บทที่ 4

วิธีการศึกษา

เนื่องจากวิทยานิพนธ์นี้จะพิจารณาถึงผลของการละทิ้งตัวแปรที่เกี่ยวข้องออกไปจากแบบจำลอง โดยจะพิจารณาควบคู่ไปกันกับค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) เพื่อทำการทดสอบถึงสมมุติฐานที่ว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) ของตัวแปรที่ถูกละทิ้ง กับตัวแปรอิสระตัวอื่นๆ ยิ่งมีค่าเข้าใกล้ $|1|$ ค่าของสัมประสิทธิ์ที่ประมาณค่ามาได้ จะมีความเอนเอียง (biased) ไปจากค่าสัมประสิทธิ์ที่แท้จริงมากขึ้น และจะดูผลการเปลี่ยนแปลงในค่า R^2 ที่เป็นผลมาจากการเกิดความเอนเอียงในค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร และยังดูการเปลี่ยนแปลงในค่าความแปรปรวนความคลาดเคลื่อน ค่าความแปรปรวนของค่าสัมประสิทธิ์ และค่า Durbin-Watson ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้ จะใช้วิธีการสร้างตัวเลขจำลองขึ้นมา โดยอาศัยวิธีการของ Monte Carlo Method โดยกำหนดให้แบบจำลองที่จะทำการศึกษาในแต่ละแบบจำลองที่แท้จริงนั้น ไม่มีผลของ heteroscedastiicity และ autocorrelation ซึ่งจะมีวิธีการวิจัยดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การกำหนดรูปแบบของแบบจำลองที่แท้จริง และแบบจำลองทดสอบ ซึ่งแบบจำลองทดสอบจะมีการละทิ้งตัวแปรอิสระตัวที่ 4 (X_4) ออกไป และมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) ระหว่างตัวแปรอิสระ X_1 กับ X_4 มีค่าที่แตกต่างกันไปในแต่ละแบบจำลองทดสอบ โดยจะมีการกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) ระหว่างตัวแปรอิสระ X_1 กับตัวแปรอิสระ X_2 , X_3 และระหว่าง X_4 กับตัวแปรอิสระ X_2 , X_3 และระหว่างตัวแปรอิสระ X_2 กับตัวแปรอิสระ X_3 มีค่าอยู่ในช่วง 0-0.3 โดยสมมุติว่ามีจำนวนค่าสังเกตอยู่ 100 ค่า (n=1,...100)

ขั้นตอนที่ 2 ทำการสร้างตัวเลขจำลองตามวิธีการ Monte Carlo ในแบบจำลองที่แท้จริงแล้วนำไปคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในแบบจำลองทดสอบ ตามเงื่อนไขของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) ที่กำหนดไว้ในแต่ละแบบจำลอง โดยจะมีการทำซ้ำ หรือจำนวนการทดลอง 1,000 ครั้ง (N=1,...,1000)

ขั้นตอนที่ 3 ทำการคำนวณค่าเอนเอียง (biased) ที่เกิดขึ้นในค่าของสัมประสิทธิ์แต่ละตัวแปร ที่อยู่ในแบบจำลองทดสอบทุกแบบจำลอง แล้วบันทึกผลที่ได้

ขั้นตอนที่ 4 คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) ระหว่างตัวแปร X_1 กับ X_4 ในแต่ละการทำซ้ำ หรือการทดลอง บันทึกค่าที่ได้

ขั้นตอนที่ 5 คำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) กับค่าความเอนเอียง (biased) ที่เกิดขึ้นในค่าสัมประสิทธิ์ เพื่อหาขนาดและอัตราส่วนของความเอนเอียง (biased) ในค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละตัวแปรอิสระในแต่ละแบบจำลองทดสอบ

ขั้นตอนที่ 6 พิจารณาว่าความเอนเอียงที่เกิดขึ้นในค่าสัมประสิทธิ์จะทำให้การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของการตัดสินใจ (coefficient of determination : R^2) เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรบ้าง

ขั้นตอนที่ 7 พิจารณาความเอนเอียงที่เกิดขึ้นในการประมาณค่า $\sigma^2, \mathrm{var}\left(\hat{\beta}_i\right)$ และค่า Durbin-Watson

จากที่ได้กล่าวถึงระเบียบวิธีการศึกษาพอสังเขป ต่อไปเป็นการกล่าวถึงรายละเอียดของขั้นตอนการศึกษาโดยละเอียด ดังต่อไปนี้

