บทที่ 4

ผลการศึกษา

4.1 แบบจำลองการเจริญเติบโต Deterministic

$$W = \max_{\{c_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{4.1}$$

สมการข้อจำกัด

$$c_t + k_t = f(k_{t-1}) \tag{4.2}$$

โดยที่ c_t คือ การบริโภค ณ เวลาที่ t

k_t คือ การสะสมทุน ณ เวลาที่ t

$u(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันความพอใจ

$f(\cdot)$ คือ สมการการผลิต

β คือ ปัจจัยส่วนลด (discount factor)

ปัจจัยส่วนลด (discount factor) คือปัจจัยที่แสดงให้เราเห็นว่าในอนาคตเรามีความพึงพอใจในการบริโภคเป็นอย่างไรซึ่งในที่นี้กำหนดให้ $\beta < 1$ นั้นหมายความว่าเราจะมีความพึงพอใจในการบริโภคในอนาคตลดลงจากความพึงพอใจในการบริโภคในปัจจุบัน

4.1.1 การหาจุดสูงสุดของสมการโดยหาเงื่อนไขอันดับแรก (first order condition)

เราจะทำการหาอรรถประโยชน์สูงสุดของครัวเรือนภายใต้สมการข้อจำกัดโดยหาเงื่อนไขอันดับแรกเทียบกับ c_t และ k_t เพื่อหาจุดสูงสุด

จากแบบจำลองสามารถสร้างฟังก์ชัน Lagrangean ได้ดังนี้

$$L = [\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u(c_t))] + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_{t-1}[f(k_{t-1}) - c_t - k_t] \tag{4.3}$$

เงื่อนไขอันดับที่หนึ่งเทียบกับ c_t

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_{t-1} = 0 \tag{4.4}$$

จะได้ $\beta^t u'(c_t) = \lambda_{t-1}$ $\quad$ (4.5)

เงื่อนไขอันดับที่หนึ่งเทียบกับ k_t

$$\frac{\partial L}{\partial k_t} = -\lambda_{t-1} + (\lambda_t f'(k_t)) = 0 \tag{4.6}$$

จากสมาการ (4.5) ให้ช่วงเวลาผ่านไป1ช่วงเวลาจะได้

$$\beta^{t+1} u'(c_{t+1}) = \lambda_t \tag{4.7}$$

แทนค่าสมาการ (4.5) และ (4.7) ลงในสามการ (4.6) จะได้

$$\beta^{t+1} u'(c_{t+1}) f'(k_t) = \beta^t u'(c_t) \tag{4.8}$$

$$1 = \frac{\beta^{t+1} u'(c_{t+1}) f'(k_t)}{\beta^t u'(c_t)} \tag{4.9}$$

จากสมการข้อจำกัดเราจะพบว่า c_t นั้นเป็นฟังก์ชันของ k_t จึงสามารถเขียนสมการออย์เลอร์ (Euler equation) ได้เป็น

$$1 = \beta \frac{u'(c(k_{t+1}))}{u'(c(k_t))} f'(k_t) \tag{4.10}$$

จากสมการที่ (4.2) สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$k_{t+1} = f(k_t) - c_{t+1} \tag{4.11}$$

ดังนั้นจากสมการออย์เลอร์ (Euler equation) สมการฟังก์ชัน (functional equation) กำหนดโดย

$$F(c)(k) = \beta \frac{u'(c(f(k) - c(k)))}{u'(c(k))} f'(f(k) - c(k)) - 1 = 0 \tag{4.12}$$

4.1.2 การกำหนดฟังก์ชัน, ค่าพารามิเตอร์และการหาสภาวะคงที่ของสมการ

กำหนดค่าตามการศึกษาของ McGrattan (1996) ดังนี้

$u(c) = \ln(c)$ และ $f(k) = \lambda k^{\alpha}$

โดยที่ $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.96$ และ $\lambda = 1/(\alpha\beta)$

โดยในการหาสภาวะคงที่ของสมาการต่างๆข้างต้นโดยที่จะไม่นำเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องกับตัวแปรต่างๆในสมการดังนี้ จากสมการ (4.8) จะได้

$$\beta \frac{1}{\bar{c}} \lambda \alpha \bar{k}^{\alpha - 1} = \frac{1}{\bar{c}} \tag{4.13}$$

