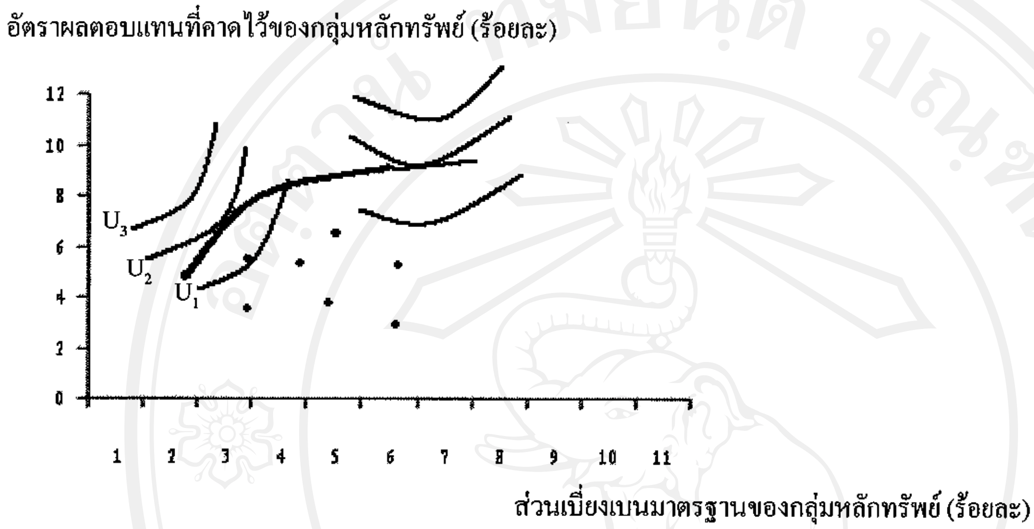
ที่มา : สถาบันพัฒนาบุคลากรธุรกิจหลักทรัพย์ ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (2546: 244)

ดังนั้น การเลือกลงทุนบนเส้นโค้งกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพนั้น ขึ้นอยู่กับเส้นอรรถประโยชน์ของผู้ลงทุนแต่ละคน ผู้ลงทุนแต่ละคนจะเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ที่เส้นอรรถประโยชน์ของเขาสัมผัสกับเส้นโค้งกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ ผู้ลงทุนคนที่สองอาจเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ที่แตกต่างกันได้เว้นแต่ผู้ลงทุนทั้งสองมีอรรถประโยชน์ที่เหมือนกัน รูปที่ 3.3 ต่อไปนี้แสดงการเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ที่เหมาะสมที่สุดของผู้ลงทุนแต่ละคน

รูปที่ 3.3 เส้น U_1, U_2 และU_3 แสดงถึงอรรถประโยชน์ของผู้ลงทุนคนหนึ่ง ทุกๆจุดบนเส้น U_1 แสดงระดับความพอใจในอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงที่เท่ากันเช่นเดียวกันทุกๆจุดบนเส้น U_2 แสดงถึงระดับความพอใจในอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงที่เท่ากัน โดยระดับความพอใจที่แสดงโดยเส้น U_3 มากกว่าระดับความพอใจที่แสดงโดยเส้น U_2 และ U_1 จากรูปแสดงให้เห็นว่านักลงทุนคนนี้เลือกกลุ่มหลักทรัพย์แถวๆ กลุ่มหลักทรัพย์ P_2 ซึ่งเมื่อเทียบกับเส้นอรรถประโยชน์ของผู้ลงทุนอีกคนหนึ่งด้านขวามือ แล้วจะเห็นว่าผู้ลงทุนคนแรกมีความกลัวความเสี่ยงมากกว่า

โดยเส้นอรรถประโยชน์ที่ชันกว่าผู้ลงทุนคนหลังเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ P_4 ซึ่งให้อัตราผลตอบแทนสูงกว่า และมีความเสี่ยงสูงกว่า

รูปที่ 3.3 การเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพที่เหมาะสมที่สุดสำหรับผู้ลงทุน



ที่มา : สถาบันพัฒนาบุคลากรธุรกิจหลักทรัพย์ ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (2546: 245)

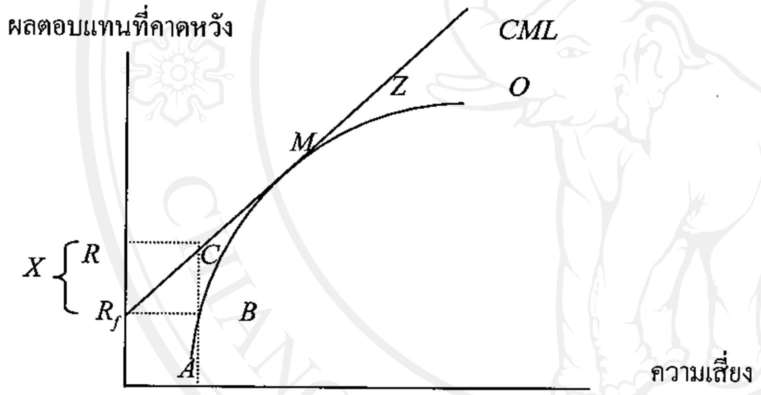
ตามทฤษฎีกลุ่มหลักทรัพย์ของ Markowitz ผู้ลงทุนจะเลือกลงทุนเฉพาะกลุ่มหลักทรัพย์ต่างๆ ที่อยู่บนเส้นโค้งกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีประสิทธิภาพ (efficient frontier) เท่านั้น แต่จะเป็นกลุ่มหลักทรัพย์ใด ย่อมขึ้นกับทัศนคติที่มีต่อผลตอบแทนและความเสี่ยงของผู้ลงทุนคนนั้น โดยถือว่าผู้ลงทุนเป็นผู้ไม่ชอบความเสี่ยงหรือต้องการหลีกหนีความเสี่ยง (risk averse) และผู้ลงทุนแต่ละคนมีระดับความกลัวความเสี่ยงไม่เท่ากัน ซึ่งควรสังเกตว่า กลุ่มหลักทรัพย์ต่างๆ ที่กล่าวถึงในหัวข้อทฤษฎีกลุ่มหลักทรัพย์ของ Markowitz ที่ผ่านมาล้วนเป็นกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีความเสี่ยงทั้งสิ้น

3.2 แบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน

เนื่องจากทฤษฎีกลุ่มหลักทรัพย์ของ Markowitz ต้องหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของทุกหลักทรัพย์ และต้องหาค่าสหสัมพันธ์ระหว่างหลักทรัพย์ทุกหลักทรัพย์ เพื่อหาความแปรปรวนของกลุ่มหลักทรัพย์ (portfolio) ซึ่งเป็นวิธีที่ยุ่งยาก แบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (CAPM) จึงได้พัฒนาขึ้นมาจากแบบจำลอง Markowitz โดยนำน้ำหนักเฉลี่ยเป็นบรรทัดฐานในการหาค่าสหสัมพันธ์ชี้ให้เห็นถึงการถ่วงน้ำหนักด้วยมูลค่าของตลาดของแต่ละหลักทรัพย์ นอกจากนี้

แบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (CAPM) ยังได้นำทรัพย์สินที่ปราศจากความเสี่ยงมาใช้ในการพิจารณาด้วย โดยในหลักทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง (risk free asset) นี้จะมีความแปรปรวนเท่ากับศูนย์ (zero variance) นั้นคือหลักทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง โดยการมีทรัพย์สินที่ปราศจากความเสี่ยง เป็นการเปิดโอกาสให้มีการลงทุนกว้างขึ้น กล่าวคือ นอกจากหลักทรัพย์ในตลาดแล้วผู้ลงทุนยังสามารถกู้หรือให้กู้ได้โดยไม่มีความเสี่ยง การที่ทรัพย์สินที่ปราศจากความเสี่ยงมีความเสี่ยงเป็นศูนย์ ทำให้ผู้ลงทุนสามารถเปลี่ยนกลุ่มหลักทรัพย์ (portfolio) ได้ตามแนวเส้น $R_f Z$ ในรูปที่ 3.4 ซึ่งอยู่เหนือเส้นขอบประสิทธิภาพที่ไม่มีหลักทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง

รูปที่ 3.4 เส้นที่มีประสิทธิภาพตามแนวคิดของ Markowitz และแบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน



ที่มา : ดัดแปลงจาก Bodies, Kane and Marcus (2002: 266)

รูปที่ 3.4 แสดงถึง เส้นขอบประสิทธิภาพซึ่งแสดงโดยเส้น AO แต่เมื่อมีหลักทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงก็จะทำให้ได้เส้นขอบเขตประสิทธิภาพใหม่ คือ $R_f Z$ ซึ่งเป็นเส้นตรงที่แสดงถึงว่าจะมีผลตอบแทนมากกว่าเมื่อมีความเสี่ยงในระดับเดียวกัน หรือกล่าวได้ว่าเมื่อมีทรัพย์สินที่ปราศจากความเสี่ยง นักลงทุนจะมีความเสี่ยงน้อยลงในระดับผลตอบแทนระดับเดียวกันกับเส้นของเขตประสิทธิภาพเส้นเก่า เส้นขอบเขตประสิทธิภาพใหม่ หรือเส้น $R_f Z$ จะเรียกว่าเส้นตลาดทุน (capital market line: CML) เพราะจะแสดงถึงสัดส่วนการลงทุนในตลาดทุนซึ่งเป็นการแลกเปลี่ยนกันระหว่างความเสี่ยงและผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนจะเลือก

นักลงทุนที่หลีกเลี่ยงความเสี่ยงในรูปที่ 3.3 จะเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ที่จุด B ในรูปที่ 3.4 ระดับความเสี่ยงระดับเดียวกันนักลงทุนจะได้ผลตอบแทนที่เพิ่มขึ้นเท่ากับ X (จาก R_f ถึง R) ซึ่งเมื่อได้รับผลตอบแทนมากขึ้น นักลงทุนที่หลีกเลี่ยงความเสี่ยงก็จะซื้อในสัดส่วนในช่วงกลุ่ม