4.1 การกำหนดแบบจำลอง

กำหนดรูปแบบของแบบจำลองทั้งแบบจำลองที่แท้จริง และแบบจำลองที่เกิดการละทิ้งตัวแปร ซึ่งมีดังนี้

$$True\,Model;\ Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + u \tag{4.1}$$

ส่วนแบบจำลองทดสอบ ที่มีการละทิ้งตัวแปรอิสระ (X_4) โดยตัวแปรอิสระ X_1 กับ X_4 มีความสัมพันธ์เชิงเส้น (ยกเว้นแบบจำลองทดสอบที่ 1) และสมมุติให้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) ระหว่างตัวแปรอิสระ X_1 กับ X_4 มีค่าอยู่ในช่วงต่างๆ ดังที่ได้กำหนดไว้ตามค่า $|r_{x_1x_4}|$ ในแต่ละแบบจำลองทดสอบ โดยกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) ระหว่างตัวแปรอิสระ X_1 กับตัวแปรอิสระ X_2 , X_3 และระหว่าง X_4 กับตัวแปรอิสระ X_2 , X_3 และระหว่างตัวแปรอิสระ X_2 กับตัวแปรอิสระ X_3 มีค่าอยู่ในช่วง 0-0.3 ตลอดทุกแบบจำลอง นั้นก็คือ

$$0.0 \le \left|r_{x_1x_2}, r_{x_1x_3}, r_{x_2x_3}, r_{x_2x_4}, r_{x_3x_4}\right| \le 0.3 \tag{4.2}$$

โดยแบบจำลองที่เกิดปัญหาการละทิ้งตัวแปรอิสระ มีดังนี้

$$Model\ 1: Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + e \quad ;0.0 \le \left| r_{x_1 x_4} \right| < 0.3$$
$$Model\ 2: Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + e \quad ;0.3 \le \left| r_{x_1 x_4} \right| < 0.5$$
$$Model\ 3: Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + e \quad ;0.5 \le \left| r_{x_1 x_4} \right| < 0.7$$
$$Model\ 4: Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + e \quad ;0.7 \le \left| r_{x_1 x_4} \right| < 0.9$$
$$Model\ 5: Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + e \quad ;0.9 \le \left| r_{x_1 x_4} \right| < 1.0$$

(4.3)

เมื่อ	Y	เป็นตัวแปรตาม
	X_1, X_2, X_3 และ X_4	เป็นตัวแปรอิสระ
	$\beta_0, \ldots, \beta_4$	เป็นค่าพารามิเตอร์
	$u \sim n(0,1)$	เป็นค่าของความคลาดเคลื่อน

4.2 การสร้างตัวเลขจำลอง และการประมาณค่า

ทำการสร้างตัวเลขจำลองทั้งในแบบจำลองที่แท้จริง และในแบบจำลองทดสอบของแต่ละแบบจำลองขึ้นมา จากวิธีการ Monte Carlo ที่มีเงื่อนไขตามที่ได้กำหนดไว้ในแบบจำลองทดสอบแต่ละแบบจำลอง โดยให้มีจำนวนของค่าสังเกตของแต่ละแบบจำลองที่ 100 ค่าสังเกต (n=100) ซึ่งจะมีวิธีการต่อไปนี้

1. ในแบบจำลองที่แท้จริง จะมีการกำหนดค่าของสัมประสิทธิ์ $\beta_0,\ldots,\beta_4$ ขึ้นมา และสร้างตัวเลขของตัวแปรอิสระ $X_1,\ldots, X_4$ ตามวิธี Monte Carlo ดังนั้น จะได้ค่าสังเกตของค่า X's ออกมาตัวละ 100 ค่าสังเกต จากนั้นทำการสุ่มตัวเลขของค่าความคลาดเคลื่อน u_i ออกมาอีก 100 ค่า ดังนั้นเมื่อทราบค่าของ $\beta_0,\ldots,\beta_4$ ค่า X's และ u_i แล้วสามารถคำนวณหาค่าของตัวแปรตาม Y ออกมาอีก 100 ค่าได้ และทำการทดสอบว่าเป็นแบบจำลองที่แท้จริงหรือไม่ โดยการทำซ้ำ ประมาณ 1000 ครั้ง แล้วหาค่าเฉลี่ยของพารามิเตอร์แต่ละตัวว่า เท่ากับค่าที่กำหนดไว้หรือไม่ และจะมีการสร้างแบบจำลองที่แท้จริงทั้งหมด 5 แบบจำลองที่เป็นไปตามเงื่อนไขของแบบจำลองทดสอบ

