บทที่ 2

แนวคิด ทฤษฎี เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่องนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามหัวข้อต่อไปนี้

2.1 แนวคิดและทฤษฎี ได้แก่

- แบบจำลอง Black-Scholes
- วิธีการคำนวณแบบ Path Integral
- Path Integral ของเฟย์นแมน
- ความสัมพันธ์ระหว่างสมการของ Path Integral กับสมการของ Black-Scholes
- Weight Function
- การ Interpolation Whittaker Parabolic Cylinder Function
- Payoff

2.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 แนวคิดและทฤษฎี

แบบจำลอง Black-Scholes

แบบจำลอง Black-Scholes เป็นแบบจำลองที่เป็นที่นิยม ในการนำมาใช้ในการประเมินมูลค่าออปชันอย่างแพร่หลาย ซึ่งตั้งอยู่บนสมมติฐานหลายข้อที่ค่อนข้างต่างไปจากความเป็นจริง โดยถือว่าตลาดเป็นตลาดในอุดมคติ (Ideal Market)

ภายใต้ Actual Probability Measure (P) ในตลาดอุดมคติที่หลักทรัพย์เสี่ยง S_t มีการจ่ายเงินปันผลเพื่อลงทุนต่อ สามารถใช้แบบจำลอง Ito Stochastic Differential Equation โดยมีการเคลื่อนที่แบบ Brownian Motion (Z_t) ดังสมการที่ 1

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu-\delta)dt + \sigma dZ_t, \quad S_{t=0} = S_0,\ t > 0 \tag{1}$$

โดยที่ μ, σ เป็นค่าคงที่

ในการหาราคาของอนุพันธ์หลักทรัพย์ สามารถนำ Girsanov's Theorem มาใช้เพื่อแปลงค่าจาก Measure P มาเป็น Risk-neutral (Martingale) Probability Measure (Q) ดังสมการที่ 2

$$dW_t = \alpha dt + dZ_t,\ t \geq 0 \tag{2}$$

กำหนดให้

$$\alpha = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{3}$$

ได้ SDE สำหรับการเคลื่อนไหวแบบบราวเนียนภายใต้ Risk-neutral Q ดังสมการที่ 4

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r-\delta)dt + \sigma dW_t \tag{4}$$

โดยที่ r คือ อัตราผลตอบแทนปราศจากความเสี่ยง (Risk-free Rate) ซึ่งหมายความว่า ราคาหลักทรัพย์จะขึ้นอยู่กับค่าอัตราผลตอบแทนปราศจากความเสี่ยง ไม่ว่านักลงทุนจะมีรูปแบบการยอมรับความเสี่ยง (Risk Preference) แบบใดก็ตาม

กำหนดให้

$$x_t = \ln S_t \tag{5}$$

$$dx_t = \lambda(x_t)dt + \nu(x_t)dW_t \tag{6}$$

โดยเรียก $\lambda(x)$ ว่า Drift Coefficient และ $\nu(x)$ ว่า Diffusion Coefficient

วิธีการคำนวณแบบ Path Integral

ดังที่กล่าวมาข้างต้น มีการนำ SDE มาใช้เพื่อหามูลค่าหลักทรัพย์ ซึ่งสมการทั่วไปที่ใช้ในการหามูลค่าออปชันบนสินทรัพย์อ้างอิงดังกล่าว คือ

$$V(S_0,\Lambda,T) = e^{-rT}E^Q[\Lambda(S_T)|S_{t=0}=S_0] \tag{7}$$

โดยที่ $\Lambda(S_T)$ คือ Payoff

S คือ สินทรัพย์อ้างอิง

T คือ เวลาที่สัญญาออปชันหมดอายุ

สมมุติให้อัตราผลตอบแทนปราศจากความเสี่ยงคงที่ ซึ่งสมมติฐานที่สำคัญของ Path Integral คือ มูลค่าหลักทรัพย์ต้องเป็น มาร์ติงเกลส์ (Martingales) ภายใต้ Risk-neutral Probability หรือสมการ SDE ที่ไม่มีความชัน (Driftless SDE) หมายความว่า Drift Coefficient $(\lambda(x_t)dt)$ มีค่าเป็น 0

