บทที่ 2

แนวคิด ทฤษฎี และผลงานการศึกษาที่เกี่ยวข้อง

2.1 แนวคิดและทฤษฎี

2.1.1 แบบจำลองคอปปูล่า

ฟังก์ชั่นคอปปูล่า คือการวิเคราะห์ข้อมูลเป็นช่วงเวลาในตัวแปรสุ่มแบบมีเงื่อนไข โดยกำหนดให้เงื่อนไขของตัวแปรคือ F_{t-1} นั่นคือคอปปูล่าแบบมีเงื่อนไข (Joe 1997; Nelsen 2006; Embrechts 2009) กำหนดให้ $(x\text{-}y)\ |F_{t-1}$, $x|\ F_{t-1} \sim F_t$ และ $y|\ F_{t-1} \sim G_t$ คือฟังก์ชันการแจกแจงร่วมแบบมีเงื่อนไขของ $U_t = F_t(x|\ F_{t-1})$ และ $V_t = G_t(y|\ F_{t-1})$ จาก F_{t-1} คือคอปปูล่าแบบมีเงื่อนไขสองโดเมน

การแจกแจงร่วมแบบมีเงื่อนไขของความน่าจะเป็นในการแปลงปริพัธ์ของแต่ละตัวของตัวแปรสุ่ม X_t, Y_t การแจกแจงแบบมาร์จินัล F_t, G_t เพื่อที่จะเข้าใจว่า ทำไมมาร์จินัลของตัวแปรเดียวและตัวแปรหลายตัวในโครสร้างตัวแปรสามารถแยกออกจากกัน โดยพิจารณาจากทฤษฎีของ Sklar's Theorem ได้อธิบายการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข F_t เป็นการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ $x|\ F_{t-1}$, G_t คือการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ $y|\ F_{t-1}$ และ H_t คือการแจกแจงตัวร่วมสองตัวแปรแบบมีเงื่อนไขของ $(x,y|\ F_{t-1})$ สมมติว่า F_t , G_t เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องใน x,y รวมกันเป็นคอปปูล่าแบบมีเงื่อนไข C_t ดังนี้

$$H_t(x,y|F_{t-1}) = C_t(F_y(x|F_{t-1}), G_t(y|F_{t-1})|F_{t-1})$$

ในทางกลับกัน ถ้า Ft , Gt เป็นการกระจายตัวแบบมีเงื่อนไขของสองตัวแปรสุ่ม x,y และ C_t เป็นคอปปูล่าแบบมีเงื่อนไข H_t เป็นฟังก์ชันการกระจายสองตัวแปรแบบมีเงื่อนไขกับการกระจายตัวมาร์ตินัลแบบมีเงื่อนไข F_t , G_t (Sklar 1959; Patton 2006) ซึ่งจะเป็นการประยุกต์ใช้คอปปูล่าสำหรับการแจกแจงตัวแบบมีเงื่อนไขชี้ให้เห็นว่าเงื่อนไขตัวแปร F_{t-1} ต้องเหมือนกันสำหรับทั้งสองการแจกแจงที่เป็นแบบมาร์จินัลและคอปปูล่าซึ่ง H_t จะเป็นการแจกแจงร่วมของ $(x,y|F_{t-1}) = (x,y|x,y|W_1,W_2)$ เมื่อ $F_t(x|w_1) = F_t(x|W_1,W_2), G_t(y|w_2) = G_t(y|w_1,w_2)$ เมื่อตัวแปรบางตัวส่งผลการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรหนึ่งแต่ไม่ส่งผลกับตัวอื่น การประยุกต์ทฤษฎีของสการ์และการใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงและฟังก์ชั่นความหนาแน่นสามารถแสดงความหนาแน่นของคอปปูล่าสองตัวแปร

$$G_t(F_t\, x|F_{t-1}), G_t(y|F_{t-1})|F_{t-1}), G_t(F_t(x|F_{t-1}), G_t(y|F_{t-1})|F_{t-1}$$

$$H_t(x,y|F_{t-1}) = \frac{\partial^2\left[C_t(F_t(x|F_{t-1}), G_t(y|F_{t-1})|F_{t-1})\right]}{\partial F_t(x|F_{t-1}), G_t(y|F_{t-1})} \cdot \frac{\partial F_t(x|F_{t-1})}{\partial x} \cdot \frac{\partial G_t(y|F_{t-1})}{\partial y}$$

