ชื่อเรื่องการค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์ รากที่สองของเมตริกซ์

ชื่อผู้เขียน นายสมมาต บรรจงรัตน์

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาการสอนคณิตศาสตร์

คณะกรรมการตรวจสอบการค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์

ผศ.พูนศักดิ์ สุวรรณพรัตน์	ประธานกรรมการ
ผศ.ดร.สุทธิรักษ์ เจียรพินิจนันท์	กรรมการ
อ.รุ่งนภา ภักดีสู่สุข	กรรมการ

บทคัดย่อ

จุดมุ่งหมายของการค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์นี้ เพื่อศึกษาถึงเงื่อนไขของการมีรากที่สอง และการหารากที่สองของเมตริกซ์ใด ๆ ที่มีขนาด nxn และมีสมาชิกอยู่ในฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน

จากการศึกษาพบว่า ถ้า A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ที่มีขนาด nxn และมีสมาชิกอยู่ในฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน แล้ว A จะมีรากที่สองก็ต่อเมื่อ A คล้ายกับจอร์แดนแคนอนนิคอลเมตริกซ์ J ต่อไปนี้เท่านั้น

1. $A \approx Dg\,[J_{n_1}(\lambda_1^2), J_{n_2}(\lambda_2^2), \ldots, J_{n_k}(\lambda_k^2)]$; $\exists k \in N$

โดยที่ $J_{n_i}(\lambda_i^2) \ni \lambda_i \neq 0$; $\forall i = 1,2,\ldots,k$

เป็นซิมเปิลจอร์แดนบล็อกของ

$Dg\,[J_{n_1}(\lambda_1^2), J_{n_2}(\lambda_2^2), \ldots, J_{n_k}(\lambda_k^2)]$

และ λ_i ; $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ เป็นค่าไอเกนของ A

หรือ 2. $A \approx Dg\left[B_{n_1}(0), B_{n_2}(0), \ldots, B_{n_k}(0)\right]$; $\exists k \leq n \in N$

โดยที่ $B_{n_i}(0)$; $i = 1, 2, \ldots, k$

$$= \begin{cases} Dg\left[J_{\frac{n_i}{2}}(0), J_{\frac{n_i}{2}}(0)\right] ; n_i \in E^+ \\ Dg\left[J_{\frac{n_i+1}{2}}(0), J_{\frac{n_i-1}{2}}(0)\right] ; n_i \in O^+ \end{cases}$$

$J_{\frac{n_i}{2}}(0), J_{\frac{n_i+1}{2}}(0), J_{\frac{n_i-1}{2}}(0)$ เป็นซิมเปิลจอร์แดนบล็อก

ของ $B_{n_i}(0)$ และค่าไอเกนของ A เป็นศูนย์ทั้งหมด

หรือ 3. $A \approx Dg\left[J_{n_1}(\lambda_1^2), \ldots, J_{n_j}(\lambda_j^2), B_{n_{j+1}}(0), \ldots, B_{n_k}(0)\right]$;

$\exists j,k \in N$ โดยที่ $\lambda_l \neq 0$; $\forall l = 1,2,\ldots,j$

$$B_{n_i}(0);\ i=j+1,\ldots,k = \begin{cases} Dg\left[J_{\frac{n_i}{2}}(0), J_{\frac{n_i}{2}}(0)\right] ; n_i \in E^+ \\ Dg\left[J_{\frac{n_i+1}{2}}(0), J_{\frac{n_i-1}{2}}(0)\right] ; n_i \in O^+ \end{cases}$$

และ $J_{n_l}(\lambda_l^2), J_{\frac{n_i}{2}}(0), J_{\frac{n_i+1}{2}}(0), J_{\frac{n_i-1}{2}}(0)$

เป็นซิมเปิลจอร์แดนบล็อกของ

$Dg\left[J_{n_1}(\lambda_1^2), \ldots, J_{n_j}(\lambda_j^2), B_{n_{j+1}}(0), \ldots, B_{n_k}(0)\right]$