มาร์ติงเกลส์ในที่นี้สามารถอธิบายในทางคณิตศาสตร์ได้ว่า ค่าคาดหวังไม่ว่าเวลาใดมีค่าเท่ากัน หรือสามารถกล่าวอีกนัยหนึ่งว่ามูลค่าหลักทรัพย์จะขึ้นอยู่กับข่าวสารที่มีในช่วงเวลา t ใดๆ ดังสมการที่ 8

$$E^Q\left[M_{t1}\right] = E^Q\left[M_{t2}\right],\ t_1 \neq t_2 \tag{8}$$

สูตรทั่วไปในการหามูลค่าออปชันแสดงได้ดังสมการที่ 9

$$V_t = e^{-r(T-t)} \int_0^{+\infty} dS_T \rho^Q(t,S|T,S_T)\, \Lambda_T,\ T>t\geq 0 \tag{9}$$

โดยที่ $\rho^Q(t,S|T,S_T)$ คือ Transitional Probability Density Function ซึ่งจะใช้ Path Integral ในการหามูลค่าของ $\rho^Q(t,S|T,S_T)$ นี้

Path Integral ของเฟย์นแมน

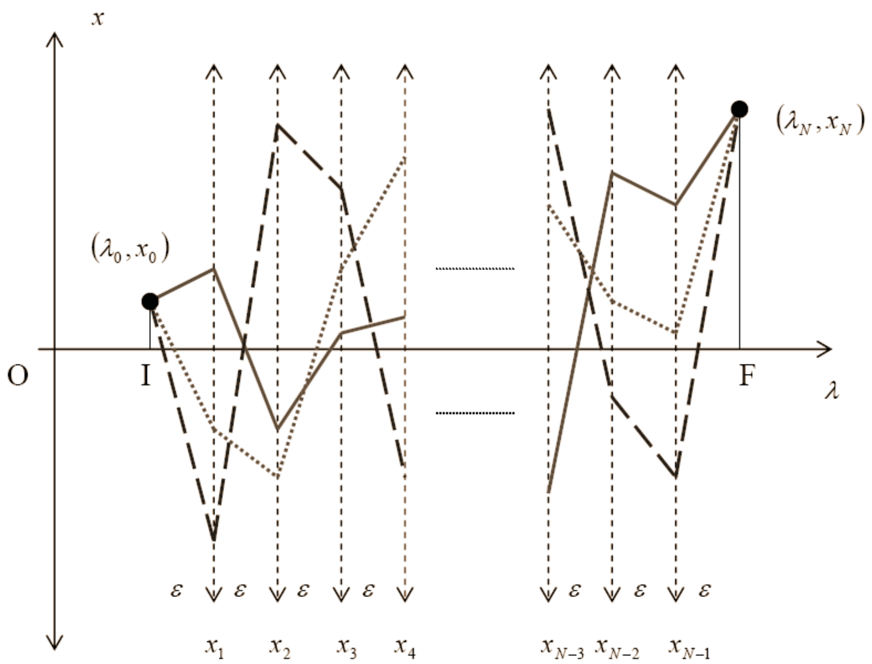
กำหนดให้

$$\rho^Q(t,S|T,S_T) = \int_{x_t}^{X_T} Dx\, \exp(-A[x_t,X_T]) \tag{10}$$

$$\int_{x_I}^{x_F} Dx\, \exp(-A_{IF}[x]\,) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots dx_{N-1} \frac{\exp(-A_{01})}{\#_0(\varepsilon)} \ldots \frac{\exp(-A_{j,j+1})}{\#_j(\varepsilon)} \ldots \frac{\exp(-A_{N-1,N})}{\#_{N-1}(\varepsilon)},$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda_F - \lambda_I}{N},\ \lambda_0 = \lambda_I,\ \lambda_N = \lambda_F,\ \lambda_j = \lambda_I + j\varepsilon,\ x_j = x(\lambda_j),\ A_{j,j+1} = \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} d\lambda L,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_{j,j+1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} d\lambda L\left(x(\lambda), \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}, \lambda\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon L\left(x_j, \frac{x_{j+1}-x_j}{\varepsilon}, \lambda_I + j\varepsilon\right),\ j = 0,\ldots,N-1$$