$$= c_t(F_t(x|F_{t-1}), g_t(y|F_{t-1})|F_{t-1}), f_t(x|F_{t-1}), g_t(y|F_{t-1})$$

$$c_t(u,v|F_{t-1}) = h_t(x,y|F_{t-1}) / f_t(x|F_{t-1}).g_t(y|F_{t-1})$$

เมื่อ $u \equiv F_t(x|F_{t-1}), v \equiv G_t(y|F_{t-1})$ สามารถใช้แสดงคอปปูล่าแบบปกติและคอปปูล่าแบบอื่นๆ คอปปูล่าแบบปกติคือคอปปูล่าของฟังก์ชันการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรซึ่งฟังก์ชั่นความหนาแน่นความน่าจะเป็นในกรณีสองตัวแปรเป็นดังนี้

$$c((u_t, v_t \left| p_t)) = \frac{1}{\sqrt{(1-p_\tau^2)}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\left[(\phi^{-1}(u_t)) + (\phi^{-1}(v_t)) - 2p_t - \phi^{-1}(u_t) - \phi^{-1}(v_t)\right]}{1-p_\tau^2}\right)\right.$$

$$\cdot \exp\left(\frac{1}{2}\left[(\phi^{-1}(u_t))^2 + (\phi^{-1}(v^t))^2\right]\right)$$

โดย u_t คือการเปลี่ยนแปลงของการแจกแจงแบบปกติตัวแปรเดียวมาตรฐานและ v_t คือความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงแบบมีเงื่อนไขจากเงื่อนไขเซต คอปปูล่าแบบทีคือการแจกแจงแบบสองตัวแปรที่จะประกอบด้วยค่าพารามิเตอร์สองตัว

$$c(u,v;p_t(V_t|F_{t-1})2) = \frac{r(\frac{v_t+2}{2})r(\frac{v_t}{2})}{r(\frac{v_t+1}{2})^2\sqrt{1-p_t^2}}\left(1+\left[\frac{(t_{v_1}^{-2}(u_t))^2 + (t_{v_1}^{-1}(v_t))^2 - 2p_t \cdot t_{v_1}^{-1}(u_t)\cdot t_{v_1}^{-1}(v_t)}{(1-p_t^2)\cdot v_t}\right]^{\frac{-v_t-2}{2}}\right)$$

$$\cdot\left[\left(1+\frac{(t_{v_t}^{-2}(u_t))^2}{v_t}\right)\left(1+\frac{(t_{v_t}^{-2}(v_t))}{v_t}\right)^{\frac{-v_t-2}{2}}\right]$$

โดย $t_{v_t}^{-1}$ คือ การเปลี่ยนแปลงฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบที V_t คือค่าองศาอิสระคอปปูล่าแบบเคย์ทัน

$$c_t(u_t, v_t; \theta_t) = (\theta_t + 1)\left(u_t^{-\theta_t} + v_t^{-\theta_t} - 1\right)^{\frac{2\theta_t+1}{\theta_t}} u_t^{-\theta-1} + v_t^{-\theta_t-1}$$

โดย $C_t \in [0,\infty)$ คือดีกรีของตัวแปรตามระหว่าง U_t และ V_t ซึ่งตัวแปรตามต่ำกว่าส่วนปลาย (lower-tail) มาตรวัดดังนี้

$$\tau_t^L = 2^{\frac{1}{\theta_t}}$$

คอปปูล่าแบบสสมาตรของโจและเคย์ทันเสนอโดย (Patton 2006)

$$C_{jc}(u,v|\tau_U,\tau_L) = \left(\left\{\left[1-(1-u)^k\right]^{-Y} + \left[1-(1-v)^k\right]^{-Y}\right\}^{-1/y}\right)^{1/k}$$

$$x = \frac{1}{\log_x}(2-\tau_U)$$

$$\gamma = -1/\log_2(\tau_L)$$

$$T_u \in (0,1), \tau_L \in (0,1)$$

คอปปูล่านี้มีค่าพารามิเตอร์สองตัว τ_U, τ_L ซึ่งคือค่าสัมประสิทธิ์ของส่วนบนและล่างตามหาง (Patton 2003) คอปปูล่าของโจและเคย์ทันยังมีความไม่สมมาตรเล็กน้อยเมื่อ $\tau_U = \tau_L$ ซึ่งไม่สะดวก จากปัญหาดังกล่าวจึงมีการแปรสภาพจากคอปปูล่าโจและเคย์ทันเป็นคอปปูล่าแบบสมมาตร (SJC)ดังนี้

$$C_{SJC}(u,v|\tau_U,\tau_L) = 0.5\left[C_{JC}(u,v|\tau_U,\tau_L) + 0.5C_{JC}(1-u,1-v|\tau_U,\tau_L) + u + v - 1\right)$$

