ชื่อเรื่อง การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างยูนิฟอร์มลีอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

และ $\lim_{n\to\infty} \sup \int f_n d\mu \leq \int \lim_{n\to\infty} \sup f_n d\mu$

ชื่อผู้เขียน นางสาววลินีย์ ชัยชนะมงคล

การค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์ วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาการสอนคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 2527

บทคัดย่อ

จุดประสงค์ของการค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์ เพื่อศึกษาทฤษฎีซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ของลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน $\{f_n\}$ และอสมการ

$\lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E \lim_{n\to\infty} \sup f_n \, d\mu$ สำหรับ $E \in M$

บนพรอบบะบิลิตีสเปซ (X, M, μ) ภายใต้เงื่อนไขบางอย่างเกี่ยวกับฟังก์ชัน

$\lim_{n\to\infty} \sup f_n$ และเมื่อเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขบางประการของทฤษฎีแล้ว

ผลสรุปของทฤษฎียังคงเป็นจริง บนพรอบบะบิลิตีสเปซ พร้อมทั้งขยายทฤษฎีดังกล่าวไปยังเมเชอร์สเปซ (X, M, μ) ได้.

ผลที่ได้จากการวิจัย

1. ให้ (X, M, μ') เป็นเมเชอร์สเปซที่ $\mu'(X) < \infty$ และ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน บน (X, M, μ').

ถ้า $f = \lim_{n\to\infty} \sup f_n$ และ $\int_X f \, d\mu' < \infty$

จะได้ว่า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu' \leq \int_E f d\mu'$ สำหรับ $E \in M$.

2. ให้ (X, M, μ) เป็นพรอบบะบิลิตีสเปซ

และ $\{f_k\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

บน (X, M, μ). ถ้า $f = \lim_{k \to \infty} \sup f_k$

และ $\{\int_{E_n} f_k\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ 0 แบบยูนิฟอร์มบน k

โดยที่ $E_n = \{x / f(x) \geq n\}$

แล้วจะได้ว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

ก็ต่อเมื่อ $\lim_{k \to \infty} \sup \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$ สำหรับ $E \in M$.

3. ให้ (X, M, μ) เป็นเมเชอร์สเปซใดๆ

และ $\{f_k\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

บน (X, M, μ).

ถ้า สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$

และ $\mu(E) < \delta$ แล้ว

$\int_E f \, d\mu < \varepsilon$, เมื่อ $f = \lim_{k \to \infty} \sup f_k$

และ สำหรับ $E \in M$ มี $\{E_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอเรเบิล

ที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$, เมื่อ $i \neq j$,

$\mu(E_n) < \infty$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ซึ่งสำหรับ $\varepsilon > 0$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$\sum_{n=m}^{\infty} \sup\{\int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \ldots\} < \varepsilon$, $\forall m \geq N_\varepsilon$

แล้วจะได้ว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ)

ก็คือเมื่อ $\lim\limits_{k \to \infty} \sup \int\limits_E f_k \, d\mu \leq \int\limits_E f d\mu$ สำหรับ $E \in M$.

4. ให้ (X, M, μ) เป็นเมเชอร์สเปซใดๆ

และ $\{f_k\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

บน (X, M, μ).

ถ้า $\int\limits_X f d\mu < \infty$ โดยที่ $f = \lim\limits_{k \to \infty} \sup f_k$

และ สำหรับ $E \in M$ มี $\{E_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอเรเบิล

เซต ที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$,

$\mu(E_n) < \infty$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$

ซึ่งสำหรับ $\varepsilon > 0$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$\sum\limits_{n=m}^{\infty} \sup \{\int\limits_{E_n} f_1 d\mu, \int\limits_{E_n} f_2 d\mu, \ldots\} < \varepsilon$, $\forall m \geq N_\varepsilon$

แล้วจะได้ว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล บน (X, M, μ)

ก็คือเมื่อ $\lim\limits_{k \to \infty} \sup \int\limits_E f_k \, d\mu \leq \int\limits_E f d\mu$ สำหรับ $\forall E \in M$.

Research Title Study on the Connection Between Uniformly Integrable Functions and $\lim_{n \to \infty} \sup \int f_n d\mu \leq \int \lim_{n \to \infty} \sup f_n d\mu$

Name Ms. Walinee Chaichanamongkol

Research For Master of Science in Teaching Mathematics
Chiang Mai University 1984

Abstract

The purpose of this research is to study the relationship between the concept of uniform integrability of the sequence of nonnegative integrable functions $\{f_n\}$ and the inequality $\lim_{n \to \infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E \lim_{n \to \infty} \sup f_n d\mu$ for each measurable set of a probability space (X, M, μ) under a certain condition on the function $\lim_{n \to \infty} \sup f_n$. The same result holds true for some other conditions. The results are also extended to an arbitrary measure space (X, M, μ).

The conclusions are

1. Let (X, M, μ') be a measure space and $\mu'(X) < \infty$. Let $\{f_n\}$ be the sequence of nonnegative integrable functions on (X, M, μ').

   If $f = \lim_{n \to \infty} \sup f_n$ and $\int_X f d\mu' < \infty$

then $\{f_n\}$ is uniformly integrable if and only if

$$\lim_{n \to \infty} \sup \int_E f_n \, d\mu' \leq \int_E f \, d\mu' \quad \text{for } E \in M.$$

2. Let (X, M, μ) be a probability space and $\{f_n\}$ be the sequence of nonegative integrable functions on (X, M, μ). If $f = \lim_{k \to \infty} \sup f_k$ and $\{\int_{E_n} f_k\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly to 0 on k where $E_n = \{x \,/\, f(x) \geq n\}$

   then $\{f_n\}$ is uniformly integrable if and only if

$$\lim_{k \to \infty} \sup \int_E f_k d\mu \leq \int_E f_- d\mu \quad \text{for } E \in M.$$

3. Let (X, M, μ) be any measure space and $\{f_k\}$ be the sequence of nonnegative integrable fumctions on (X, M, μ).

   If, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ such that if $E \in M$ and $\mu(E) < \delta$

   then $\int_E f d\mu < \varepsilon$, $(f = \lim_{k \to \infty} \sup f_k)$

   and for $E \in M \;\; \exists \{E_n\}$ which is the sequence of measurable sets with $E_i \cap E_j = \emptyset$ when $i \neq j$, $\mu(E_n) < \delta$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

   which for $\varepsilon > 0$, $\exists$ a positive integer N_ε

   which makes $\sum_{n=m}^{\infty} \sup\{\int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \ldots\} < \varepsilon$, $\forall m \geq N_\varepsilon$

   then $\{f_k\}$ be uniformly integrable on (X, M, μ) if and only if

$$\lim_{k \to \infty} \sup \int_E f_k d\mu \leq \int_E f \, d\mu \quad \text{for } E \in M .$$

4. Let (X, M, μ) be any measure space and $\{f_k\}$ be the sequence of nonnegative integrable functions on (X, M, μ) .

If $\int_X f \, d\mu < \infty$ (where $f = \lim_{k \to \infty} \sup f_k$)

and for $E \in M$ $\exists \{E_n\}$ which is the sequence of measurable sets with $E_i \cap E_j = \emptyset$ when $i \neq j$,

$\mu(E_n) < \infty$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ which for $\varepsilon > 0$, $\exists$a positive integer N_ε which makes

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup\{\int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \ldots\} < \varepsilon , \quad \forall m \geq N_\varepsilon$$

then $\{f_k\}$ be uniformly integrable on (X, M, μ) if and only if

$$\lim_{k \to \infty} \sup \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu \quad \text{for } E \in M .$$