รูปที่ 1 แสดงหลักการในการนำ Path Integral มาใช้ โดยอาศัยหลักการของ Riemann Integral ทำการ Integrate ทุกๆ เส้นทางที่เป็นไปได้ จึงเป็นที่มาของชื่อ Path Integral

$A[x_t, X_T]$ เรียกว่า Action ในสาขาฟิสิกส์สมัยใหม่ Action ใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงเฟสของฟังก์ชันคลื่น ดังสมการที่ 11

$$A\left[x_t, X_T\right] = \int_t^T L(x_u, \dot{x}_u, u)\,du \tag{11}$$

ในขณะที่ $L(x_u, \dot{x}_u, u)$ คือ Lagrangian ซึ่งใช้อธิบายอัตราการเกิด Action ดังสมการที่ 12

$$L(x_u, \dot{x}_u, u) = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\dot{x}_u - a_u\right)^2 \tag{12}$$

$$\dot{x}(\lambda) = \frac{dx(\lambda)}{d\lambda}$$

$$a_t = r_t - \delta_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2,\ x_t = \ln S_t \text{ and } dx_t = a_t dt + \sigma_t dW_t$$

ซึ่งเส้นทางเหล่านี้จะ Convexity ได้ด้วย Normalization Factors ดังสมการที่ 13

$$\#j\left(\varepsilon, xj\right) = \sqrt{2\pi\sigma^2\left(e^{x_j}\right)\varepsilon}\ \ \forall j=0,\ldots,N-1,\ \varepsilon = \frac{T-t}{N},\ N \geq 2 \tag{13}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างสมการของ Path Integral กับสมการของ Black-Scholes

การคำนวณ Path Integral โดยตรงจะค่อนข้างซับซ้อนและเข้าใจยาก ดังนั้นจะสามารถนำ Van-Vleck Formula สำหรับ Path Integral เกาส์เซียน (Gaussian Path Integral) เช่น Geometric Brownian Motion, Ornstein-Uhlenbeck Process, Cox-Ingersoll-Ross Model เป็นต้น เพื่อใช้สำหรับหาสมการแบบ Closed Form ดังสมการที่ 14

$$\int_{x_t}^{X_T} Dx \exp\left\{-\int_t^T \frac{1}{2\sigma^2}(\dot{x}-a)^2 du\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left(-\frac{(x_t-X_T+a(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right), t<T \qquad (14)$$

แทนที่ในสมการที่ 9 และกำหนดให้

$$X_T|_{x_t=\ln S_t} \sim N_t^Q\left(\ln S_t + (r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right) \qquad (15)$$

$$\wedge_T = \max(S_T-K,0) = \max(e^{X_T}-K,0) \qquad (16)$$

จะได้สมการ Black-Scholes ดังสมการที่ 17

$$C(t,S_t) = S_t e^{-\delta(T-t)} N(d_1) - Ke^{-\delta(T-t)} N(d_2) \qquad (17)$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_T}{K} + \left(r-\delta+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}},\ d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma^2(T-t)},\ N(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \qquad (18)$$

การจำลองเหตุการณ์ Monte Carlo สำหรับหามูลค่าออปชันโดยใช้ Path Integral กับแบบจำลอง Ornstein-Uhlenbeck

กลุ่มตัวอย่างที่สุ่มได้จากกระบวนการ Monte Carlo จะถูกนำมาคำนวณมูลค่าออปชัน $V(F_0,\wedge_N,T_N)$ โดยการหาค่าเฉลี่ยบน 'M' Independent Realization ในเส้นทาง Vector X ดังสมการที่ 19

$$V(F_0,\wedge,T) = E\left[\theta(x_0,X)|x_0=X(S_0)\right] \qquad (19)$$

Weight Function

ในที่นี้จะใช้แบบจำลอง Ornstein - Uhlenbeck เพื่อแสดงพฤติกรรมของหลักทรัพย์ (Giuseppe Campolieti & Roman Marakov: 2007) จากการแก้สมการ SDE ดังสมการที่ 20

$$dx_t = (\lambda_0 - \lambda_1 x_t)dt + \nu_0 dW_t,\ t>0 \tag{20}$$

กำหนดให้

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 > 0$$

จะได้ Transitional Probability Density Function ดังสมการที่ 21

$$u(x,x_0,\tau) = \phi(y,a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{\frac{-(y-a)^2}{2b}} \tag{21}$$