และ $\lambda_l \neq 0$; $\forall l=1,2,\ldots,j$, $\lambda_i=0$; $\forall i=j+1,\ldots,k$

เป็นค่าไอเกนของ A

และถ้า A มีรากที่สองแล้ว รากที่สองของ A คือ $PJ^{\frac{1}{2}}P^{-1}$ โดยที่ P เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ที่ทำให้ A คล้ายกับ J และ $J^{\frac{1}{2}}$ เป็นรากที่สองของจอร์แดนแคนอนนิคอลเมตริกซ์ J ที่คล้ายกับ A

Research Title The Square Root of Matrices

Author Mr.Sommart Banjongrat

M.S. Teaching Mathematics

Examining Committee Assist.Prof.Poonsak Suwannoparat Chairman

Assist.Prof.Dr.Suttiruk Jiarpinitnun Member

Lecturer Roongnapa Puckdeesusook Member

Abstract

The purpose of this research is to find necessary and sufficient conditions for a given complex valued nxn matrix to have a square root and to find such a square root if it exists.

The study shows that if A is such a matrix then A will have square roots if and only if A is similar to a matrix whose Jordan Canonical form is of the following kind

1. $A \approx Dg\,[\,J_{n_1}(\lambda_1^2), J_{n_2}(\lambda_2^2), \ldots, J_{n_k}(\lambda_k^2)\,]$;

$\exists\, k \in N$ when $J_{n_i}(\lambda_i^2) \ni \lambda_i \neq 0$;

$\forall\, i = 1, 2, \ldots, k$ is a simple Jordan block of $Dg\,[\,J_{n_1}(\lambda_1^2), J_{n_2}(\lambda_2^2), \ldots, J_{n_k}(\lambda_k^2)\,]$ and

λ_i ; $\forall\, i = 1, 2, \ldots, k$ are eigen values of A

or 2. $A \approx Dg\left[B_{n_1}(0), B_{n_2}(0), \ldots, B_{n_k}(0)\right]$,

$\exists\ k \leq n \in N$

when $B_{n_i}(0)$; $i = 1, 2, \ldots, k$

$$= \begin{cases} Dg\left[J_{\frac{n_i}{2}}(0), J_{\frac{n_i}{2}}(0)\right]; & n_i \in E^+ \\ Dg\left[J_{\frac{n_i+1}{2}}(0), J_{\frac{n_i-1}{2}}(0)\right]; & n_i \in O^+ \end{cases}$$

$J_{\frac{n_i}{2}}(0)$, $J_{\frac{n_i+1}{2}}(0)$, $J_{\frac{n_i-1}{2}}(0)$ are simple Jordan blocks of $B_{n_i}(0)$ and all eigen values of A are zero

or 3. $A \approx Dg\left[J_{n_1}(\lambda_1^2), \ldots, J_{n_j}(\lambda_j^2), B_{n_{j+1}}(0), \ldots, B_{n_k}(0)\right]$; $\exists\ j, k \in N$ when $\lambda_l \neq 0$;

$\forall\ l = 1, 2, \ldots, j$

$$B_{n_i}(0); i=j+1,\ldots,k = \begin{cases} Dg\left[J_{\frac{n_i}{2}}(0), J_{\frac{n_i}{2}}(0)\right]; & n_i \in E^+ \\ Dg\left[J_{\frac{n_i+1}{2}}(0), J_{\frac{n_i-1}{2}}(0)\right]; & n_i \in O^+ \end{cases}$$

and $J_{n_1}(\lambda_1^2)$, $J_{\frac{n_i}{2}}(0)$, $J_{\frac{n_i+1}{2}}(0)$, $J_{\frac{n_i-1}{2}}(0)$

are simple Jordan blocks of

$Dg\,[J_{n_1}(\lambda_1^2), \ldots, J_{n_j}(\lambda_j^2), B_{n_{j+1}}(0), \ldots, B_{n_k}(0)]$

and $\lambda_l \neq 0$; $\forall\, l = 1, 2, \ldots, j$, $\lambda_i = 0$;

$\forall\, i = j+1, \ldots, k$ are eigen values of A

and if A has square roots then $PJ^{\frac{1}{2}}P^{-1}$ is a square root of A where P is a nonsigular matrix for which $A = PJP^{-1}$ and $J^{\frac{1}{2}}$ is a square root of the Jordan Canonical matrix J which is similar to A.