หลักทรัพย์ของตลาด หรือที่จุด M และหลักทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงหรือจุด R_f จุดที่เหมาะสมกับความเสี่ยงที่ตนเองยอมรับได้ที่จุด C ในขณะที่นักลงทุนที่ชื่นชอบความเสี่ยงจะยืมเงินหรือพยายามหาเงินมาซื้อกลุ่มหลักทรัพย์ในตลาดตั้งแต่จุด M ขึ้นไปจนถึง MZ หนี้ส่วนที่ยืมมาต้องเสียดอกเบี้ยเท่ากับ R_f เพื่อที่จะนำมาซื้อกลุ่มหลักทรัพย์ในตลาดเพิ่มขึ้น ผลตอบแทนเฉลี่ยย่อมสูงขึ้นไปตามความเสี่ยงด้วย โดยความเสี่ยงของแต่ละหลักทรัพย์สามารถวัดได้จากส่วนของความเสี่ยงของหลักทรัพย์ที่มีต่อความเสี่ยงของตลาด แต่การที่จะวัดความเสี่ยงหรือความแปรปรวนของผลตอบแทนของหลักทรัพย์ใดๆ เทียบกับตัวเองเป็นที่ไม่เหมาะสม เพราะไม่สามารถนำค่าสถิติไปเปรียบเทียบกับความแปรปรวนของหลักทรัพย์อื่นได้ แต่สามารถวัดความแปรปรวนของหลักทรัพย์กับความแปรปรวนของตลาดได้ จึงใช้การวัดความความแปรปรวนของผลตอบแทนนั้นเทียบกับตลาด ดังนั้นความเสี่ยงของหลักทรัพย์แต่ละตัวจะเป็นค่าความแปรปรวนร่วม (covariance) ของหลักทรัพย์นั้นๆและของตลาด

อย่างไรก็ตาม แนวคิดในการประมาณค่าอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงของหลักทรัพย์มี 2 วิธีด้วยกันคือ

1. แบบจำลองปัจจัยเดี่ยว (single factor model)
2. แบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (capital asset pricing model: CAPM)

3.2.1 แบบจำลองปัจจัยเดี่ยว (single factor model)

แบบจำลองนี้เป็นการประมาณค่าความเสี่ยงของหลักทรัพย์โดยนำมาเทียบกับตลาด ซึ่งจะพบว่าโดยทั่วไปแล้วราคาของหลักทรัพย์มักจะเปลี่ยนแปลงไปตามการเปลี่ยนแปลงของราคาตลาด (ในที่นี้หมายถึง ดัชนีราคาตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย) กล่าวคือเมื่อราคาตลาดลดลง ราคาหุ้นส่วนใหญ่ในตลาดก็จะลดลงตามไปด้วย และถึงแม้ว่าราคาหุ้นส่วนใหญ่จะเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกับตลาด แต่เนื่องจากคุณสมบัติเฉพาะตัวของแต่ละหลักทรัพย์จึงทำให้ลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาที่เปลี่ยนแปลงไปตามสภาพตลาดเป็นไปในอัตราที่ไม่เท่ากัน ดังนั้นจึงได้พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของราคาหลักทรัพย์อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของราคาตลาดซึ่งเป็นเครื่องชี้วัดเพียงอย่างเดียวเท่านั้นจึงเรียกวิธีการศึกษาเช่นนี้ว่าแบบจำลองปัจจัยเดี่ยว (single factor model)

รูปแบบสมการของแบบจำลองปัจจัยเดี่ยว (single factor model) เป็นดังนี้

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \qquad (3.1)$$

โดยที่

R_i คือ อัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ตัวที่ i

α_i คือ ค่าตัดแกนตั้งซึ่งแสดงถึง อัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ตัวที่ i เมื่ออัตราผลตอบแทนของตลาดมีค่าเท่ากับ ศูนย์

β_i คือ ค่าสัมประสิทธิ์เบต้า (beta coefficient) แสดงถึง ค่าความชันของเส้นสมการถดถอยซึ่งเป็นการวัดค่าความอ่อนไหว (sensitivity) ของอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ i ที่มีการปรับตัวต่อการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทนของตลาด

R_m คือ อัตราผลตอบแทนของตลาด

ε_i คือ ค่าความคลาดเคลื่อน (random error term) ซึ่งเกิดจากผลต่างของอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ที่เกิดขึ้นจริง (actual return) กับอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ที่เกิดจากการประมาณค่าจากสมการ (expected return) ซึ่งผลต่างนี้จะแสดงถึงผลตอบแทนส่วนที่เหลือที่ไม่สามารถอธิบายด้วยผลตอบแทนของตลาดหรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าความเสี่ยงที่ไม่เป็นระบบ (unsystematic risk)

3.2.2 แบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (Capital asset pricing model: CAPM)

3.2.2.1 แบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน

แบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (CAPM) เป็นแบบจำลองที่สร้างขึ้น โดยมีข้อสมมุติว่าทรัพย์สินที่นักลงทุนสามารถที่จะเลือกลงทุนในทรัพย์สินได้ 2 ประเภท คือ 1. ทรัพย์สินที่ไม่มีความเสี่ยง (risk free asset) 2. ทรัพย์สินที่มีความเสี่ยง (risky asset) สำหรับทรัพย์สินที่ไม่มีความเสี่ยงนั้นจะให้ผลตอบแทนเป็นมูลค่าที่แน่นอนเท่ากับอัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง (R_f) ในขณะที่ทรัพย์สินที่มีความเสี่ยงนั้นจะให้ผลตอบแทนในอัตราที่ไม่แน่นอนคืออัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง (R_r) ขึ้นอยู่กับความเสี่ยงที่นักลงทุนต้องเผชิญว่ามีมากน้อยเพียงใด กำหนดให้นักลงทุนเลือกลงทุนในทรัพย์สินที่ไม่มีความเสี่ยงในสัดส่วนเท่ากับ W_f และเลือกลงทุนในทรัพย์สินที่มีความเสี่ยงในสัดส่วนเท่ากับ W_r ดังนั้นอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังจากการลงทุนในกลุ่มทรัพย์สินควรจะเท่ากับ

$$E(R_i) = W_f E(R_f) + W_r E(R_r) \qquad (3.2)$$

โดยที่

$E(R_i)$ คือ อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของทรัพย์สิน i ซึ่งประกอบไปด้วยการลงทุนในทรัพย์สินที่ไม่มีความเสี่ยงและทรัพย์สินที่มีความเสี่ยงในสัดส่วนเท่ากับ W_f และ W_r ตามลำดับ

$E(R_f)$ คือ อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของทรัพย์สินที่ไม่มีความเสี่ยง

$E(R_r)$ คือ อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของทรัพย์สินที่มีความเสี่ยง

เนื่องจาก

$$W_f + W_r = 1$$
$$W_f = 1 - W_r$$

แทนค่าลงใน (3.2) จะได้

$$E(R_i) = (1 - W_r)R_f + W_r E(R_i) \qquad (3.3)$$

จาก

$$\sigma_i{}^2 = E\left[R_i - E(R_i)\right]^2$$
$$= W_f^2\sigma_f^2 + W_r^2\sigma_r^2 + 2W_f W_r \sigma_{fr}$$

เนื่องจาก $\sigma_f^2 = 0$ และ $\sigma_{fr} = 0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\sigma_i^2 = W_r{}^2\sigma_r^2$$
$$\sigma_i = W_r\sigma_r$$

$$W_r = \frac{\sigma_i}{\sigma_r} \qquad (3.4)$$

แทนค่าสมการ (3.4) ลงในสมการ (3.3) จะได้ว่า

$$E(R_i) = (1 - \frac{\sigma_i}{\sigma_r})R_f + \frac{\sigma_i}{\sigma_r} \cdot E(R_r)$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$E(R_i) = R_f + \frac{[E(R_r) - R_f]\sigma_i}{\sigma_m} \qquad (3.5)$$

เนื่องจากทฤษฎีการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (CAPM) กล่าวว่าอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ i (R_i) ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของอัตราผลตอบแทนตลาด (R_m) ดังนั้นจึงกำหนดให้อัตราผลตอบแทนของตลาดเป็นทรัพย์สินที่มีความเสี่ยง ดังนี้

$$E(R_i) = R_f + \frac{[E(R_m) - R_f]\sigma_i}{\sigma_m} \tag{3.6}$$

โดยที่

$E(R_m)$ คือ อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของตลาดหลักทรัพย์

σ_m คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราผลตอบแทนของตลาดหลักทรัพย์

สมการที่ (3.6) แสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ระหว่างอัตราผลตอบแทนกับความเสี่ยงของทรัพย์สิน i นั้นมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง โดยมีค่าตัดแกน Y (intercept term) เท่ากับอัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง (R_f) และมีความลาดชันเท่ากับ $E(R_m) - E(R_f)/\sigma_m$

นำค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราผลตอบแทนของตลาดหลักทรัพย์ (σ_m) ไปคูณสมการที่ (6) ทั้งเศษและส่วนจะได้

$$E(R_i) = R_f + \frac{[E(R_m) - R_f]}{\sigma_m} \cdot \frac{\sigma_i \sigma_m}{\sigma_m}$$

$$= R_f + [E(R_m) - R_f] \cdot \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \tag{3.7}$$

$$E(R_i) = R_f + \beta_i [E(R_m) - R_f] \tag{3.8}$$

เมื่อ $\beta_i = \mathrm{cov}(E(R_i), R_m) / \sigma_{m2}$

โดยที่

$E(R_i)$ คือ อัตราผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับ

R_f คือ อัตราผลตอบแทนที่ไม่มีความเสี่ยง หมายถึงอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในทรัพย์สินที่มีมีความเสี่ยง เช่น พันธบัตรรัฐบาล หรืออัตราดอกเบี้ยเงินฝาก ประจำของธนาคาร เป็นต้น

R_m คือ อัตราผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับจากตลาด

β_i คือ ค่าความเสี่ยงที่เป็นระบบของหลักทรัพย์ i หรือค่าสัมประสิทธิ์เบต้า

$[E(R_m)-R_f]$ คือ ค่าชดเชยความเสี่ยงอันเนื่องมาจากตลาด (market risk premium)