โดยที่ $y = x,\quad a = x_0 e^{-\lambda_1 \tau},$

$$b = \frac{1-e^{-2\lambda_1 \tau}}{\kappa},\qquad \kappa = \frac{2\lambda_1}{\nu_0^2}$$

กำหนดให้คู่ของคำตอบหลัก (Fundamental Solutions) ตลอดช่วงเวลาที่สนใจ ดังสมการที่ 22

$$\varphi_\rho^-(x) = \exp\left(\frac{\kappa x^2}{4}\right) D_{-\nu}\left(-x\sqrt{\kappa}\right),\ \ \varphi_\rho^+(x) = \varphi_\rho^-(-x);\ \ \nu = \rho/\lambda_1 \tag{22}$$

โดยในช่วงเวลาที่สนใจ $I = (l, r) \subseteq R$ มีจุดเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็น $-\infty \leq l < r \leq \infty$

$\varphi_\rho^\pm(x)$ จะเกี่ยวกับฟังก์ชันการเพิ่มและการลด ซึ่งจะมีลักษณะเฉพาะขึ้นอยู่กับตัวแปรที่กำหนด โดยจะอยู่ในเงื่อนไขดังสมการที่ 23

$$\lim_{x\to l^+} \frac{\varphi_s^+(x)}{\varphi_s^-(x)} = 0,\quad \lim_{x\to r^-} \frac{\varphi_s^+(x)}{\varphi_s^-(x)} = \infty \tag{23}$$

กำหนดให้ ρ เป็นค่าที่ถูกกำหนดขึ้นที่ต้องไม่เป็นลบ และ $D_{-\nu}(x)$ เป็น Whittaker's Parabolic Cylinder Function ค่าของ Whittaker Parabolic Cylinder Function ที่ใช้ในการหาค่า Weight Function ของแต่ละเส้นทาง (Abramowitz and Stegun, 1972 : 686-720)

ในการหาค่า $D_{-\nu}(x)$ หาได้ดังสมการที่ 24

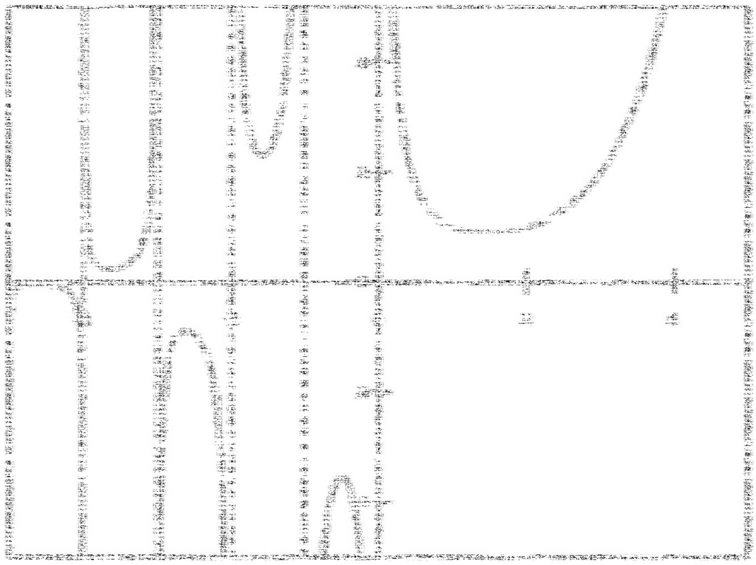
$$D_{-a-\frac{1}{2}}(x) = U(a, x) \tag{24}$$

การหาค่า U (a,-x) ใช้ความสัมพันธ์ ดังสมการที่ 25

$$\pi V(a, x) = \Gamma(\frac{1}{2}+a)\{\sin \pi a \cdot U(a, x)+U(a, -x)\} \tag{25}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปดังสมการที่ 26

$$U(a,-x) = \frac{\pi V(a, x)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)} - \{\sin \pi a \cdot U(a, x)\} \tag{26}$$