จากสมการที่ (4.13) เราสามารถหาการสะสมทุน (k) ที่สภาวะคงที่

$$\beta \alpha \lambda \bar{k}^{\alpha-1} = 1 \tag{4.14}$$

$$\beta \alpha \lambda = \bar{k}^{1-\alpha} \tag{4.15}$$

$$\bar{k} = (\beta \alpha \lambda)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{4.16}$$

จากสมการ (4.16) คือค่าของทุน ณ สภาวะคงที่และจากสมการ (4.14)

$$\beta\lambda\alpha\frac{\bar{k}^{\alpha}}{\bar{k}}=1 \tag{4.17}$$

$$\beta\lambda\alpha\bar{k}^{\alpha}=\bar{k} \tag{4.18}$$

จากสมการข้อจำกัด

$$\bar{c}=f(\bar{k})-\bar{k} \tag{4.19}$$

$$\bar{c}=\lambda\bar{k}^{\alpha}-\beta\alpha\lambda\bar{k}^{\alpha} \tag{4.20}$$

ดังนั้นจากสมการ (4.20) คำตอบสำหรับสมการการบริโภคในกรณีนี้คือ

$$c(k)=(1-\beta\alpha)\lambda k^{\alpha} \tag{4.21}$$

สำหรับสภาวะคงที่ของการสะสมทุน ($\bar{k}$) และการบริโภค ($\bar{c}$)

$\bar{k}=1$ คือ ดุลยภาพของการสะสมทุนจะเท่ากับ 1 หน่วย

$\bar{c}=0.4287$ คือดุลยภาพของการบริโภคอยู่ที่ 0.4287

4.1.3 ประยุกต์วิธี weighted residual กับการประมาณค่าแบบจำลอง

การหาคำตอบของสมการฟังก์ชัน (functional equation) โดยวิธี weighted residual สามารถกระทำโดยประมาณคำตอบของสมการฟังก์ชัน (functional equation) ให้อยู่ในรูปของการรวมกับของฟังก์ชันเชิงเส้น (linear combination) ของฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) จากสมการ (4.12) สมการฟังก์ชันคือให้ฟังก์ชัน f คือเงื่อนไขอันดับที่หนึ่ง (first-order condition) จากปัญหาการการหาค่าสูงสุด (maximization)

$$f(c)(k)=\frac{\beta\dfrac{1}{c(\lambda k^{\alpha}-c(k))}\alpha\lambda(\lambda k^{\alpha}-c(k))^{\alpha-1}-1}{\dfrac{1}{c(k)}} \tag{4.22}$$

$$f(c)(k)=\frac{\beta\alpha\lambda(\lambda k^{\alpha}-c(k))^{\alpha-1}c(k)}{c(\lambda k^{\alpha}-c(k))}-1 \tag{4.23}$$

c^n ก็คือการรวมกับของฟังก์ชันเชิงเส้น (linear combination) สมมติให้การประมาณค่าคำตอบอยู่ในรูปของ

$$c^{n}(k;\theta)=\theta_1 k+\theta_2 k^2+\ldots+\theta_n k^n$$

ให้สมการ residual คือสมการฟังก์ชันประมาณค่าที่คำตอบโดยประมาณ c^n:

$$R(k;\theta)=F(c^{n}(k;\theta))$$

กำหนดให้มีเงื่อนไขการมีขอบเขต (boundary condition) ที่ k=0 จากสมการ residual อยู่ในรูปของ

$$R(k;\theta) = \frac{\beta\alpha\lambda(\lambda k^{\alpha} - \sum_{j=1}^{n}\theta_j k^j)^{\alpha-1}\sum_{j=1}^{n}\theta_j k^j}{\sum_{i=1}^{n}\theta_i(\lambda k^{\alpha} - \sum_{j=1}^{n}\theta_j k^j)^i} - 1$$