คอปปูล่าแบบ (SJC) สมมาตรเมื่อ $\tau_U = \tau_L$

2.1.2 การวัดความสัมพันธ์และคอปปูล่า

การวัดความสัมพันธ์สำหรับการจัดการความเสี่ยงทางการเงิน (Embrechts, Lindskog, and McNeil (2003)) สำหรับสองตัวแปรสุ่ม X และ Y การวัดทางเดียวของความสัมพันธ์ δ(X,Y) โดยทั่วไปตัวแปรสุ่มมีคุณสมบัติสอดคล้องกันสี่ข้อ

1. δ (X,Y) = δ (Y,X).
2. -1 $\leq \delta$ (X,Y) $\leq$ 1.
3. δ (X,Y) = 1 ถ้า X และ Y คือ co-monotonic; δ (X,Y) = -1 ถ้า X และ Y คือ counter-monotonic.

4. ถ้า T คือ exactly monotonic, เมื่อ

$\delta(T(X),Y) = \{ \delta(X,Y), T =$ เพิ่มขึ้น or $- \delta(X,Y), T =$ ลดลง

คุณสมบัติข้างต้นบ่งชี้ได้ว่าโดยปกติ ค่าสหสัมพันธ์เชิงเส้นของ Pearson สอดคล้องเฉพาะคุณสมบัติสองข้อแรก แต่คุณสมบัติที่แสดงว่าการวัดลำดับสหสัมพันธ์ของ Kendall's tau สอดคล้องกับคุณสมบัติทั้งหมด

การวัดค่าสหสัมพันธ์เชิงเส้นของ Pearson

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{VAR(X)VAR(Y)}}$$

กำหนดให้ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่าง X และ Y ถ้า Y=a+bX, โดย $\rho \pm 1$ แสดงว่า ตัวแปร X และ Y มีความสัมพันธ์กัน และถ้า X และ Y เป็นอิสระ จะกำหนดได้โดย $\rho = 0$ ซึ่งการใช้นิยามดังกล่าวจะมีจุดอ่อนของสหสัมพันธ์เชิงเส้น (Embrechts, McNeil, and Straumann (2000)) กล่าวคือ ค่า ρ มีเงื่อนไขว่าจะต้องมีทั้งความแปรปรวน X,Y และถ้าค่า $\rho = 0$ ไม่ได้หมายความว่าตัวแปรจะเป็นอิสระซึ่กันและกันยกเว้นในการแจกแจงของตัวแปรร่วมของ X,Y ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรที่ $\rho = 0$ หมายถึงไม่มีความสัมพันธ์ ค่าสัมประสิทธิ์ ρ ไม่คงที่ภายใต้ nonlinear strictly increasing transformations การแจกแจงมาร์จินัลและสหสัมพันธ์ไม่แสดงการแจกแจงร่วม จะเป็นจริงเฉพาะสำหรับการแจกแจงปกติสองตัวแปร กำหนดให้การแจกแจงมาร์จินัล F_x และ $F_y, \rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$และอาจจะมีกรณีที่ $\rho_{\min} > -1, \rho_{\max} < 1$

2.1.3 Kendall's Tau and Speaman's Rho

สมมติตัวแปรสุ่ม X,Y แสดงถึงผลตอบแทนทางการเงินหรือค่าตอบแทนซึ่งในหลายกรณีที่ X,Y ไม่ว่าจะมีค่ามากหรือน้อยจะมีการเคลื่อนไหวไปด้วยกัน โดยที่ X มีมูลค่าสูงและในเวลาเดียวกัน Y มีมูลค่าน้อย แนวคิดของความพ้องกัน (Concordance) ที่ใช้วัดความสัมพันธ์ในลักษณะนี้จะต้องมีคุณสมบัติของความเป็นค่าคงที่ increasing transformations ของ X,Y การวัดความพ้องกันที่จะอธิบายในฟังก์ชันของคอปปูล่าระหว่าง Xและ Y นั้น เป็นสหสัมพันธ์เชิงเส้นไม่คงที่ที่ increasing transformations ของ X และ Y ซึ่งไม่ใช่การวัดแบบทั่วไป การวัดทั้งสองของความพ้องกันคือ Kendall's tau statistic