รูปที่ 2 แสดงคุณลักษณะของฟังก์ชัน แกมม่า (Γ (a)) โดยสามารถหาได้จาก exp(GAMMALN(a)) ในโปรแกรม Microsoft® Excel

การ Interpolation Whittaker Parabolic Cylinder Function

การ Interpolate ค่าจะใช้แบบ Lagrangian Interpolation แบบ 5 จุด (Autar Kaw, Michael Keteltas) โดยมีหลักการคือ หากมีฟังก์ชัน y = f(x) ซึ่งมีค่าแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Points) มาให้ หากต้องการทราบค่า ณ จุดใดๆ ในช่วงระหว่างค่าที่ทราบ หากเป็นการ Interpolation แบบสองจุดจะเรียกว่า Linear Interpolation ซึ่งเป็นการประมาณค่าแบบง่าย โดยหากมีจุดมากกว่านั้นจะต้องใช้จุดเพิ่ม เพื่อให้มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น

ลำดับแรกต้องคำนวณค่า Weight Function สำหรับการ Interpolation โดย Weight Function ดังกล่าวจะมีจำนวนเท่ากับจุดที่ใช้ในการคำนวณ ดังสมการที่ 27

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{27}$$

จากนั้นจะสามารถคำนวณค่า $f_n(x)$ ได้ดังสมการที่ 28

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)f(x_i) \tag{28}$$

โดยการ Interpolate ค่า U(a, x) ที่ *x* ค่าใดๆ สามารถใช้ Lagrangian Interpolation แบบ 5-6 จุด

ส่วนการ Interpolation ค่า U(a, x) ที่ $|a| < 1$ สามารถใช้ Lagrangian Interpolation แบบ 5-6 จุดได้เช่นกัน แต่หากค่า $|a| > 1$ จะต้องใช้ความสัมพันธ์แบบ Recurrent ดังสมการที่ 29

$$xU(a, x) - U(a-1,x) + \left(a+\frac{1}{2}\right) U(a+1,x) = 0 \tag{29}$$

ซึ่งเป็นวิธีการที่ความแม่นยำค่อนข้างน้อย ในที่นี้ค่า a ขึ้นอยู่กับค่า ρ ซึ่งกำหนดขึ้นเอง หากตั้งค่า ρ ต่ำๆ จะทำให้ $|a| < 1$ และใช้การ Interpolation แบบ Lagrangian 5 จุดก็เพียงพอ

ทั้งนี้ ค่า U(a,x) สามารถเปิดได้จากตารางในภาคผนวก

ตัวแปร Generating Function เป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\varphi_\rho^{\pm}(x)$ ดังสมการที่ 30

$$\hat{u}(x, \rho) = q_1\varphi_\rho^{+}(x) + q_2\varphi_\rho^{-}(x) \tag{30}$$

โดยที่ q_1, q_2 อย่างน้อยต้องมีค่าใดค่าหนึ่งเป็นบวก

ในขณะที่ Transitional Probability Density Function มีค่าดังสมการที่ 31

$$u_\rho(x,x_0,t) = e^{-\rho t}\frac{\hat{u}(x,\rho)}{\hat{u}(x_0,\rho)} u(x,x_0,t) \tag{31}$$

สามารถคำนวณ Weight Function ได้ดังสมการที่ 32

$$W(x_0, X, \tau(T_N)) = e^{-\rho\tau(T_N)}\frac{\hat{u}(x,\rho)}{\hat{u}(x_0,\rho)} \tag{32}$$

Payoff

จากผลงานของ Marco ซึ่งได้ทำการจำลองราคาน้ำมันโดยใช้ Arithmetric Ornstein-Uhlenbeck Model ซึ่งได้กำหนดให้สมการ SDE ภายใต้ Risk-Neutral Measure P เป็นดังสมการที่ 33

$$dx_t = \eta(\bar{x}-x_t)dt+ \sigma dz \tag{33}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับผลงานของ Giuseppe Campolieti & Roman Marakov พบว่า $\eta = \lambda_1, \bar{x} = \lambda_0$ และ $v_0 = \sigma$ ซึ่งกล่าวได้ว่า มีแรงย้อนกลับไปสู่จุดสมดุล $\bar{x}$ เสมอ คล้ายลักษณะ