สมการที่ (3.8) แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราผลตอบแทนคาดหวังของกลุ่มทรัพย์สิน i กับค่าความเสี่ยงที่เป็นระบบ (systematic risk) ซึ่งในที่นี้ใช้ค่าเบต้า (β_i) เป็นตัวประมาณค่า ในบางครั้งจะเรียกเส้นตรงนี้ว่าเส้นตลาดหลักทรัพย์ (security market line: SML) โดยเส้นตลาดหลักทรัพย์ (SML) นี้เป็นสมการที่สร้างขึ้นบนพื้นฐานของข้อสมมุติที่ว่า "ตลาดหลักทรัพย์เป็นตลาดที่มีประสิทธิภาพและอยู่ในดุลยภาพ" ดังนั้นผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับ (expected return) จากการลงทุนในกลุ่มทรัพย์สินหนึ่งๆ ควรจะเท่ากับผลตอบแทนที่ได้จากการลงทุนในทรัพย์สินที่ไม่มีความเสี่ยงบวกกับผลตอบแทนส่วนเพิ่มจากการถือทรัพย์สินที่มีความเสี่ยง (risk premium) เท่านั้น ซึ่งถ้าหากมีผลตอบแทนอื่นใดที่เกินเลยกว่านี้ก็จะถือว่าการลงทุนในทรัพย์สินนั้น ๆ ให้ผลตอบแทนที่ผิดปกติ (abnormal return)

3.2.2.2 เส้นตลาดหลักทรัพย์

เส้นตลาดหลักทรัพย์ (security market line: SML) เป็นเส้นตรงที่ลากเชื่อมระหว่างจุดสองจุดบนแกนผลตอบแทนที่คาดหวัง และแกนความเสี่ยง โดยจุดแรกได้มาจากความสัมพันธ์ของผลตอบแทนเฉลี่ยของหลักทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง กับความเสี่ยงของการลงทุนในตลาด ซึ่งจากสมการ $E(R_i)=R_f+\beta_i[E(R_m)-R_f]$ เราสามารถพิจารณาค่าเบต้า (β_i) ได้ดังนี้

$\beta_i =$ 0.5 หมายความว่า หลักทรัพย์นั้นมีความเสี่ยงเท่ากับ 0.5 เท่าของตลาด ถ้าอัตราผลตอบแทนของตลาดเปลี่ยนแปลงไป 100% อัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์นั้นจะเปลี่ยนแปลงไป50%

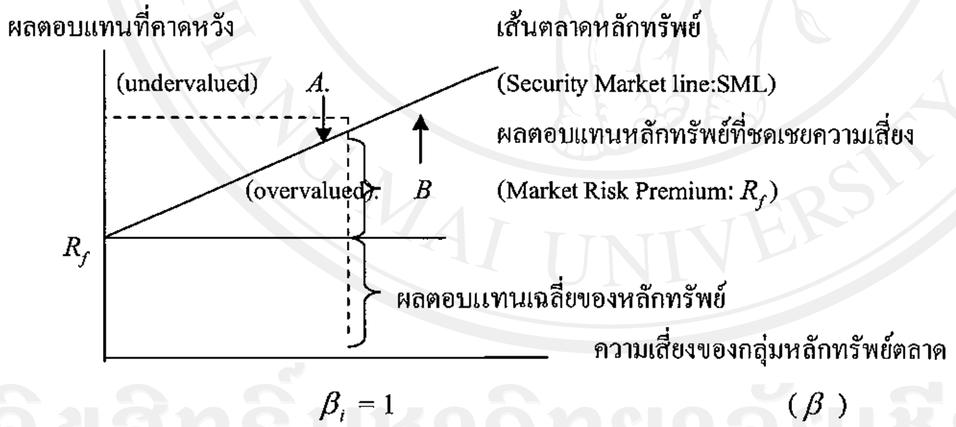
$\beta_i =$ 1 หมายความว่า หลักทรัพย์นั้นมีความเสี่ยงเท่ากับตลาด ถ้าอัตราผลตอบแทนของตลาดเปลี่ยนแปลงไป 100% อัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์นั้นก็จะเปลี่ยนแปลงไป 100% เท่ากัน

$\beta_i =$ 1.5 หมายความว่า หลักทรัพย์นั้นมีความเสี่ยงเท่ากับ 1.5 เท่าของตลาด ถ้าอัตราผลตอบแทนของตลาดเปลี่ยนแปลงไป 100% อัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์นั้นจะเปลี่ยนแปลงไป 150%

รูปที่ 3.5 แสดงว่าหลักทรัพย์ใดอยู่เหนือเส้นตลาดหลักทรัพย์ (เส้น SML) เช่น จุด A จะให้ผลตอบแทนสูงกว่าหลักทรัพย์อื่นบนเส้นตลาดหลักทรัพย์ ซึ่งแสดงว่าหลักทรัพย์มีราคาซื้อขายในตลาดต่ำกว่าราคาที่สมดุลที่ควรจะเป็น (undervalued) หมายความว่า หลักทรัพย์ A

ให้อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังจะได้รับสูงกว่าอัตราผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนต้องการ แสดงว่าราคาหลักทรัพย์ในขณะนี้ต่ำกว่าราคาที่เหมาะสมทำให้ผลตอบแทนที่ได้สูงเกินไป ผู้ลงทุนจะตัดสินใจซื้อหลักทรัพย์ *A* การเสนอซื้อหลักทรัพย์ *A* จะทำให้ราคาหลักทรัพย์ *A* สูงขึ้นเรื่อยๆ ทำให้อัตราผลตอบแทนที่คาดไว้ต่ำลงเรื่อยๆจนเท่ากับ อัตราผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนต้องการ ซึ่งเป็นภาวะดุลยภาพ กรณีหลักทรัพย์ที่อยู่ใต้เส้นตลาดหลักทรัพย์ เช่นที่จุด *B* อัตราผลตอบแทนที่คาดว่าจะได้รับต่ำกว่าอัตราผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนต้องการแสดงว่าราคาหลักทรัพย์ในขณะนี้สูงกว่าราคาที่เหมาะสม (overvalued) อัตราผลตอบแทนที่ได้จะต่ำทำให้ผู้ลงทุนตัดสินใจขายหลักทรัพย์ และเสนอขายหลักทรัพย์ *B* จะทำให้ราคาหลักทรัพย์ *B* ต่ำลงเรื่อยๆ ทำให้อัตราผลตอบแทนที่คาดไว้สูงขึ้นเรื่อยๆ จนเท่ากับผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนต้องการ อันเป็นภาวะดุลยภาพ ดังนั้นสรุปได้ว่าหลักทรัพย์ *A* เป็นหลักทรัพย์ที่ให้ผลตอบแทนสูงกว่าปกติ (undervalued) ซึ่งสมควรลงทุน ส่วนหลักทรัพย์ *B* เป็นหลักทรัพย์ที่ให้ผลตอบแทนต่ำกว่าปกติ (overvalued) ซึ่งไม่สมควรลงทุน

รูปที่ 3.5 ความสัมพันธ์ระหว่างความเสี่ยงและผลตอบแทนที่คาดหวังในการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์



ที่มา : Fischer and Jordan (1995)

3.2.2.3 การเลือกหลักทรัพย์จากค่าสัมประสิทธิ์เบต้าตามสภาวะตลาด

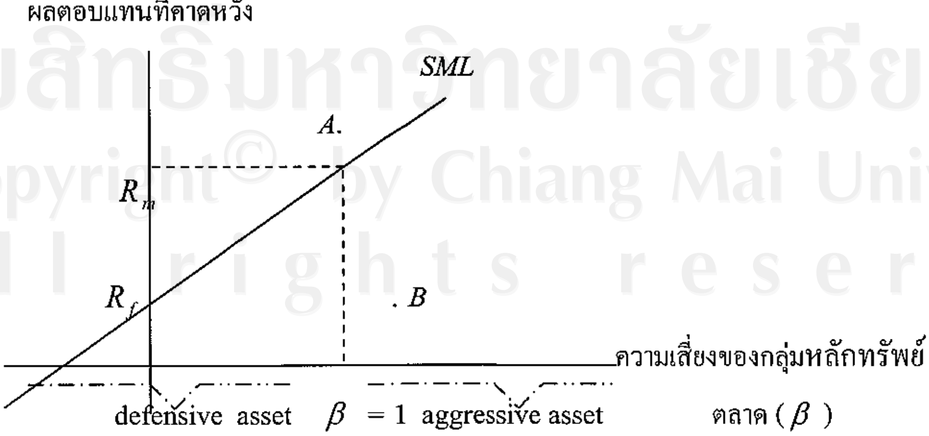
โดยทั่วไปการแบ่งสภาวะตลาดหลักทรัพย์จะแบ่งออกเป็น 2 ช่วงด้วยกัน คือ 1. ช่วงตลาดรุ่งเรื่อง (bull market) 2. ช่วงตลาดซบเซา (bear market) มักถือตามลักษณะการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์หรือพิจารณาจากอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ หากดัชนีราคาหลักทรัพย์ลดลงเรื่อยๆ จะเรียกช่วงนี้ว่า ช่วงตลาดซบเซา หรือหากราคาหลักทรัพย์เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จะเรียกช่วงนี้ว่า ช่วงตลาดรุ่งเรื่อง หรืออาจพิจารณาว่าหากช่วงใดอัตราผลตอบแทนของตลาดเป็น

บวก ช่วงนั้นเป็นช่วงตลาดขาขึ้น หากช่วงใดอัตราผลตอบแทนของตลาดเป็นลบ ช่วงนั้นเป็นช่วงตลาดขาลง