กำหนดให้ F คือฟังก์ชันการแจกแจงสองตัวแปรต่อเนื่อง และให้ (X_1,Y_1) และ (X_2,Y_2) เป็นสองส่วนที่ไม่สัมพันธ์ของตัวแปรสุ่มจากกการแจกแจงนี้ และกำหนดให้เป็นเวคเตอร์ที่สอดคล้องกัน (X_1,Y_1) และ (X_2,Y_2) ถ้า $X_1 > X_2$ และ $Y_1 > Y_2$ และ $X_1 < X_2$ เมื่อ $Y_1 < Y_2$ บอกได้ว่ามีความพ้องกันและไม่เป็นจริงในกรณีกลับกัน

นิยามการแจกแจงของฟังก์ชัน Kendall's tau statistic ได้ดังนี้

$$\tau = \Pr\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - \Pr\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}$$

ถ้า C คือคอปปูล่าที่ประกอบด้วย F สามารถแสดงได้ว่า

$$\tau = 4\iint_{12} CdC - 1 = 4\iint_{12} C(u,v)c(u,v)dudv - 1$$

โดยที่ c(u,v) คือความหนาแน่นของคอปปูล่า การประมาณของตัวแปรสำหรับตัวแปรสุ่มมีขนาด n คือ ตัวเลขของตัวสุ่มคู่มีความสัมพันธ์ลบด้วยคู่ที่ไม่มีความสัมพันธ์หารด้วยจำนวนของคู่ทั้งหมด $\left(\dfrac{n}{2}\right)$:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{(\frac{n}{2})} \sum_{1 \le i \le j \le n} sign((x_i - x_j)(y_i - y_j))$$

สำหรับคู่ของตัวแปรสุ่ม (X,Y) กับฟังก์ชั่นการแจกแจงร่วม F และการแจกแจงมาร์จินัล F_x, F_y ของ Spearman's rho statistic (ρ_S) นิยามเป็นว่า สหสัมพันธ์ระหว่าง $F_x(X)$, $F_y(Y)$ ซึ่งการวัดของลำดับสหสัมพันธ์ในส่วนของ integral transforms ของ X,Y สำหรับคอปปูล่าที่ประกอบด้วย X,Y สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\rho_s = 12\iint_{12} C(u,v)dudv - 3$$

สำหรับการขนาดทดลอง $n\rho_s$ อาจประมาณได้โดยใช้

$$\hat{\rho}_s = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} (rank(X_i) - \frac{n+1}{2})(rank(y_i) - \frac{n+1}{2})$$

ถึงกระนั้นทั้ง ρ_s, τ คือการวัดของความพ้องกัน ค่าเหล่านั้นสามารถแตกต่างกันได้เล็กน้อย Nelson (1999) ได้สรุปความสัมพันธ์ระหว่าง ρ_s, τ ที่เป็นอสมการไว้ดังนี้

$$\frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho_s \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2}; \tau > 0$$

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho_s \leq \frac{1 + 3\tau}{2}; \tau < 0$$

2.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขวัญชนก ธรรมวิวรณ์(2543) ทำการศึกษาเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างดัชนีราคาตลาดหลักทรัพย์ (SET Index) กับเครื่องชี้เศรษฐกิจมหภาค ศึกษาโดยใช้ข้อมูลรายเดือน ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม 2537 ถึงวันที่ 31 ธันวาคม 2542 เพื่อทำการศึกษาว่าตัวแปรเศรษฐกิจมหภาคใดมีความสัมพันธ์อย่างมีนัยสำคัญกับดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์ โดยวิเคราะห์ความสัมพันธ์ด้วยรูปแบบสมการถดถอยเชิงซ้อนกับเครื่องชี้วัดเศรษฐกิจมหภาค ซึ่งได้แก่ อัตราเงินเฟ้อ อัตราดอกเบี้ย ผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติ ดุลบัญชีเดินสะพัด ปริมาณเงิน มูลค่าการซื้อขายตลาดหลักทรัพย์ ปริมาณการซื้อขายหลักทรัพย์ ค่าเงินบาท และระบบแลกเปลี่ยน ผลการศึกษาพบว่า มูลค่าการซื้อขายหลักทรัพย์และปริมาณการซื้อขายหลักทรัพย์มีความสัมพันธ์กับดัชนีตลาดหลักทรัพย์อย่างมีนัยสำคัญ