ของสปริง โดยมี η ซึ่งเรียกว่าความเร็วในการย้อนกลับ (Reversion speed) มีคำตอบที่ได้จาก Ito Integral ดังสมการที่ 34

$$x(T) = x_0 e^{-\eta T} + \left(1-e^{-\eta T}\right)\bar{x} + e^{-T}\int_0^T e^T dz(t) \tag{34}$$

โดยที่ x(t) มีการแจกแจงปกติ ซึ่งค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนสามารถหาได้ดังสมการที่ 35 และสมการที่ 36

$$E\left[x(T)\right] = x_0 e^{-\eta T} + \left(1-e^{-\eta T}\right)\bar{x} \tag{35}$$

$$\mathrm{Var}\left[x(T)\right] = \left(1-e^{-\eta T}\right)\frac{\sigma^2}{2\eta} \tag{36}$$

สมการค่าคาดหวังที่แสดง เปรียบเสมือนกับค่า Weight Average ระหว่างระดับราคา x_0 และ $\bar{x}$

ส่วนค่าความแปรปรวนเพิ่มขึ้นตามเวลา ซึ่งจะเข้าใกล้ค่า $\sigma^2/2\eta$ เมื่อ T เข้าใกล้ค่าอนันต์ โดยที่ความเร็วในการย้อนกลับสัมพันธ์กับค่าครึ่งชีวิต ดังสมการที่ 37

$$H = \frac{\ln 2}{\eta} \tag{37}$$

ค่าครึ่งชีวิต (Half Life) คือ เวลาที่คาดว่าตัวแปร x จะไปถึงครึ่งทาง ไปยังระดับสมดุล $\bar{x}$ โดยในงานวิจัยฉบับนี้กำหนดให้ครึ่งชีวิตอยู่ที่ 2 ปี นั่นคือ $\eta = 0.34$

ในการจำลองเหตุการณ์จึงสร้างสมการแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Time) ได้ดังสมการที่ 38

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta\Delta t} + \bar{x}\left(1-e^{-\eta\Delta t}\right) + \sigma\sqrt{\left(\frac{1-e^{-\eta\Delta t}}{2\eta}\right)} \times N(0,1) \tag{38}$$

กำหนดให้ $\bar{x} = \ln(\bar{P})$ หรือ $\bar{P} = \exp(\bar{x})$

ซึ่งจะได้ค่าคาดหวังราคาสินค้าอ้างอิงที่เวลา T ใดๆ ดังสมการที่ 39

$$E\left[P(T)\right] = \exp\left\{x(0)\, e^{-\eta T} + \bar{x}\,(1-e^{-\eta T})\right\} \tag{39}$$

โดยในที่นี้ไม่สามารถใช้ $P(t) = \exp(x(t))$ ได้ เนื่องจากค่า Exponential ของการกระจายปกติ ได้รวมครึ่งหนึ่งของความแปรปรวนเข้าไปในค่าเฉลี่ยของการกระจายตัวแบบ Log-normal ดังนั้นจึงต้องหักส่วนดังกล่าวออกไปก่อน ดังสมการที่ 40

$$P(t) = \exp\{x(t) - 0.5\mathrm{Var}[x(t)]\} \tag{40}$$

โดยแทนค่าความแปรปรวนจากสมการที่ 37 แทนค่า x(t) และ Var[x(t)] จะได้ ดังสมการที่ 41

$$P(t) = \exp\left\{ \left[\ln\left[P(t-1)\right] e^{-\eta\Delta t}\right] + \left[\ln(\bar{P})\left(1-e^{-\eta\Delta t}\right)\right] - \left[(1-e^{-\eta t})\frac{\sigma^2}{4\eta}\right] + \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-\eta\Delta t}}{2\eta}}\,N(0,1) \right\} \tag{41}$$