การจำแนกสภาวะตลาดตามที่กล่าวข้างต้นจะสรุปได้ว่า ในช่วงตลาดรุ่งเรือง หลักทรัพย์ที่มีค่าเบต้าสูงๆ จะให้อัตราผลตอบแทนที่ดีกว่าหลักทรัพย์ที่มีค่าเบต้าต่ำๆ และในช่วงที่ตลาดซบเซาหลักทรัพย์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์เบต้าต่ำจะให้อัตราผลตอบแทนที่ดีกว่าหลักทรัพย์ที่มีค่าเบต้าสูง แต่ในกรณีที่อัตราผลตอบแทนของตลาดเป็นบวก ถ้าอัตราผลตอบแทนต่ำกว่าอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง หลักทรัพย์ที่มีค่าเบต้าต่ำจะให้อัตราผลตอบแทนสูงกว่าหลักทรัพย์ที่มีค่าเบต้าสูง ดังนั้นอาจให้ความหมายของคำว่าตลาดรุ่งเรือง และตลาดซบเซาได้ใหม่คือ ตลาดรุ่งเรือง หมายถึงสภาวะที่ตลาดให้อัตราผลตอบแทนสูงกว่าอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง นั่นคือ $E[(R_m)-R_f]$ เป็นบวก ตลาดซบเซาหมายถึงสภาวะที่ตลาดให้อัตราผลตอบแทนต่ำกว่าอัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ปราศจากความเสี่ยง นั่นคือ $E[(R_m)-R_f]$ เป็นลบ นั่นเอง

รูปที่ 3.6 เส้นตรงจะแสดงการแลกเปลี่ยนกัน ระหว่างความเสี่ยงที่เป็นระบบกับผลตอบแทนของทุกหลักทรัพย์ จะสังเกตว่ามีหลักทรัพย์ที่มีความเสี่ยงติดลบ หรือน้อยกว่าหลักทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง โดยปกติแล้วในตลาดจะไม่มีหลักทรัพย์ชนิดนี้ แต่ในทางทฤษฎีหลักทรัพย์ชนิดนี้สามารถลดความเสี่ยงได้จากรูปที่ 3.6 หลักทรัพย์ที่มีค่าเบต้า (β) น้อยกว่า 1 เรียกว่าหลักทรัพย์สำหรับการป้องกันตัว (defensive security) และหลักทรัพย์ที่มีค่าเบต้า (β) มากกว่า 1 เรียกว่าหลักทรัพย์สำหรับการบุกรุก (aggressive security)

รูปที่ 3.6 ค่าสัมประสิทธิ์เบต้า (β) และลักษณะของหลักทรัพย์



ที่มา : ดัดแปลงจาก Bodies, Kane and Marcus (2002: 273)

3.2.2.4 ข้อสมมติของแบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน

จิรัตน์ สังข์แก้ว (2542) ได้กล่าวถึงข้อสมมุติของแบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (CAPM) ไว้ดังนี้

1. ผู้ลงทุนพิจารณากลุ่มหลักทรัพย์โดยดูจากอัตราผลตอบแทนที่คาดไว้ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราผลตอบแทนใน 1 ช่วงเวลาลงทุน (ความเสี่ยงของการลงทุนวัดจาก ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราผลตอบแทน) โดยผู้ลงทุนทุกคนมีช่วงเวลาลงทุนที่ตรงกันและมีการคาดหมายเหมือนๆกัน

2. ผู้ลงทุนเป็นผู้มีเหตุผลไม่ชอบความเสี่ยง ซึ่งหมายความว่า ณ ระดับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระดับหนึ่งผู้ลงทุนจะเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ที่ให้ผลตอบแทนที่คาดไว้สูงที่สุด หรือ ณ ระดับอัตราผลตอบแทนที่คาดไว้ระดับหนึ่งผู้ลงทุนจะเลือกกลุ่มหลักทรัพย์ที่มีค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่ำสุด

3. สามารถแบ่งการลงทุนลงในหลักทรัพย์แต่ละชนิดได้โดยไม่มีที่สิ้นสุด ซึ่งหมายความว่าผู้ลงทุนอาจซื้อหุ้นเป็นเศษส่วนของ 1 หุ้นก็ได้ตามความต้องการของผู้ลงทุน

4. ผู้ลงทุนสามารถให้กู้ยืมโดยปราศจากความเสี่ยง และสามารถกู้ยืมเงินได้โดยปราศจากความเสี่ยง โดยอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงมีระดับเท่ากัน ไม่ว่าจะเป็นการให้กู้ยืมหรือการกู้ยืม และอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงของผู้ลงทุนทุกคนมีระดับเท่ากัน

5. ไม่พิจารณาเรื่องภาษีและค่าใช้จ่ายในการซื้อขาย

6. ตลาดหลักทรัพย์เป็นตลาดที่สมบูรณ์ ไม่มีสิ่งที่เป็นอุปสรรคในการซื้อขายหลักทรัพย์ เช่นภาษี และค่าใช้จ่ายในการซื้อขายหลักทรัพย์ มีการแบ่งเงินทุนได้ และอัตราดอกเบี้ยเท่ากัน ทำให้มุ่งสู่การวิเคราะห์การมีดุลยภาพในตลาดได้ง่ายขึ้น

3.2.2.5 เปรียบเทียบแบบจำลองปัจจัยเดี่ยวกับแบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน

จากแบบจำลองปัจจัยเดี่ยว (single factor model)

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \qquad (3.9)$$

และแบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (CAPM)

$$R_i = R_f + \beta_i [R_m - R_f] \qquad (3.10)$$

จากสมการที่ (3.10)

$R_i = R_f + \beta_i[R_m - R_f] = R_f + \beta_i R_m - \beta_i R_f = (1-\beta_i)R_f + \beta_i R_m$

ดังนั้นได้ว่า

$$R_i = (1-\beta_i)R_f + \beta_i R_i \qquad (3.11)$$

นั้นคือค่าแอลฟา (α_i) ในสมการที่ (3.9) ก็คือค่า $(1-\beta_i)R_f$ ในสมการที่ (3.11) ดังนั้นการระบุค่าที่แท้จริงของหลักทรัพย์สามารถจะทำได้ดังนี้

ถ้า $\alpha_i = (1-\beta_i)R_f$ หมายความว่า อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย ของหลักทรัพย์ใดหลักทรัพย์หนึ่ง มีค่าเท่ากับอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยทั้งตลาด

ถ้า $\alpha_i < (1-\beta_i)R_f$ หมายความว่า อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย ของหลักทรัพย์ใดหลักทรัพย์หนึ่ง มีค่าน้อยกว่า อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยทั้งตลาด นั้นคือ ผู้ลงทุนไม่สมควรลงทุนในหลักทรัพย์นั้น เพราะให้ผลตอบแทนต่ำ

ถ้า $\alpha_i > (1-\beta_i)R_f$ หมายความว่า อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย ของหลักทรัพย์ใดหลักทรัพย์หนึ่ง มีค่ามากกว่า อัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยทั้งตลาด นั้นคือ ผู้ลงทุนสมควรลงทุนในหลักทรัพย์นั้น เพราะให้ผลตอบแทนสูง

3.3 การทดสอบความนิ่งสำหรับข้อมูล

การทดสอบความนิ่งสำหรับข้อมูล (unit root test) หรือ อันดับความสัมพันธ์ของข้อมูล (order of integration) เป็นการทดสอบตัวแปรทางเศรษฐกิจต่างๆที่ใช้ในสมการเพื่อดูความนิ่งหรือไม่นิ่งของข้อมูล (stationary หรือ non-stationary) โดยส่วนมากแล้วจะนิยมการทดสอบโดยวิธี Dickey-Fuller test ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 วิธี คือ

3.3.1 Dickey-Fuller Test (DF)

วิธีนี้จะทำการทดสอบตัวแปรที่เคลื่อนไหวไปตามช่วงเวลามีลักษณะเป็นแบบจำลอง autoregressive โดยพิจารณาสมการ 3 รูปแบบที่แตกต่างกันดังนี้

ในกรณีที่ X เป็นแนวเดินเชิงสุ่ม

$$\Delta X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (3.12)$$

ในกรณีที่ X เป็นแนวเดินเชิงสุ่มและมีความโน้มเอียงทั่วไปรวมอยู่ด้วย

$$\Delta X_t = \alpha + \theta X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (3.13)$$

ในกรณีที่ X เป็นแนวเดินเชิงสุ่มโดยมีความโน้มเอียงทั่วไปและมีแนวโน้มตามเวลา

$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + \theta X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (3.14)$$

โดยที่

ΔX_t คือ ค่าความแตกต่างครั้งที่ 1 ของตัวแปรที่ทำการศึกษา

α, β, θ คือ ค่าคงที่

t คือ แนวโน้มเวลา

ε_t คือ ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ และค่าความแปรปรวนที่คงที่ หรือ $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$

การทดสอบจะพิจารณาค่า θ โดยเปรียบเทียบค่าสถิติ t (t-statistic) ที่คำนวณได้กับค่าที่เหมาะสมจากตาราง Dickey-Fuller ซึ่งมีสมมติฐานการทดสอบดังนี้

$H_0 : \theta = 0$

$H_1 : \theta < 0$

ถ้ายอมรับสมมติฐานว่าง ($H_0 : \theta = 0$) หมายความว่า ตัวแปรที่สนใจ (X_t) มีลักษณะไม่นิ่ง (non-stationary) หรือตัวแปร X_t มี unit root

ถ้ายอมรับสมมติฐานทางเลือก ($H_1 : \theta < 0$) จะได้ว่าตัวแปรที่สนใจ (X_t) มีลักษณะนิ่ง (stationary) หรือ X_t ไม่มี unit root

3.3.2 Augmented Dickey-Fuller Test (ADF)

ADF test คือการทดสอบความนิ่งของข้อมูล (unit root) อีกวิธีหนึ่งที่พัฒนามาจาก DF test เนื่องจากวิธี DF test ไม่สามารถทำการทดสอบตัวแปรในกรณีที่ตัวแปรมีลักษณะเป็นอัตสหสัมพันธ์ (serial correlation) ในค่าความคลาดเคลื่อน (error term: ε_t) ที่มีลักษณะความสัมพันธ์กันเองในระดับสูง โดยมีสมการดังนี้

$$\Delta X_t = \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (3.15)$$

$$\Delta X_t = \alpha + \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (3.16)$$

$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + \theta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (3.17)$$