สลิลทิพย์ ศิริไพบูลย์(2546) ทำการศึกษาถึงปัจจัยต่างๆที่เป็นตัวกำหนดดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย โดยใช้ข้อมูลรายเดือน ตั้งแต่เดือนมกราคม 2538 ถึง ธันวาคม 2544 ปัจจัยที่นำมาศึกษาได้แก่ มูลค่าการซื้อขายหลักทรัพย์ มูลค่าการซื้อขายหลักทรัพย์สุทธิของผู้ลงทุนจากต่างประเทศ ผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติ ค่าเงินบาท และดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยในอดีต โดยใช้วิธีกี่ทดสอบ unit root และ cointegration เพื่อทดสอบหาความสัมพันธ์ระยะยาวและการปรับตัวระยะสั้น ซึ่งทำให้ทราบถึงปัจจัยต่างๆที่มีผลต่อดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย (SET Index) ผลการศึกษาพบว่า มูลค่าการซื้อขายหลักทรัพย์ของผู้ลงทุนต่างประเทศและดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยมีความสัมพันธ์ไปในทิศทางเดียวกันกับดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ขณะที่ผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติและค่าเงินบาท ไม่มีอิทธิพลต่อดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย

กัลยาณี เจริญกิจหัตถกร(2548) ได้ทำการศึกษาเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยกับดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์สหรัฐอเมริกา โดยดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์สหรัฐอเมริกาที่นำมาทำการศึกษาคือ ดัชนี Nasdaq ดัชนี Down Jones และดัชนี S&P 500 ซึ่งทำการวิเคราะห์โดยใช้เทคนิค การร่วมไปด้วยกัน (cointegration) แบบจำลองเอเรอร์คอเรคชั่น (error correction model) และความเป็นเหตุเป็นผล (Granger causality) โดยใช้ข้อมูลรายวัน ผลการศึกษาพบว่าเมื่อทำการพิจารณาความสัมพันธ์ระยะยาวของสมการ โดยวิธีของ Johensen พบว่าดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยนั้นมีความสัมพันธ์ในระยะยาวและในทิศทางเดียวกันกับ ดัชนี Nasdaq ดัชนี Down Jones และดัชนี S&P 500 และเมื่อพิจารณาความเป็นเหตุเป็นผลของตัวแปร (Granger causality) ก็พบว่า ดัชนี Nasdaq ดัชนี Down Jones และดัชนี S&P 500 นั้นเป็นดัชนีชี้นำหรือตัวแปรสาเหตุที่ได้ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยให้เกิดการเปลี่ยนแปลง แต่ดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยไม่ได้เป็นตัวแปรที่มีผลต่อ ดัชนี Nasdaq ดัชนี Down Jones และดัชนี S&P 500 ซึ่งจะเป็นลักษณะความสัมพันธ์ในทิศทางเดียว

ไตร เอื้ออภิสิทธิ์วงศ์(2550) ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยกับดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์ที่สำคัญของโลกที่นำมาพิจารณาศึกษาได้แก่ ดัชนี Dow Jones ดัชนี Nasdaq ดัชนี NYSE ประเทศสหรัฐอเมริกา ดัชนี FTSE ประเทศอังกฤษ ดัชนี Xetra Dax ประเทศเยอรมัน ดัชนี CAC ประเทศฝรั่งเศส ดัชนี AOIS ประเทศออสเตรเลีย ดัชนี Nikkei ประเทศญี่ปุ่น ดัชนี Hang Seng ฮ่องกง และดัชนี Straits Times ประเทศสิงคโปร์ ใช้ข้อมูลทุติยภูมิรายเดือน ทั้งหมด 121 ข้อมูล ในการศึกษาครั้งนี้ได้ใช้เทคนิคทางเศรษฐมิติ ได้แก่ การทดสอบโครอินทิเกรชัน (Cointegration) และแบบจำลองเอเรอร์คอร์เรคชัน (Error Correction Mechanism) จากผลการทดสอบพบว่าตัวแปรทั้งหมดมีความสัมพันธ์กันในระยะยาว ซึ่งดัชนีราคาหุ้นตลาดหลักทรัพย์ต่างประเทศที่มีความสัมพันธ์ทิศทางเดียวกันกับดัชนีตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยได้แก่ดัชนี Straits Times ประเทศสิงคโปร์ ดัชนี NYSE ประเทศสหรัฐอเมริกา ดัชนี Nasdaq ประเทศสหรัฐอเมริกา ดัชนี CAC ประเทศฝรั่งเศส ดัชนี AOIS ประเทศออสเตรเลีย ดัชนี Nikkei ประเทศญี่ปุ่น แต่มีการเปลี่ยนแปลงในทิศทางตรงกันข้ามกับดัชนี Hang Seng ฮ่องกง ดัชนี FTSE ประเทศอังกฤษ ดัชนี Dow Jones ประเทศสหรัฐอเมริกาและดัชนี Xetra Dax ประเทศเยอรมัน