สองพจน์ชุดแรกเป็นส่วนของ Drift Term ที่เป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักระหว่าง ค่าเริ่มต้นและค่าสมดุล พจน์ที่ 3 เป็นการปรับค่าโดยหักครึ่งหนึ่งของความแปรปรวนออกไป ส่วนพจน์สุดท้ายเป็นกระบวนการสุ่มด้วยตัวแปรที่มีการกระจายตัวแบบปกติ

จากนั้นจะทำการแปลงสมการให้อยู่ในรูป Risk-neutral Measure

โดยแทนค่า Drift Coefficient, α ด้วย $r - \delta$ ซึ่ง δ คือเงินปันผล จะได้ $\alpha = \eta(\bar{x} - x)$

$$\delta = \mu - \alpha \tag{42}$$

จะได้ดังสมการที่ 43

$$r - \delta = r - \mu + \eta(\bar{x} - x) = \eta(\bar{x} - x) - (\mu - r) = \eta\left\{\left[\bar{x} - \frac{(\mu - r)}{\eta}\right] - x\right\} \tag{43}$$

ค่า μ เป็นผลตอบแทนรวมของหลักทรัพย์ ดังนั้น μ-r คือ ค่าชดเชยความเสี่ยง (Risk Premium) ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับสมการเดิม เปรียบเหมือนการหักลบค่าสมดุลด้วย Normalized Risk Premium $(\mu - r)/\eta$

จะได้สมการ SDE ใหม่ดังสมการที่ 44

$$dx = \eta\left(\left[\bar{x} - \frac{(\mu - r)}{\eta}\right] - x\right)dt + \sigma dz \tag{44}$$

ใช้หลักการเดิมปรับสมการจำลองใหม่ จะได้ดังสมการที่ 45

$$x_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \left[\bar{x} - \frac{(\mu - r)}{\eta}\right]\left(1-e^{-\eta\Delta t}\right) + \sigma\sqrt{\left(\frac{1-e^{-\eta\Delta t}}{2\eta}\right)} \times N(0,1) \quad (45)$$

และสมการราคาดังสมการที่ 46

$$P(t) = \exp\left\{\left[\ln\left[P(t-1)\right] e^{-\eta\Delta t}\right] + \left[[\ln(\bar{P}) - \frac{(\mu - r)}{\eta}]\ \left(1-e^{-\eta\Delta t}\right)\right] - \left[(1-e^{-\eta t})\frac{\sigma^2}{4\eta}\right] + \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-\eta\Delta t}}{2\eta}}\, N(0,1)\right\} \quad (46)$$

หลังจากที่ได้สมการราคาแล้ว ก็จะสามารถคำนวณ Payoff ได้ โดยที่คิดลดมูลค่าตามเวลา ดังสมการที่ 47

$$\Lambda_{r,T}(F) = e^{-rT}\Lambda(e^{rT}F) \quad (47)$$

แทนค่า Payoff ดังสมการที่ 48

$$C(S_T) = \max(S_T - K, 0) \quad (48)$$

$$P(S_T) = \max(0, K - S_T) \quad (49)$$

งานวิจัยชุดนี้นำวิธีการ Monte Carlo แบบถ่วงน้ำหนักมาใช้ในการหามูลค่าออปชัน ในที่นี้จะสร้างราคาออปชันแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete Time) โดย 4 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1. สร้างเส้นทาง $X=(x_1, x_2, x_3 ... x_N)$ ณ จุดเวลาต่างๆใน set $\tau(T_N)$

2. นำค่า x_T ณ วันสิ้นสุดอายุสัญญา มาคำนวณเป็นราคาหลักทรัพย์ เพื่อใช้คำนวณ Payoff สำหรับออปชัน ตามสมการที่ 48 สำหรับ คอลออปชัน และตามสมการที่ 49 สำหรับ พุทออปชัน แต่ละเส้นทางที่สุ่มขึ้นมาได้

3. คำนวณ Weight Function โดยนำ x_T มาลบกับ x_0 เริ่มต้น จากนั้นเปรียบเทียบค่าจากตารางในภาคผนวก แล้วทำการ Interpolation ดังสมการที่ 28 เพื่อให้ได้ค่า Generating Function ดังสมการที่ 30 ที่เหมาะสม เพื่อใช้คำนวณ Weight Function ดังสมการที่ 32 ต่อไป