2. การทดสอบในแบบจำลองที่ 1 ถึง 5 จะเป็นการตรวจดูถึงผลของการละทิ้งตัวแปรอิสระ X_4 ออกไปจากแบบจำลองที่แท้จริง เมื่อตัวแปร X_1 กับ X_4 มีความสัมพันธ์กัน ซึ่งจะมีค่าแตกต่างกัน

ไปในแต่ละแบบจำลองทดสอบ ตามเงื่อนไขค่า $\left|r_{x_1x_4}\right|$ โดยนำตัวเลขที่สร้างขึ้นมาทั้ง X's (ยกเว้นตัวที่ 4 (X_4)) และค่าของ Y จากแบบจำลองที่แท้จริงในแต่ละเงื่อนไข มาทำการคำนวณเพื่อประมาณค่าของ $\hat{\beta}_0,\ldots,\hat{\beta}_3$ ในแต่แบบจำลองทดสอบ แล้วบันทึกค่าที่ได้จากนั้นทำการทดลองแบบนี้ซ้ำไปซ้ำมาอีก 1,000 ครั้ง บันทึกผลที่ได้ทุกครั้ง

4.3 การหาค่าความเอนเอียง

นำค่าสัมประสิทธิ์ที่บันทึกไว้มาคำนวณหาค่าความเอนเอียง (biased) ที่เกิดขึ้น โดยมีวิธีการหาค่าความเอนเอียง (biasedness) ที่เกิดขึ้นในค่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวในแต่ละแบบจำลองทดสอบคือ

$$Bias = E\left(\hat{\beta}_{ks}\right) - \beta_{ks} \tag{4.4}$$

เมื่อ $\hat{\beta}_{ks}$ เป็นค่าของค่าสัมประสิทธิ์ที่ประมาณได้ในแต่ละแบบจำลอง

β_{ks} เป็นค่าสัมประสิทธิ์จากแบบจำลองที่แท้จริง

k เป็นจำนวนของค่าสัมประสิทธิ์ (k=0,...,3)

s เป็นจำนวนแบบจำลองทดสอบ (s=1,...,5)

เมื่อได้ค่าความเอนเอียง (biased) ของค่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวในแต่ละแบบจำลองทดสอบออกมาแล้ว ก็ทำการบันทึกผลที่ได้ เพื่อนำไปคำนวณหาขนาดของความเอนเอียงจากความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) กับค่าความเอนเอียงต่อไป

4.4 การหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) ระหว่างตัวแปร X_1 X_2 และ X_3กับ X_4 จาก

$$r_{x_kx_4} = \frac{\sum x_k x_4}{\sqrt{\left(\sum x_k^2\right)}\sqrt{\left(\sum x_4^2\right)}} = \frac{Cov\left(x_k, x_4\right)}{\sigma_{x_k}.\sigma_{x_4}} \tag{4.5}$$

โดยที่ $Cov(x_i, x_j)$ เป็นค่า covariance และค่า $\sigma_{x_i}(s_i)$ กับ $\sigma_{x_j}(s_j)$ เป็นค่า standard deviation ของตัวแปร x_i กับ x_j ตามลำดับ บันทึกค่าที่ได้ทุกครั้งการทดลองแต่ละครั้ง

4.5 การหาความสัมพันธ์ของค่า r กับค่าความเอนเอียง

เนื่องจากว่ามีการละทิ้งตัวแปรอิสระ X_4 ออกไปจากแบบจำลอง ดังนั้นแล้วค่าคาดหมาย (expectation) ของค่าประมาณของสัมประสิทธิ์ที่อยู่ในแบบจำลองก็จะหามาได้ จาก

$$E(\underline{\hat{\beta}}) - \underline{\beta} = [Bias] = \left(X^{*\prime} X^{*}\right)^{-1} X^{*\prime} X_4 \beta_4 \qquad (4.6)$$

เมื่อ $p_4 = \left(X^{*\prime} X^{*}\right)^{-1} X^{*\prime} X_4$ คือสัมประสิทธิ์การถดถอย X_4 กับ X^*

ดังนั้นแล้ว

$$[Bias] = p_4 \beta_4 = \begin{bmatrix} p_{04} \\ p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{bmatrix} \beta_4 \qquad (4.7)$$