ซึ่งจำนวนตัวล่า (Lagged term: p) สามารถใส่ไปจนกระทั่งไม่เกิดปัญหาอัตสหสัมพันธ์ (serial correlation) ในส่วนของค่าความคลาดเคลื่อน (error term)

การทดสอบจะพิจารณาค่า θ โดยเปรียบเทียบค่าสถิติ t (t-statistic) ที่คำนวณได้กับค่าที่เหมาะสมจากตาราง Augmented Dickey-Fuller ซึ่งมีสมมติฐานการทดสอบเช่นเดียวกับวิธี DF

3.4 การประมาณค่าบนพื้นฐานวิธีการของโมเมนต์

สมการเส้นตรงแบบธรรมดา $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + e_t$ เมื่อ x_t คือตัวแปรเชิงสุ่ม และความแปรปรวนร่วมระหว่างตัวแปร x_t กับพจน์คลาดเคลื่อน (e_t) ไม่เท่ากับศูนย์ ($\mathrm{cov}(x_t, e_t) = E(x_t e_t) \neq 0$) ซึ่งทำให้การใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (ordinary least square: OLS) นั้นเกิดความเอนเอียง (biased) และไม่คล้องจอง (inconsistent) ดังนั้นจึงต้องทำการหาทางเลือกในการประมาณค่าใหม่ วิธีการหนึ่งคือการพิจารณาเกี่ยวกับวิธีการของโมเมนต์ (method of moment) เป็นหลักในการประมาณ ซึ่งเป็นทางเลือกที่ยังคงมีหลักของตัวประมาณค่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square estimators) เมื่อข้อสมมุติปกติทั่วไปทั้งหมดของแบบจำลองเชิงเส้นวิธีการของโมเมนต์ (method of moments) จะนำเราไปสู่ตัวประมาณค่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square estimator) ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่ม และมีความสัมพันธ์กับพจน์คลาดเคลื่อน (error term) แล้ววิธีการ

โมเมนต์ (method of moment) จะนำเราไปสู่อีกทางเลือกหนึ่งซึ่งถูกเรียกว่าการประมาณค่าโดยใช้ตัวแปรเครื่องมือ

3.4.1 การประมาณค่าด้วยวิธีการโมเมนต์เกี่ยวกับค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวน

เริ่มต้นด้วยตัวอย่างง่ายๆ โดยมีตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมี k โมเมนต์คือค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มซึ่งถูกมีขึ้นโดยการมีขึ้นของ k นั้นคือ

$$E(Y^k) = \mu_k = k^{th} \text{ โมเมนต์ของ Y} \tag{3.18}$$

เรียกอีกอย่างว่าค่าคาดหวังหรือค่าเฉลี่ย ดังนั้น k^{th} โมเมนต์ประชากร (population moment) ใน (3.18) สามารถถูกประมาณให้เป็นตัวประมาณที่คล้องจอง (consistent) ได้โดยการใช้ตัวอย่าง (ขนาด T)

$$\hat{E}(Y^k) = \hat{\mu}_k = k^{th} \text{ โมเมนต์ตัวอย่าง (sample moment) ของ Y}$$

$$= \sum_{t=1}^{T} y_t^k / T \tag{3.19}$$

วิธีการประมาณด้วยวิธีการของโมเมนต์ (method of moment) จะมี m โมเมนต์ประชากรไปสู่ m โมเมนต์ตัวอย่าง เพื่อประมาณค่า m ค่าสัมประสิทธิ์ ดังเช่นตัวอย่างให้ Y เป็นตัวแปรสุ่มโดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $E(Y) = \mu$ และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ

$$\text{var}(Y) = \sigma^2 = E(Y-\mu)^2 = E(Y^2) - \mu^2 \tag{3.20}$$

และเพื่อที่จะประมาณเฉลี่ย (μ) และความแปรปรวน (σ^2) เราต้องใช้สมการโมเมนต์ประชากรทั้งสอง ไปสู่โมเมนต์ตัวอย่าง ทั้ง 2 โดยที่โมเมนต์อันแรกจากทั้งสองของทั้งประชากรและตัวอย่างของ Y คือ

$$E(Y) = \mu_1 = \mu, \qquad \hat{\mu} = \sum_{t=1}^{T} y_t / T$$

$$E(Y^2) = \mu_2, \qquad \hat{\mu}_2 = \sum_{t=1}^{T} y_t^2 / T \tag{3.21}$$

โดย 2 โมเมนต์นี้เราสามารถแก้สมการ หาค่าเฉลี่ย และค่าความแปรปรวนของ Y ได้ โดยขั้นตอนแรกต้องสร้างสมการโมเมนต์ตัวอย่างอันดับที่หนึ่ง (first sample moment) เพื่อที่จะนำไปสู่ โมเมนต์ประชากรอันดับที่หนึ่ง (first population moment) เพื่อที่จะได้รับค่าประมาณของค่าเฉลี่ยของประชากร

$$\hat{\mu} = \sum_{t=1}^{T} y_t / T = \bar{y} \qquad (3.22)$$

จากนั้นแทนสมการที่ (3.20) ไปในโมเมนต์ประชากรลำดับที่สอง โดยค่าของตัวอย่างของค่าดังกล่าว และแทนโมเมนต์ลำดับที่หนึ่ง μ ด้วยสมการที่ (3.22) ซึ่งจะได้ว่า

$$\tilde{\sigma}^2 = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}^2 = \frac{\sum y_t^2}{T} - \bar{y}^2 = \frac{\sum y_t^2 - T\bar{y}^2}{T} = \frac{\sum (y_t - \bar{y})^2}{T} \qquad (3.23)$$

โดยวิธีการของโมเมนต์จะนำเราไปสู่ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าเฉลี่ยของประชากรโดยค่าประมาณด้วยวิธีการของโมเมนต์ของความแปรปรวนมี T เป็นตัวหาร แต่โดยปกตินั้นนิยมใช้ T-1 ดังนั้นค่าดังกล่าวจะไม่เท่ากับค่าความแปรปรวนของตัวอย่างซึ่งเราใช้ อย่างไรก็ตามในกรณีที่ตัวอย่างขนาดใหญ่นั้นค่านี้จะไม่ต่างกัน โดยทั่วไปตัวประมาณค่าด้วยวิธีการของโมเมนต์ (method of moment estimators) จะมีลักษณะคล้องจอง (consistent) ในตัวอย่างขนาดใหญ่ แต่ไม่เป็นที่ยอมรับว่ามันจะดีที่สุด (best) ในทุกกรณี

3.4.2 ตัวประมาณค่าด้วยวิธีการของโมเมนต์ในกรณีแบบจำลองการถดถอยเชิงเส้นแบบธรรมดา

การจำกัดความโมเมนต์สามารถขยายสู่รูปทั่วไปได้โดยเรารู้ว่าถ้า Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ดังนั้นฟังก์ชัน $g(Y)$ เป็นเชิงสุ่มด้วย ดังนั้น $E[g(Y)]$ คือโมเมนต์ของ $g(Y)$ ในแบบจำลองการถดถอยเชิงเส้น (linear regression model) $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + e_t$ โดยที่เรามีข้อสมมุติทั่วไปว่า

$$E(e_t) = 0 \Rightarrow E(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t) \quad = 0 \qquad (3.24)$$

โดยถ้า x เป็นตัวแปรคงที่ หรือตัวแปรสุ่มและไม่มีความสัมพันธ์กับ e_t ดังนั้น

$$E(x_t e_t) = 0 \Rightarrow E[x_t(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)] = 0 \qquad (3.25)$$

สมการที่ (3.25) คือเงื่อนไขโมเมนต์ (moment conditions) ถ้าเราแทนโมเมนต์ของประชากรทั้งสองที่มีความสอดคล้องกับโมเมนต์ตัวอย่างเราจะมี 2 สมการและมีสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า 2 ค่า ซึ่งนิยามว่าตัวประมาณค่าด้วยวิธีโมเมนต์ (method of moments estimators) สำหรับ β_1 และ β_2

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\sum(y_t - b_1 - b_2 x_t) &= 0 \\ \frac{1}{T}\sum x_t(y_t - b_1 - b_2 x_t) &= 0 \end{aligned} \qquad (3.26)$$

สมการทั้งสองนี้เท่ากับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square) ซึ่งเป็นสมการปกติ (normal equation) และการแก้ปัญหากรณีตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square estimators)

$$b_2 = \frac{\sum(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum(x_t - \bar{x})^2}$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2\bar{x}$$

ดังนั้น หลักการของการประมาณด้วยวิธีการของโมเมนต์ (method of moments) นำเราไปสู่ตัวประมาณค่าที่เหมือนกันกับแบบจำลองเชิงเส้นแบบธรรมดา (simple linear regression model) เช่นเดียวกับหลักการของวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

3.4.3 การประมาณโดยการใช้ตัวแปรเครื่องมือในกรณีแบบจำลองเชิงเส้นแบบธรรมดา

ปัญหาที่เกิดขึ้นสำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square) คือเมื่อ x เป็นตัวแปรสุ่มและมีความสัมพันธ์กับพจน์ความเคลื่อนเชิงสุ่ม (random disturbance: e) ทำให้ $E(x_t e_t) \neq 0$ และเงื่อนไขโมเมนต์ (moment condition) ในสมการที่ (3.25) จะไม่สมเหตุสมผล อย่างไรก็ตามมีตัวแปรตัวอื่นๆ z_t ซึ่งถูกเรียกว่าตัวแปรเครื่องมือ และทำให้ได้เงื่อนไขโมเมนต์ (moment condition) ที่เหมาะสมคือ

$$E(z_t e_t) = 0 \Rightarrow E[z_t(y_t - \beta_1 - \beta_2 x_t)] = 0 \qquad (3.27)$$

ดังนั้น เราสามารถที่จะใช้สมการที่ (3.24) และสมการที่ (3.27) เพื่อที่จะหาค่าสัมประสิทธิ์ β_1 และ β_2 ได้โดยที่เงื่อนไขโมเมนต์ของตัวอย่าง (sample moment conditions) คือ

$$\frac{1}{T}\sum(y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_t) = 0$$
$$\frac{1}{T}\sum z_t(y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_t) = 0 \tag{3.28}$$