4. คำนวณ Random Estimator (x_0, X) สำหรับราคาออปชัน $V(F_{0,N}, T_N)$ จากผลคูณระหว่าง Weight Function, $W(x_0, X^k, (T_N))$ กับ Payoff สำหรับเส้นทาง k ใดๆ, $\Lambda_{r,T_N}(F(X^{(k)})$

จะได้สูตรในการหาค่าออปชันโดย Path Integral ดังสมการที่ 50

$$V(F_0,,T) \approx \frac{1}{M}\sum_{1}^{M} W(x_0,X^k,\tau(T_N))_{r,T_N}(F(X^{(k)})) \qquad (50)$$

ในการวิจัยนี้จะกล่าวถึงแบบจำลอง Ornstein-Uhlenbeck Process เพียงแบบเดียวซึ่งยังมีแบบจำลองอื่นๆ ที่สามารถนำมาใช้กับ Path Integral ได้ เช่น Geometric Brownian Motion, Cox-Ingersoll-Ross Model, Squared Bessel Model เป็นต้น ซึ่งขึ้นอยู่กับว่าสินทรัพย์อ้างอิงมีลักษณะพฤติกรรมเป็นแบบใด

2.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Linetsky (1997 : Online) ศึกษาเรื่อง การคำนวณแบบ Path Integral เพื่อใช้เป็นแบบจำลองทางการเงิน และการประเมินมูลค่าออปชัน โดยการแสดงวิธีการคำนวณโดย Path Integral เพื่อใช้ในการประเมินมูลค่าออปชัน และพยายามสร้างรูปแบบปิด โดยใช้การประมาณค่าทางคณิตศาสตร์ พบว่าเป็นกรอบการคำนวณที่น่าสนใจ และมีหลากหลายมิติ

Bandyopadhyay (2000 : Online) ศึกษาเรื่อง เฟย์นแมน Path Integral ที่ถูกนำมาใช้กับการคำนวณมูลค่าออปชัน และได้แสดงการนำ Van-Vleck Formula มาใช้ประมาณเพื่อดัดแปลงสูตร Path Integral ไปเป็น สมการของ Black-Scholes

Marco (2004 : Online) ศึกษาเรื่อง การจำลองเหตุการณ์แบบ Monte Carlo สำหรับกระบวนการแบบสุ่ม (Stochastic Processes) ภายใต้ Risk-neutral Measure แสดงการคำนวณการจำลองเหตุการณ์โดยวิธีการ Monte Carlo สำหรับราคาน้ำมันโดยใช้แบบจำลอง Arithmetic Ornstein-Uhlenbeck Process หรือ Mean Reversion และแบบจำลองอื่นๆ เปรียบเทียบกัน

Campolieti และ Makarov (2006 : Online) ศึกษาเรื่อง การประเมินมูลค่าเอเชียนออปชันโดย Path Integral โดยใช้แบบจำลองความแปรปรวนที่ขึ้นกับสถานะ (State Dependent Volatility Models) ได้แสดงวิธีการใช้ Monte Carlo ในการหามูลค่าของออปชันแบบเอเชียน (Asian Options) โดยใช้แบบจำลองความแปรปรวน 3 แบบได้แก่ Ornstein-Uhlenbeck Process, Cox-Ingersoll-Ross Model และ Squared Bessel Model และยังแสดงการใช้ Multinomial Lattice Method เปรียบเทียบกับ Monte Carlo พบว่า Monte Carlo ให้ผลที่แม่นยำกว่า

Hsu (2008 : Online) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างควอนตัม เมคานิกส์ และตลาดทางการเงิน เพื่ออธิบายความสัมพันธ์ระหว่างควอนตัมเมคานิกส์จากสมการชโรดิงเจอร์ และทางการเงินจากสมการแบล์คโชลส์ และความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ที่มีพฤติกรรมคล้ายๆกัน จึงทำให้เกิดการเงินสาขาควอนตัมขึ้น