ผลที่ได้มานี้ สามารถที่จะแปลงจากความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเอนเอียง (biased) กับผลคูณเมตริกซ์ P และ β_4 ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของค่าความเอนเอียง (biased) กับค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) ระหว่างตัวแปรอิสระ X_1 กับ X_4 ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ดังนี้ (วิธีการคำนวณ สามารถดูได้จากภาคผนวก ก)

$$\begin{aligned}
bias_0 &= a_0 + a_1 r_{x_1x_4} + a_2 r_{x_2x_4} + a_3 r_{x_3x_4} \\
bias_1 &= b_0 + b_1 r_{x_1x_4} + b_2 r_{x_2x_4} + b_3 r_{x_3x_4} \\
bias_2 &= c_0 + c_1 r_{x_1x_4} + c_2 r_{x_2x_4} + c_3 r_{x_3x_4} \\
bias_3 &= d_0 + d_1 r_{x_1x_4} + d_2 r_{x_2x_4} + d_3 r_{x_3x_4}
\end{aligned} \qquad (4.8)$$

เมื่อ $bias_0$ คือ ความเอนเอียงของค่าคงที่

$bias_1$ คือ ความเอนเอียงในค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร X_1

$bias_2$ คือ ความเอนเอียงในค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร X_2

$bias_3$ คือ ความเอนเอียงในค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร X_3

ซึ่งจากความสัมพันธ์ของค่า $bias_0$, $bias_1$ $bias_2$ $bias_3$ กับค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient : r) ที่ได้มานี้จะนำไปถดถอยเพื่อที่จะหาค่าของสัมประสิทธิ์ต่างๆ ของค่า $r_{x_1x_4}, r_{x_2x_4}, r_{x_3x_4}$ ซึ่งในแต่ละแบบจำลองทดสอบจะทำการถดถอยตามสมการ 4.8 คือ

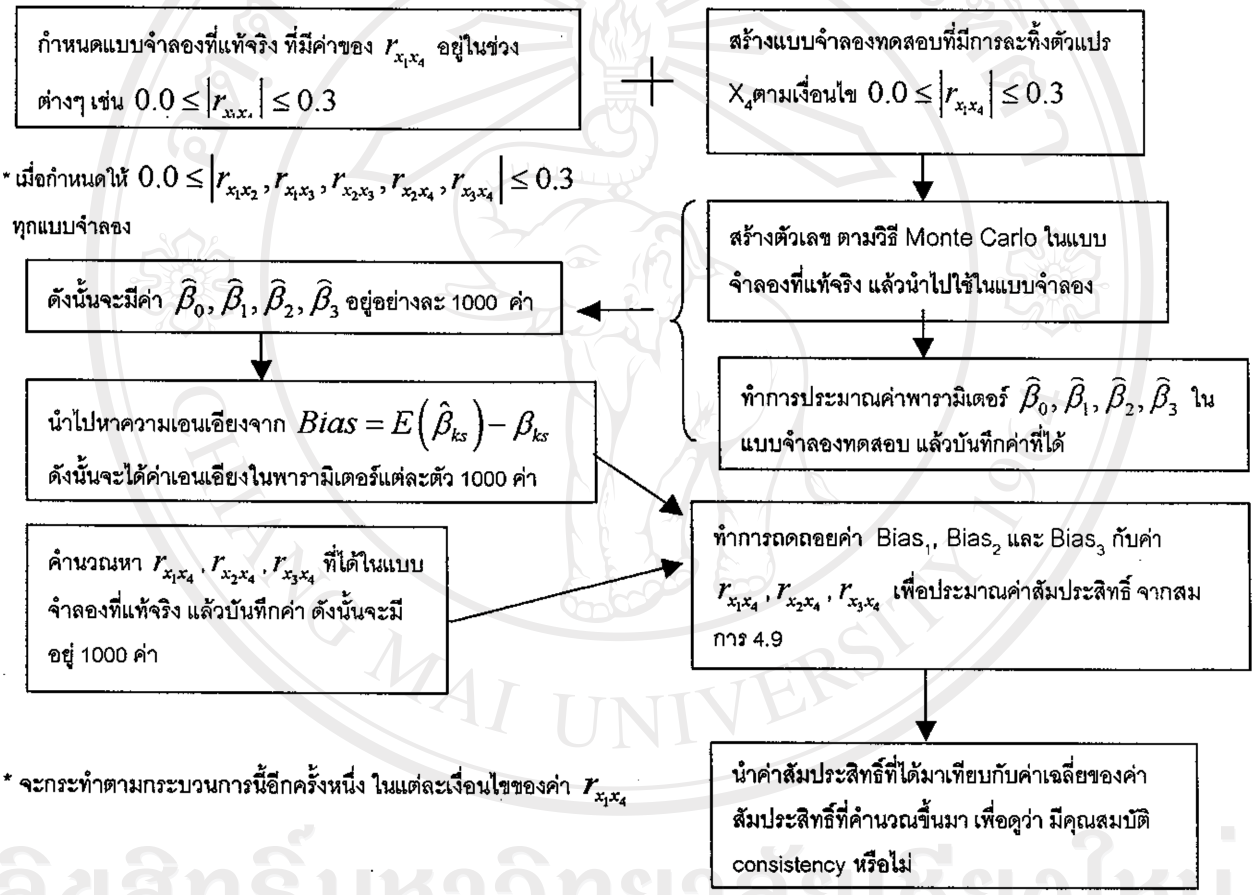
$$\begin{aligned}
bias_0 &= a_0 + a_1 r_{x_1x_4} + a_2 r_{x_2x_4} + a_3 r_{x_3x_4} + error_1 \\
bias_1 &= b_0 + b_1 r_{x_1x_4} + b_2 r_{x_2x_4} + b_3 r_{x_3x_4} + error_2 \\
bias_2 &= c_0 + c_1 r_{x_1x_4} + c_2 r_{x_2x_4} + c_3 r_{x_3x_4} + error_3 \\
bias_3 &= d_0 + d_1 r_{x_1x_4} + d_2 r_{x_2x_4} + d_3 r_{x_3x_4} + error_4
\end{aligned} \tag{4.9}$$

ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการถดถอยก็คือขนาดของความเอนเอียง (biased) ที่เป็นอิทธิพลมาจากความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ถูกละทิ้งไป (X_4) กับตัวแปรอื่นที่อยู่ในแบบจำลอง โดยอัตราส่วนของความเอนเอียงจะหาได้จาก การนำค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการถดถอยมาหารด้วยค่าเฉลี่ยของความเอนเอียงในแต่ละตัวแปร (พิจารณาเฉพาะขนาดเท่านั้น) แล้วเทียบหาอัตราส่วนออกมา นอกจากนี้แล้ว ยังจะพิจารณาดูค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการถดถอยในสมการที่ 4.9 นั้นจะมีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการคำนวณหรือไม่ โดยพิจารณาจากค่าถดถอยที่ได้ในสมการที่ 4.9 กับค่าเฉลี่ยของการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ในสมการที่ 4.8

ในการพิจารณาขนาดของความเอนเอียงในค่าตัดแกน (Intercept term) นั้น จะพิจารณาจากสมการที่ 3.9 ที่ $\tilde{\beta}_0 = \beta_0 + \beta_k \bar{X}_k$ ทำให้การประมาณค่าของ $\hat{\beta}_0$ ในแบบจำลองทดสอบคือ $\hat{\beta}_0 = \beta_0 + \beta_4 \bar{X}_4$ ดังนั้นความเอนเอียงของ $\hat{\beta}_0$ น่าจะเท่ากับ $\beta_4 \bar{X}_4$ จริงหรือไม่ ซึ่งสามารถที่จะทำการทดสอบได้โดยการหาค่าเฉลี่ยของความเอนเอียงใน $\hat{\beta}_0$ ในแต่ละแบบจำลอง แล้วเปรียบเทียบดูว่ามีค่าแตกต่างไปจากค่า $\beta_4 \bar{X}_4$ มากน้อยแค่ไหน นั้นคือ

$$\frac{\sum_{i=1}^{1000} bias_{0i}}{1000} = or \neq \beta_4 \frac{\sum_{i=1}^{1000} \overline{X}_{4i}}{1000}$$

และความแตกต่างที่เกิดขึ้นที่มาจากอิทธิพลของตัวแปรที่เกี่ยวข้องนั้นจะมีขนาดและอัตราส่วนเป็นอย่างไรบ้าง จากกระบวนการดังที่ได้กล่าวมาทั้งหมดสามารถแสดงให้เห็นโดยรวมได้ ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 แสดงขั้นตอนของการศึกษา

4.6. การหาความสัมพันธ์ของค่าสัมประสิทธิ์ของการตัดสินใจ กับความเอนเอียง

จากการที่ได้มีการละทิ้งตัวแปรที่เกี่ยวข้องออกไปจากแบบจำลองนั้น จะทำให้การประมาณค่าสัมประสิทธิ์เกิดความเอนอียง ซึ่งทำให้ค่าส่วนที่เหลือ (residual) มีค่ามากขึ้น ทำให้การประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของการตัดสินใจ (coefficient of determination : R^2) มีค่าลดลง ดังนั้นแล้ว จึงเป็น