การแก้สมการนี้จะนำไปสู่ตัวประมาณค่าด้วยวิธีการของโมเมนต์ (method of moment estimators) ซึ่งโดยปกติถูกเรียกว่าตัวประมาณค่าที่อาศัยตัวแปรที่เป็นเครื่องมือ

$$\hat{\beta}_2 = \frac{T\sum z_t y_t - \sum z_t \sum y_t}{T\sum z_t x_t - \sum z_t \sum x_t} = \frac{\sum(z_t - \bar{z})(y_t - \bar{y})}{\sum(z_t - \bar{z})(x_t - \bar{x})}$$
$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x} \tag{3.29}$$

โดยที่ค่าประมาณตัวใหม่นี้จะมีคุณสมบัติดังนี้

1. มีลักษณะคล้องจอง (consistent) ถ้า $E(z_t e_t) = 0$
2. ในกรณีตัวอย่างขนาดใหญ่ตัวประมาณค่าที่อาศัยตัวแปรเครื่องมือ (instrumental variable estimators) จะมีการกระจายเข้าใกล้การกระจายแบบปกติ

$$\hat{\beta}_2 \sim N\left(\beta_2, \frac{\sigma^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2 r_{zx}^2}\right) \tag{3.30}$$

โดย r_{zx}^2 คือสหสัมพันธ์ของตัวอย่างยกกำลัง 2 ระหว่างตัวแปรเครื่องมือ (z) และ ตัวแปรอธิบายเชิงสุ่ม (x) เพื่อให้แน่ชัดเราต้องการที่จะได้รับตัวแปรเครื่องมือซึ่งมีความสัมพันธ์ที่สูงต่อตัวแปรเชิงสุ่มเพื่อที่จะทำให้ตัวประมาณค่าที่ได้จากตัวแปรเครื่องมือมีประสิทธิภาพมากขึ้น โดยค่า r_{zx}^2 คือค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าที่อาศัยตัวแปรเครื่องมือ

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2 r_{zx}^2} \tag{3.31}$$

โดยความแปรปรวนของค่าคลาดเคลื่อน (error variance) ถูกประมาณโดยการใช้

$$\hat{\sigma}_{IV}^2 = \frac{\sum(y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_t)^2}{T-2} \tag{3.32}$$

3.5 การประมาณค่าด้วยวิธีการของโมเมนต์ในรูปทั่วไป (generalized method of moment estimation: GMM)

ในการหาตัวประมาณที่ไม่เป็นเชิงเส้น (non-linear estimator) ซึ่งรับประกันว่าเป็นตัวประมาณค่าที่คล้องจอง (consistent) ภายใต้เงื่อนไขต่างๆ และไม่ต้องการข้อสมมุติเกี่ยวกับการกระจายปกติ (normality) ในกรณีนี้เราจะพิจารณาการประมาณค่าด้วยวิธีการของโมเมนต์ในรูปทั่วไป (generalized method of moments: GMM)

เริ่มจากพื้นฐานของตัวประมาณค่าด้วยวิธีการของโมเมนต์ โดยเป็นตัวประมาณค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม โดยเป้าหมายของเราคือการเลือกค่าประมาณ $(\hat{x})$ ซึ่งมีลักษณะคล้องจอง โดยเงื่อนไขจำเป็น (necessary condition) สำหรับความคล้องจองคือ $E(x_i - \hat{x}) = 0$ หรือกล่าวได้ว่า $\left(\frac{1}{N}\right)\sum(x_i - \hat{x}) = 0$ แก้สมการได้ว่า $\hat{x} = (\frac{1}{N})\sum x_i = \bar{x}$ ซึ่งเป็นค่าประมาณค่าเฉลี่ยของตัวอย่างโดยที่ $\bar{x}$ คือตัวประมาณค่าด้วยวิธีการของโมเมนต์ เนื่องจากเป็นค่าที่ได้จากเงื่อนไขจำเป็น นอกจากนั้นเรายังสามารถที่จะใช้วิธีการของโมเมนต์เพื่อที่จะได้รับตัวประมาณค่าที่คล้องจองสำหรับแบบจำลองการถดถอยพหุคูณ (multiple regression model) เช่นสมมติว่าต้องการที่จะประมาณค่าแบบจำลองซึ่งมีตัวแปรจำนวน k

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \tag{3.33}$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัว $\beta_j, j = 1,2,\ldots,k$ และเพื่อที่จะเป็นค่าประมาณที่คล้องจองนั้น เงื่อนไขเหล่านี้ได้ถูกกำหนดขึ้น คือ (โดยที่ $x_{1i} = 1$)

$E[x_{ji}\varepsilon_i] = Ex_{ji}[y_i - \hat{\beta}_j x_{ji}] = 0$ หรืออีกรูปแบบหนึ่ง

$$\left(\frac{1}{N}\right)\sum x_{ji}\hat{\varepsilon}_{ji} = \left(\frac{1}{N}\right)\sum x_{ji}(y_i - \hat{\beta}_j x_{ji}) = 0 \tag{3.34}$$

โดยที่ทั้ง 2 สมการดูคล้ายกัน และเมื่อเราทำเป็นรูปแบบของสมการปกติ (normal equations of form) ได้ว่า

$$\sum x_{ji}\hat{\varepsilon}_{ji} = \sum x_{ji}(y_i - \hat{\beta}_j x_{ji}) = 0 \qquad (3.35)$$

โดยค่า $\hat{\beta}_i ... \hat{\beta}_k$ ที่ประมาณออกมานี้ก็ยังคงเป็นตัวประมาณค่า GMM ด้วย เนื่องจากเกี่ยวข้องกับเงื่อนไขลำดับที่หนึ่ง (first moment) ของตัวแปรสุ่ม

อย่างไรก็ตาม ตัวประมาณค่าที่อาศัยตัวแปรเครื่องมือ (instrumental variables estimators) ก็เป็นตัวประมาณค่า GMM ด้วย โดยสิ่งที่สนับสนุนคือ ถ้าต้องประมาณค่าแบบจำลองพหุคูณซึ่งมีตัวแปร k ตัวแต่มีความกังวล (เช่นในกรณีที่เป็น simultaneity หรือ measurement error) ว่า $x's$ อาจมีความสัมพันธ์กับพจน์คลาดเคลื่อน และยังสมมติต่อไปว่าเราพิจารณาตัวแปรเครื่องมือสำหรับแต่ละค่า x_j โดยการกำหนด z_j โดยที่ตัวแปรเครื่องมือนี้อย่างน้อยต้องสัมพันธ์กับ x อย่างน้อย 1 ตัว แต่ต้องไม่มีความสัมพันธ์กับพจน์คลาดเคลื่อนโดยที่เงื่อนไขจำเป็นสำหรับ β_j เพื่อที่จะเป็นตัวประมาณค่าที่คล้องจองสำหรับแต่ละ j คือ

$$E[z_{ji}(y_i - \hat{\beta}_j x_{ji})] = 0$$ หรือเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งว่า

$$\left(\frac{1}{N}\right)\sum z_{ji}(y_i - \hat{\beta}_j x_{ji}) = 0$$

โดยที่สมการนี้เป็นสมการปกติ (normal equation) ที่รวมตัวแปรเครื่องมือไว้ในกระบวนการด้วย และจากที่ทำการอธิบายข้างต้นนั้นโดยปกติจะมีค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าเท่ากับจำนวนสมการ อย่างไรก็ตามเมื่อแบบจำลองเป็นไม่เป็นเชิงเส้น (non-linear) อาจจะทำให้สมการปกติ มากกว่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าซึ่งในกรณีนี้แบบจำลองจะเป็น over identified โดยที่ตัวประมาณค่า GMM เป็นวิธีการที่สามารถหาตัวประมาณค่าที่คล้องจอง ซึ่งใช้ข้อมูลทั้งหมดและบอกเป็นนัยถึงกลุ่มสมการ (set of equation) ของ over identified โดยที่รูปแบบทั่วไปเช่น ตัวประมาณค่า GMM สามารถถูกใช้เพื่อประมาณสมการเดี่ยว (single equation) สมมติว่าต้องการประมาณแบบจำลองที่ไม่เป็นเชิงเส้น (non-linear model) ซึ่งมีตัวแปรอธิบายจำนวน k ตัวดังนี้

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_k, \beta_1, \beta_2 ...) + \varepsilon \qquad (3.36)$$

โดยสมมุติว่ามีหลายเหตุผลที่เป็นไปได้ (เช่น ความไม่เป็นเชิงเส้น, measurement error และ simultaneity) และมีความกังวลว่าตัวแปรอธิบายบางตัวอาจจะมีความสัมพันธ์กับพจน์คลาดเคลื่อน โดยที่สมมติว่าสุดท้ายแล้วจำเป็นต้องเลือกตัวแปรเครื่องมือจำนวน k+1 ที่พอจะเป็นไปได้ (โดยที่ตัวแปรเครื่องมือบางตัวสามารถถูกรวมอยู่ในตัวแปรอธิบาย) ดังนั้นตัวแปรเครื่องมือจำนวน k+1 เหล่านี้จะถูกใช้ในสมการปกติ (normal equation)

$$\sum z_{ji}\hat{\varepsilon}_j = \sum z_{ji}[y_i - f_j(\;)x_{ji}] = 0 \qquad (3.37)$$

โดย f_j เป็นตัวแทน $\partial f(\;)/\partial x_j$ นั้นคือ $\beta_j's$. เพราะว่าระบบสมการนี้เป็น over identified (มีสมการจำนวน k+1 สมการ และมีสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าจำนวน k ตัว) และกำหนดให้ μ_{ji} เป็นตัวแทนของค่าคลาดเคลื่อนซึ่งถูกรวมอยู่กับสมการปกติของแต่ละสมการ

$$\mu_{ji} = \sum z_{ji}[y_i - f_j(\;)x_{ji}] \qquad (3.38)$$

โดยในการประมาณนั้นสามารถที่จะเข้าถึงวิธีการประมาณที่เป็นไปได้ให้คล้องจองกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) เพื่อที่จะเลือก $\beta's$ ซึ่งให้ค่าผลรวมยกกำลังสองของพจน์คลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด

อย่างไรก็ตาม Verbeek (2000) ได้กล่าวถึงวิธีการของโมเมนต์ในรูปทั่วไป (generalized method of moment: GMM) ว่าในกรณีที่เราจะพิจารณาแบบจำลองซึ่งมีเซต (set) ของ R เงื่อนไขโมเมนต์ (moment conditions) ดังนี้

$$E\{f(w_t, z_t, \theta)\} = 0 \qquad (3.39)$$

โดยที่

f คือ ฟังก์ชันเวกเตอร์ซึ่งประกอบไปด้วย R สมาชิก

θ คือ เวกเตอร์ที่มีมิติเท่ากับ k ซึ่งเป็นเวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า

w_t คือ เวกเตอร์ของตัวแปรที่สามารถสังเกตได้ซึ่งอาจจะเป็นตัวแปรในระบบ (endogenous) หรือตัวแปรนอกระบบ (exogenous) ก็ได้

z_t คือ เวกเตอร์ของเครื่องมือ

เราจะใช้ตัวอย่างที่สมมูล (equivalent) กับสมการที่ (3.39) ซึ่งกำหนดโดย

$$g_t(\theta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(w_t, z_t, \theta) \qquad (3.40)$$

โดยถ้าจำนวนของเงื่อนไขโมเมนต์ (moment conditions) ซึ่งมีเท่ากับ R เงื่อนไขเท่ากันกับจำนวนของสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า k ตัวเราก็จะสามารถให้ R สมาชิก (elements) ในสมการที่

(3.40) เท่ากับ 0 และหาค่า θ ออกมาซึ่งจะได้ตัวประมาณค่าที่คล้องจอง (consistent estimator) ที่มีลักษณะหนึ่งเดียวหรือเป็นไปได้อย่างเดียว (unique) (Verbeek, 2000 :141) นอกจากนี้ Verbeek (2000 : 141) ยังได้ให้ข้อสังเกตเพิ่มเติมดังนี้

ถ้า f มีลักษณะไม่เชิงเส้น (nonlinear) ใน θ ผลเฉลย (solution) อาจจะไม่สามารถหาได้

ถ้าจำนวนเงื่อนไขโมเมนต์น้อยกว่าจำนวนสัมประสิทธิ์เราจะไม่สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าแบบหนึ่งเดียว (uniquely) ได้โดยการให้สมการ (3.40) มีค่าเท่ากับ 0 เราจะเลือกตัวประมาณค่าสำหรับ θ ในลักษณะที่ว่าเวกเตอร์ของโมเมนต์ตัวอย่าง (sample moments) มีค่าใกล้ 0 เท่าที่จะเป็นไปได้ในความหมายที่ว่ารูปแบบกำลังสอง (quadratic form) ใน $g_t(\theta)$ มีค่าต่ำสุดนั้นคือ

$$\min_{\theta} Q_T(\theta) = \min_{\theta} g_T(\theta)' W_T g_T(\theta) \qquad (3.41)$$

โดยที่ W_T คือเมทริกบวกแน่นอน (positive definite matrix) ด้วย $p\ lim\ W_T = W$ ผลเฉลย (solution) ของปัญหานี้คือตัวประมาณค่า GMM (θ) และเราก็สามารถแสดงให้เห็นได้ว่าตัวประมาณค่า GMM (GMM estimator) มีลักษณะคล้องจอง (consistent) และมีการแจกแจงปกติเชิงเส้นกำกับภายใต้เงื่อนไข weak regularity

ในทางปฏิบัติตัวประมาณค่า GMM นั้น หาได้จากการทำให้สมการที่ (3.41) มีค่าน้อยที่สุด และจากเมทริกที่ใช้ถ่วงน้ำหนัก (W_T) ซึ่งแตกต่างกันจะให้ตัวประมาณค่าที่คล้องจอง (consistent estimators) ที่แตกต่างกัน เมทริกที่ใช้ถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสมซึ่งจะนำไปสู่เมทริกความแปรปรวนของโมเมนต์ตัวอย่าง (sample moments) ในกรณีที่ไม่มีอัตสหสัมพันธ์ (autocorrelation) เมทริกที่ถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสมสามารถเขียนได้ดังนี้

$$W^{OPT} = \left(E\{f(w_t, z_t, \theta) f(w_t, z_t, \theta\}' \right)^{-1}$$

โดยทั่วไปแล้วเมทริกนี้จะขึ้นอยู่กับเวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า (θ) ซึ่งเป็นปัญหาที่เราไม่ได้พบในแบบจำลองเชิงเส้น ผลเฉลย (solution) ก็คือ เราจะใช้กระบวนการ การประมาณค่าหลายขั้นตอน ในขั้นตอนแรกเราจะใช้ทางเลือกของตัวแทนที่ดีที่สุด (suboptimal choice) ของ W_T ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับ θ เช่นเมทริกเอกลักษณ์ (identity matrix) เพื่อที่จะหาค่าตัวประมาณค่าคล้องจอง ตัวแรก $\hat{\theta}_{[1]}$ หลังจากนั้นเราก็จะประมาณค่าเมทริกที่ใช้ถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสมโดย

$$W_T^{OPT} = \left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{T} f(w_t, z_t, \theta) f(w_t, z_t, \theta)'\right)' \quad (3.42)$$

ขั้นตอนที่สอง เราก็จะสามารถหาตัวประมาณค่า GMM ที่มีประสิทธิภาพ (เหมาะสม) เชิงเส้นกำกับ $\hat{\theta}_{GMM}$ ได้โดยมีการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (asymptotic distribution) ดังนี้

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{GMM} - \theta) \rightarrow N(0, V) \quad (3.43)$$

โดยที่เมทริกความแปรปรวนร่วมเชิงเส้นกำกับ (asymptotic covariance matrix) V คือ

$$V = (DW^{OPT} D')^{-1} \quad (3.44)$$

โดยที่ D = K x R เมทริกอนุพันธ์ (derivative matrix)

$$D = E\left\{\frac{\partial f(w_t, z_t, \theta)}{\partial \theta'}\right\} \quad (3.45)$$

สำหรับการทดสอบข้อจำกัดเกี่ยวกับ over identifying สำหรับแบบจำลองไม่เชิงเส้น (nonlinear models) นั้น ถ้ากำหนดให้ว่าเงื่อนไขโมเมนต์ (moment conditions) นั้นถูกต้อง สถิติทดสอบ (test statistic)

$$\zeta = Tg_T(\hat{\theta}_{GMM})' W_T^{OPT} g_T(\hat{\theta}_{GMM})$$

โดยที่

$\hat{\theta}_{GMM}$ คือ ตัวประมาณค่า GMM ที่เหมาะสม

W_T^{OPT} คือ เมทริกที่ใช้ถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสมในสมการ (3.42)

ค่า ζ นี้มีการแจกแจงเชิงเส้นกำกับแบบไคสแควร์ด้วยระดับความอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ R-K ถ้าในกรณีที่เป็น exactly identified ก็จะมีระดับความอิสระเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจะไม่มีสิ่งใดจะต้องทดสอบ (Verbeek, 2000)

ทฤษฎีเกี่ยวกับการประมาณค่าด้วยวิธีการของโมเมนต์ในรูปทั่วไป (generalized method of moments: GMM) ช่วยให้เกิดการทดสอบที่สำคัญประการหนึ่งในงานวิจัยฉบับนี้คือการพิจารณาเกี่ยวกับการทดสอบข้อจำกัดเกี่ยวกับ over identifying ซึ่งจากการทบทวนเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในอดีตพบว่ามีการทดสอบดังกล่าว โดยผลของการทดสอบข้อจำกัดเกี่ยวกับ over identifying จะนำไปสู่การสรุปผลเกี่ยวกับความคงที่ (constant) ของค่าสัมประสิทธิ์ที่สนใจที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธี GMM เช่น การทดสอบความคงที่ของสัดส่วนระหว่างผลตอบแทนของตลาดต่อความเสี่ยงของตลาด (λ) หรือการทดสอบเกี่ยวกับความคงที่ของค่าสัมประสิทธิ์เบต้า (beta coefficient: β)เป็นต้น โดยค่าสถิติที่ใช้ทดสอบคือ ζ ซึ่งถูกเรียกว่าค่า J-statistic โดยมีสมมติฐานคือ

H_0 : Over identifying restrictions are satisfied

H_1 : Over identifying restrictions are not satisfied

การแปลผลการทดสอบดังกล่าวจากการศึกษาในอดีตเช่นการศึกษาของ Harvey (1989) ; Hamori (1997) และ Jan, Chou and Huag (2000) พบว่า ในกรณีที่ยอมรับสมมติฐานว่าง (H_0) หมายถึง ค่าสัมประสิทธิ์จากการประมาณด้วยวิธี GMM ที่เราต้องการทดสอบมีลักษณะคงที่ (constant) หรือไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ส่วนในกรณีที่ปฏิเสธสมมติฐานว่าง (ปฏิเสธ H_0) จะหมายถึงค่าสัมประสิทธิ์ดังกล่าวมีลักษณะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา (vary through time)

อย่างไรก็ตาม การสรุปผลจากการทดสอบข้อจำกัด over identifying Harvey (1989: 293) ได้กล่าวเพิ่มเติมว่า การปฏิเสธสมมติฐานว่าง (H_0) จะหมายถึงการที่ตัวแปรเครื่องมือ (instrumental variables) มีความสัมพันธ์ (correlation) กับพจน์คลาดเคลื่อน (error term) ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานของการประมาณด้วยวิธี GMM และทำให้แบบจำลองไม่ถูกต้อง (misspecified) หรืออาจกล่าวได้ว่าการทดสอบ J-statistic ถูกใช้เพื่อทดสอบเกี่ยวกับเงื่อนไข orthogonality ของตัวแปรเครื่องมือกับพจน์คลาดเคลื่อน (Jan, Chou and Huag , 2000: 4)