Cherubini, U. and E. Luciano(2001) เรื่อง Value at risk trade-off and capital copulas ได้เลือกใช้ฟังก์ชันคอปปูล่าในการคำนวณ VaR และการจัดสรรทุนให้ดีขึ้น การเลือกใช้วิธีการคอปปูล่าแสดงให้เห็นตัวเลขของผลประโยชน์มีความน่าเชื่อถือโดยการประมาณทางตรงหรือการปรับของ

การแจกแจงหลายตัวแปร การใช้ Archimeden copulas ซึ่งสามารถประมาณความน่าเชื่อถือแบบจำลองหลายตัวแปรของลตอบแทน การสำรวจ trade-off ของ VaR และลำดับของการจัดสรรทุนที่ลดความเสี่ยง การวิเคราะห์เชิงประจักษ์มีการศึกษาผลกระทบของความเป็น fat-tail ของผลตอบแทนใน VaR ผู้ศึกษาแสดงได้ว่าตารางการแลกเปลี่ยนเลื่อนลงโดยการแจกแจงส่วนปลายที่ใหญ่ขึ้น ในการศึกษาครั้งนี้ ได้ทำการประมาณมาร์จินัลที่ถูกต้องของเป็นสิ่งสำคัญ ถ้าการแลกเปลี่ยนมีอยู่เพราะว่าเฉพาะโครงสร้างที่ร่วมกันเป็นการแสดงโดยคอปปูล่า

Jondeau and Rockinger(2006) พัฒนาวิธีการของคอปปูล่าฟังก์ชันเพื่อการจำลองความสัมพันธ์ระหว่างชุดข้อมูลเวลา เมื่อการแจกแจงตัวแปรเดียวซับซ้อนและไม่ง่ายขยายพื้นฐานหลายตัวแปรเราใช้ copulas-GARCH หาโครงสร้างความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบแทนตลาดหุ้นรายวันตั้งแต่ปี 1980-1999 ผู้ศึกษายืนยันหลักฐานเชิงประจักษ์ว่าการแจกแจงของผลตอบแทนรายวันอาจบรรยายโดยการแจกแจงความเบ้แบบทีพร้อมกับความแปรปรวน, ความเบ้, ความโด่งที่เปลี่ยนไปตามเวลาจากข้างต้นการจำลองผลตอบแทนหลายอย่างพร้อมกัน (การใช้ขยายหลายตัวแปรของการแจกแจงนี้) ควรยุ่งยากสูงสุด ต่อมา ผู้ศึกษาใช้คอปปูล่าฟังก์ชันรวมการแจกแจงตัวแปรเดียวที่ซับซ้อนนี้การประยุกต์นี้นำไปสู่การแจกแจงหลายตัวแปรซึ่งเข้ากับข้อมูลได้ดี โดยไม่ใช้เวลาในการประมาณมาก ท้ายที่สุดผู้ศึกษาบรรยายพารามิเตอร์ความสัมพันธ์สามารถแสดงตามเงื่อนไขอย่างไรและเสนอข้อกำหนดอื่นที่จำลองไดนามิคของพารามิเตอร์ความสัมพันธ์ และพารามิเตอร์ความสัมพันธ์จัดให้สนองต่อมาร์จินัลตำแหน่งของจริงของอดีตในตารางหน่วย โมเดลนี้จัดให้กึ่งพารามิเตอร์อธิบายพารามิเตอร์ความสัมพันธ์ ความสัมพันธ์ระหว่างตลาดยุโรป พบการเพิ่มขึ้นตามลำดับอย่างมีนัยสำคัญไปในทางเดียวกันไม่ว่าขึ้นหรือลงและไดนามิคของโครงสร้างความสัมพันธ์ทั้งกระทั่งโมเดลความสัมพันธ์ที่เปลี่ยนไปตามเวลาและโมเดล Markov-switching หลักฐานเชิงประจักษ์มากมายว่าความสัมพันธ์ระหว่างตลาดยุโรปทั้งคู่เปลี่ยนไปตามกาลเวลาและเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ ระหว่างปี 1980 ถึง 1999 ตรงกันข้ามระหว่างอเมริกาและยุโรป