ที่น่าสนใจว่า ผลของความเอนเอียงในค่าสัมประสิทธิ์จะไปทำให้ค่า R^2 มีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ซึ่งสามารถหาความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ 4.10 (วิธีการคำนวณดูที่ ภาคผนวก ข)

$$R^{*2} - R^2 = \alpha + \omega_0 bias_0 + \omega_1 bias_1 + \omega_2 bias_2 + \omega_3 bias_3 \qquad (4.10)$$

เมื่อ R^{*2} =สัมประสิทธิ์ของการตัดสินใจในแบบจำลองทดสอบ

R^2 =สัมประสิทธิ์ของการตัดสินใจในแบบจำลองที่แท้จริง

$$\alpha = -\hat{\beta}_4 \sum_{i=1}^{100} X_{4i} W_i$$

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{100} W_i \qquad ; \omega_2 = \sum_{i=1}^{100} X_{2i} W_i$$

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{100} X_{1i} W_i \qquad ; \omega_3 = \sum_{i=1}^{100} X_{3i} W_i$$

แล้วทำการถดถอยตามสมการ

$$R^{*2} - R^2 = \alpha + \omega_0 bias_0 + \omega_1 bias_1 + \omega_2 bias_2 + \omega_3 bias_3 + error_5 \qquad (4.11)$$

จากนั้นก็จะหาอัตราส่วนออกมาเพื่อดูว่าการลดลงของ R^2 นั้นมาจากปัจจัยใดเป็นตัวสำคัญ และจะมีการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการถดถอยในสมการที่ 4.11 นั้นจะมีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการคำนวณหรือไม่ โดยการคำนวณหาค่าเฉลี่ยของค่าสัมประสิทธิ์ในสมการที่ 4.10 แล้วนำมาเทียบกับค่าสัมประสิทธิ์ที่ประมาณค่ามาได้จากการถดถอยในสมการที่ 4.11

4.7 การพิจารณาผลความเอนเอียงในความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน ($\hat{\sigma}^2$) ความแปรปรวนของค่าสัมประสิทธิ์ ($\mathrm{var}(\hat{\beta}_k)$) และในค่า Durbin-Watson

วิธีการคำนวณหาผลที่เกิดขึ้นในความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน ($\hat{\sigma}^2$) ความแปรปรวนของค่าสัมประสิทธิ์ ($\mathrm{var}(\hat{\beta}_k)$)แต่ละตัว และค่า Durbin-Watson จะหาจาก ค่าเฉลี่ยของผลต่างระหว่างค่าที่ได้ในแบบจำลองทดสอบ กับแบบจำลองที่แท้จริง นั้นก็คือ

ค่าเฉลี่ยของผลต่างความแปรปรวนความคลาดเคลื่อนเป็น

$$\frac{\sum_{N=1}^{1000} \Delta\hat{\sigma}_{s,N}^{2}}{1000} = \frac{\sum_{N=1}^{1000} \left(\hat{\sigma}_{s,N,test}^{2} - \hat{\sigma}_{s,N,true}^{2}\right)}{1000} \tag{4.12}$$

ค่าเฉลี่ยของผลต่างความแปรปรวนของค่าสัมประสิทธิ์ ($\mathrm{var}\left(\hat{\beta}_k\right)$) เป็น

$$\frac{\sum_{N=1}^{1000} \left[\Delta \mathrm{var}\left(\hat{\beta}_k\right)\right]_s}{1000} = \frac{\sum_{N=1}^{1000} \left(\mathrm{var}\left(\hat{\beta}_k\right)_{s,N,test} - \mathrm{var}\left(\hat{\beta}_k\right)_{s,N,true}\right)}{1000} \tag{4.13}$$

ค่าเฉลี่ยของผลต่างค่า Durbin-Watson เป็น

$$\frac{\sum_{N=1}^{1000} \Delta d_{s,N}}{1000} = \frac{\sum_{N=1}^{1000} \left(d_{s,N,test} - d_{s,N,true}\right)}{1000} \tag{4.14}$$

แล้วพิจารณาว่าจะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร จากค่าที่แท้จริง ซึ่งอาจจะเป็นผลมาจากการเกิด heteroscedastiicity และ autocorrelation ในแต่ละแบบจำลองทดสอบ