Harvey (1989) ; Hamori (1997) และ Jan, Chou and Huag (2000) ได้มีการพิจารณาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการทดสอบเงื่อนไข orthogonality ของตัวแปรเครื่องมือกับพจน์คลาดเคลื่อนอีกวิธีหนึ่งโดยการถดถอยด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (ordinary least square: OLS) ระหว่างค่าคลาดเคลื่อนจากการตั้งราคา (pricing error) ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธี GMM กับตัวแปรเครื่องมือและพิจารณาจากค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (coefficient of determination: R^2) โดยถ้าค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจดังกล่าวมีค่าสูงจะแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเครื่องมือกับค่าคลาดเคลื่อนจากการตั้งราคา (pricing error) ซึ่งหมายถึงแบบจำลองไม่ถูกต้อง

ดังนั้น ในงานวิจัยฉบับนี้จึงมีความจำเป็นที่จะประยุกต์ใช้วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีการของโมเมนต์ในรูปทั่วไป (generalized method of moments: GMM) และการทดสอบข้อจำกัดเกี่ยวกับ over identifying โดยการใช้การทดสอบ J-statistic ในการทดสอบเงื่อนไขที่ถูกกำหนดจากแบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (CAPM) บางประการ

3.6 การทดสอบข้อจำกัดของค่าสัมประสิทธิ์ด้วยวิธี Wald test

จากการทบทวนเอกสารที่เกี่ยวกับการทดสอบเงื่อนไขที่ถูกกำหนดจากแบบจำลองการตั้งราคาทรัพย์สินประเภททุน (CAPM) พบว่า ส่วนหนึ่งเป็นการทดสอบเกี่ยวกับข้อจำกัดของค่าสัมประสิทธิ์ (coefficient restrictions) เช่นการทดสอบความคงที่ของสัดส่วนระหว่างผลตอบแทนของตลาดต่อความเสี่ยงของตลาด (λ) ของ Harvey (1989) หรือการทดสอบที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือการทดสอบว่าสัดส่วนระหว่างผลตอบแทนของตลาดต่อความเสี่ยงของตลาด มีค่าเท่ากันระหว่างกลุ่มหลักทรัพย์ (portfolio) หรือไม่ ในการศึกษาของ Harvey (1989) ; Hamori (1997) และ Jan, Chou and Huag (2000) ซึ่งการทดสอบเงื่อนไขในลักษณะดังกล่าวคือการทดสอบเกี่ยวกับของจำกัดของสัมประสิทธิ์ (coefficient restrictions) ซึ่งจำเป็นต้องใช้เครื่องมือทางเศรษฐมิติในการทดสอบ โดยการวิจัยครั้งนี้จะใช้ประยุกต์ใช้ Wald test ซึ่งเป็นวิธีการทดสอบที่เป็นที่นิยมในปัจจุบัน ตัวอย่างการศึกษาที่ใช้ Wald test ในการทดสอบเช่นการศึกษาของ Vaihekoski (2000) และ Garcia and Bonomo (2001) เป็นต้น โดยแนวคิดเกี่ยวกับ Wald test มีดังนี้

Thomas (1993) กล่าวว่า เราสามารถใช้ Wald test ในการทดสอบ simultaneously ซึ่งเป็นการพิจารณาความเหมาะสมของข้อจำกัด (restriction) ที่มากกว่า 1 ข้อจำกัดซึ่งในการพิจารณานั้นเรามีความจำเป็นในการประมาณสมการที่ไม่ถูกจำกัด (unrestricted equation) โดยแนวคิดในการสร้างสิ่งที่จะใช้ในการพิจารณาเกี่ยวกับการประมาณ β's ที่น่าพอใจที่ไม่ถูกจำกัด (unrestricted estimates of the β's satisfy) ซึ่งมีข้อจำกัดมากขึ้นนั้นสามารถถูกทดสอบได้

อย่างไรก็ตาม เราจำเป็นต้องพิจารณาเกี่ยวกับผลทั่วไปที่เป็นประโยชน์ก่อน โดยต้องคำนึงเสมอว่าถ้า

$$z_i \text{ คือ } N(0,c_i^2) \text{ โดยที่ } i = 1,2,3,\ldots,h \qquad (3.46)$$

ดังนั้น $\sum \frac{z_i^2}{c_i^2}$ จะมีการกระจายแบบไคสแควร์และมีระดับความอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ h โดยที่มีการจัดเตรียมให้ z_i คือการกระจายที่ไม่เป็นอิสระ (independently distributed)

อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ Wald test มีการกระจายแบบปกติ (normal) ซึ่งไม่ใช่การกระจายที่ไม่เป็นอิสระ (independently distributed) ดังนั้นเราไม่สามารถที่จะหาไคสแควร์ได้จากการยกกำลัง 2 และรวมแต่ละค่าสถิติ w (w-statistics) อย่างไรก็ตามถ้าสมการที่ (3.46) นั้นมีลักษณะที่ว่า

$$Co\operatorname{var}(z_i, z_j) = c_{ij} \neq 0, \quad i \neq j \tag{3.47}$$

โดยที่ว่า z_i ไม่เป็นอิสระ (are not independent) ดังนั้นถ้าเรากำหนดเมทริกความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของเมทริก C (variance-covariance matrix C) และเวกเตอร์ z ดังนี้

$$C = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_{12} & c_{13}\cdots & c_{1h} \\ c_{21} & c_2^2 & c_{23}\cdots & c_{2h} \\ c_{31} & c_{32} & c_3^2\cdots & c_{3h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{h1} & c_{h2} & c_{h3}\cdots & c_h^2 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_h \end{bmatrix}$$

ดังนั้น แสดงได้ว่า

$z'C^{-1}z$ มีการกระจายแบบไคสแควร์ โดยมีระดับความอิสระเท่ากับ h (3.48)

โดยที่ผลจากการลงความเห็นภายใต้ (3.46) และในความเป็นจริงนั้นถือได้ว่าเป็นเรื่องไม่สำคัญ (trivial) ที่จะแสดงว่า ถ้า $c_{ij} \neq 0$ สำหรับ $i \neq j$ แล้ว (3.48) จะลด (reduce) กลับไปเป็นผลของ (3.46)

เราสามารถใช้ผลจาก (3.48) เพื่อสร้าง Wald statistic สำหรับการทดสอบร่วมกัน (joint testing) โดยถ้าเรากำหนดว่า

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

ดังนั้น ข้อจำกัด (constrains) $\beta_2 = \beta_3$ และ $\beta_4 + \beta_5 = 1$ โดยสามารถเขียนในรูปเมทริกได้ว่า

$$R\beta = r \tag{3.50}$$

โดยถ้า $\widetilde{\beta}$ คือเวกเตอร์ของ β ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดหรือวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (OLS/ML estimators of the elements of β) และจากการที่ $\widetilde{\beta}$ มีการกระจายแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ยซึ่งถูกกำหนดโดยแต่ละกลุ่มของ β (respective elements of β) และเมทริกต์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม (variance-covariance matrix) $\sigma^2(X'X)^{-1}$

$$\widetilde{\beta} \text{ is } N[\beta, \sigma^2(X'X)^{-1}] \tag{3.51}$$

ได้ว่า

$$R\widetilde{\beta} \text{ is } N[R\beta, \sigma^2 R(X'X)^{-1}R'] \tag{3.52}$$

จะได้ว่าสมมุติฐานว่างที่กล่าวว่าข้อจำกัดนั้นถูกต้อง (restrictions are valid)

$$R\widetilde{\beta} - r \text{ is } N[0, \sigma^2 R(X'X)^{-1}R'] \tag{3.53}$$

โดยการปฏิบัติหรือดำเนินการทั้ง 2 ปัจจัย (two element) ของเวกเตอร์ $R\beta - r$ นั้นเหมือนหรือคล้ายกับ z_i ในสมการ (3.46) โดยเราสามารถประยุกต์ผลในสมการ (3.48) ซึ่งหมายความถึงสมมติฐานว่าง ที่กล่าวว่าข้อจำกัดนั้นถูกต้อง (under null hypothesis of valid restrictions)

$$W^* = \widetilde{\sigma}^{-2}(R\beta - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r) \tag{3.54}$$

โดยสมการที่ (3.54) มีการกระจายแบบไคสแควร์โดยมีระดับความอิสระเท่ากับ h =2

โดยผลในสมการที่ (3.54) จะยึดถือ (hold) สำหรับจำนวนตัวอย่างขนาดใหญ่ (large sample) อย่างไรก็ตาม เราได้แทน σ^2 ด้วยตัวประมาณค่าด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด $\widetilde{\sigma}^2$ (MLE $\widetilde{\sigma}^2$)ของตัวมันเอง ซึ่งหาได้จากการประมาณที่ไม่มีข้อจำกัด (unrestricted estimation)

โดยสมการที่ (3.54) คือ Wald statistic สำหรับการทดสอบร่วมกัน (joint testing) ของ 2 ข้อจำกัด $\beta_2 = \beta_3$ และ $\beta_4 + \beta_5 = 1$ ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของเวกเตอร์ $R\widetilde{\beta} - r$ ซึ่งคือ $\widetilde{\beta}_2 - \widetilde{\beta}_3$ และ $\widetilde{\beta}_4 + \widetilde{\beta}_5 - 1$ โดยเรากำลังจะวัดขนาดของค่าเหล่านี้ว่าแตกต่างจาก 0 เช่น พบว่า การประมาณ $\widetilde{\beta}$ นั้นไม่ดีเพียงพอสำหรับข้อจำกัด เราจะปฏิเสธสมมติฐานว่าง และสามารถพิจารณาได้ว่าข้อจำกัดดังกล่าวไม่สอดคล้องกับข้อมูล (restrictions as inconsistent with the data) โดยสิ่งสำคัญ

คือการกำหนด R และ r ให้เหมาะสม ซึ่งมันมีความเป็นไปได้ในการทดสอบข้อจำกัดเกี่ยวกับค่าสัมประสิทธิ์ในข้อจำกัดเชิงเส้น (linear restrictions) โดยการใช้ Wald statistic (3.53) ซึ่งรูปแบบโดยทั่วไปแล้วจะมีระดับความอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ h โดย h เท่ากับจำนวนของข้อจำกัดซึ่งอยู่ในการทดสอบร่วมกัน (number of restrictions being jointly tested)