สัญลักษณ์และความหมายที่ใช้ในงานค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีดังนี้

สัญลักษณ์	ความหมาย
$>$	มากกว่า
$\geq$	มากกว่าหรือเท่ากับ
$<$	น้อยกว่า
$\leq$	น้อยกว่าหรือเท่ากับ
$\in$	เป็นสมาชิกของ
$\notin$	ไม่เป็นสมาชิกของ
$\subseteq$	เป็นสับเซต
$\subset$	เป็นสับเซตแท้
$\cup$	ยูเนียน
$\cap$	อินเตอร์เซคชัน
$\ni$	ซึ่ง, สำหรับ
Σ	ผลบวก
π	ผลคูณ
$\Longrightarrow$	ถ้า....แล้ว
$\Longleftrightarrow$	ก็ต่อเมื่อ
$f : A \longrightarrow B$	f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B
$f \circ g$	f คอมโพสิท g
$\forall x$	สำหรับทุก ๆ ค่า x
$\exists x$	มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว
$\emptyset$	เซตว่าง
N	เซตของจำนวนธรรมชาติ (จำนวนนับ)

ฎ

สัญลักษณ์	ความหมาย
E^+	เซตของจำนวนเต็มบวกคู่
O^+	เซตของจำนวนเต็มบวกคี่
R	เซตของจำนวนจริง
R^n	$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$
C	เซตของจำนวนเชิงซ้อน
$\bar{0}$	เวคเตอร์ศูนย์
$\underline{0}$	เมตริกซ์ศูนย์
I	เมตริกซ์เอกลักษณ์
J	จอร์แดนแคนอนนิคอลเมตริกซ์
$[a_{ij}]_{m\times n}$	เมตริกซ์ขนาด mxn ที่มี a_{ij} เป็นสมาชิก
$dg \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$	เมตริกซ์หแยงที่มี $a_1, \ldots, a_n$ เป็นสมาชิกในแนวหแยงมุมหลัก
$A \approx B$	เมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ B
$tr(A)$	เทรซของเมตริกซ์ A
$\det A$ หรือ $\|A\|$	ดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ A
A^{-1}	อินเวอร์สของเมตริกซ์ A
$\dim(V)$	มิติของเวกเตอร์สเปซ V
$M+N$	ผลบวกของสับสเปซ M และ N
$M \oplus N$	ผลบวกตรงของสับสเปซ M และ N
$Span(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$	สับสเปซที่ถูกสแปนโดย $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$
$NS(T)$	นัลสเปซของ T
$\mathcal{L}(V,W)$	เซตของฟังก์ชันที่เป็นการแปลงเชิงเส้นจากเวคเตอร์สเปซ V ไปยังเวกเตอร์สเปซ W ทั้งหมด
$T\|_W$	เรสตริคชันของ T บน W

<u>สัญลักษณ์</u>	<u>ความหมาย</u>
$\mathrm{Im}T$	อิมเมจของ T
$Mtx_{B_1,B_2}(T)$	เมทริกซ์ที่แทนการแปลงเชิงเส้น T ที่สัมพัทธ์กับฐาน B_1, B_2
$Mtx_{B_1}(T)$ หรือ $[T]_{B_1}$	เมทริกซ์ที่แทนการแปลงเชิงเส้น T ที่สัมพัทธ์กับฐาน B_1
$[v]_S$	เมทริกซ์พิกัดของ v ที่สัมพัทธ์กับฐาน S
$c(x)$	แคแรกเทอร์ริสติกโพลิโนเมียล
$m_A(x)$	โพลิโนเมียลต่ำสุดของ A