การประยุกต์วิธี weighted residual ต้องหาค่าปฏิยานุพันธ์ในรูป

$$\int_0^{\bar{k}} \phi_i(k)R(k;\theta)dk, \qquad i = 1,\ldots,n \tag{4.24}$$

โดยที่ $\bar{k}$ คือ ขอบเขตบนของโดเมน สำหรับการสะสมทุน (capital stock) แต่ residual (R) เป็นฟังก์ชั่นไม่เชิงเส้น (nonlinear) ของ G ในความจริงต้องทำการหาค่าปฏิยานุพันธ์เชิงตัวเลข (numerical integration) จากการประยุกต์ Gaussian quadrature รูปของค่าปฏิยานุพันธ์ (4.24) จะถูกแทนที่โดย

$$\sum_{l} \omega_l \phi_i(k_l)R(k_l;\theta), \qquad i = 1,\ldots,n \tag{4.25}$$

ω_l = ค่าถ่วงน้ำหนัก guadrature

ตำแหน่ง k_l = quadrature abscissas

ค่าของ w_l และ k_l ไม่แสดงบนฟังก์ชันที่ถูกอินทิเกรท ($\phi_i(k)R(k;\theta)$) ถ้าเราทราบค่าขอบเขตของกา อินทิเกรท (ตัวอย่าง o และ k) และจำนวนของจุด quadrature โดยค่า ω_l และ k_l สามารถหาค่าได้จากตาราง standard quadrature ขึ้นอยู่กับลักษณะต่างของกฎ quadrature ที่ต้องการ (เช่น Legendre , Chebyshev, Hermite) ค่า ω_l และ k_l เป็นค่าที่ต่างกันแต่การคำนวณจาก R และ ϕ จะมีค่าที่ไม่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับลักษณะต่างของกฎ quadrature ที่ต้องการ

ขั้นตอนสุดท้าย คือ หาคำตอบของ ระบบสมการ (4.25) ในกรณีนี้เป็นระบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) ต้องการหา θ โดย G(θ)=0 ที่ G มีมิติ (dimention) เดียวกับ θ โดยการประยุกต์ Newton’s method เพื่อหา G(θ)=0

$$\theta^{j+1} = \theta^j - \left[\left.\frac{\partial G(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta^j}\right]^{-1} G(\theta^j), \qquad j = 1,2,3,\ldots \tag{4.26}$$

กับการหาค่า θ^0 ที่ θ^j คือ เวกเตอร์ของตัวแปรไม่ทราบค่าตัวที่พิกัด j^{th} การหาคำตอบ ลำดับของปัญหาของรูปแบบดังนี้หา θ โดยที่ $A\theta = b$ ที่ A เป็นจาโคเบียนเมทริกซ์ ของ $\frac{\partial G}{\partial \theta}$ คำนวณที่ θ^j และ b คือฟังก์ชันของตัวมันเอง, $G(\theta^j)$

สำหรับการประยุกต์ของ วิธี weighted residual ภายใต้ข้อกำหนด โดยกำหนดให้กฎ quadrature rule คือ Legendre กับ 20 quadruture abscissas (ใช้เพื่อประมาณค่าอินทิเกรทสมาการ (4.25)) ในกรณีที่

$$\omega_l = \int_{-1}^{1} \prod_{i=1, i\neq l}^{20} (x - x_i)/(x_l - x_i)dx$$

l = 1,2,…,20 และ $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ เป็นรากของ20^{th} พหุนาม Legendre พบว่า $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, ip_i(x) = (2i-1)xp_{i-1}(x) - (i-1)p_{i-2}(x), i = 2, \ldots, 20$ ที่โดยที่จุด k_l กำหนดโดย $k_l = x_l + 1, l = 1, \ldots, 20$

ในการแก้แบบจำลองโดยการประยุกต์วิธี weighted residual โดยใช้จะเริ่มขบวนการโดยการใช้โปรแกรม MAT-LAB ในการแก้แบบจำลองโดยโปรแกรมจะทำการเลือกวิธีการในการฟังก์ชัน $\phi_i(k)$ ที่ต่างกันหลังจากนั้นในแต่ละวิธีการเรียกใช้คำสั่งในกำหนดค่า abscissas และค่าถ่วงน้ำหนักแล้วจะทำการคำนวณหาค่าการบริโภคที่จุดดุลภาพโดยคำนวณจากค่ากรสะสมทุนที่ดุลยภาพเพื่อที่ต้องการทราบค่าของ ทีต้า (θ) จึงทำการคำนวณสมการ residual จากการกำหนดข้างต้นซึ่งผลการประมาณค่าจะแสดงเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการบริโภคกับการสะสมทุน

1) วิธีการกำลังสองน้อยที่สุด (least square method)

การประยุกต์ของ วิธีการกำลังสองน้อยที่สุด (least square method)

กำหนด $\phi_i(k) = \partial R(k;\theta)/\partial\theta_i$ ที่ การหาอนุพันธ์ของเรสซิดวล (residual) กำหนดโดย

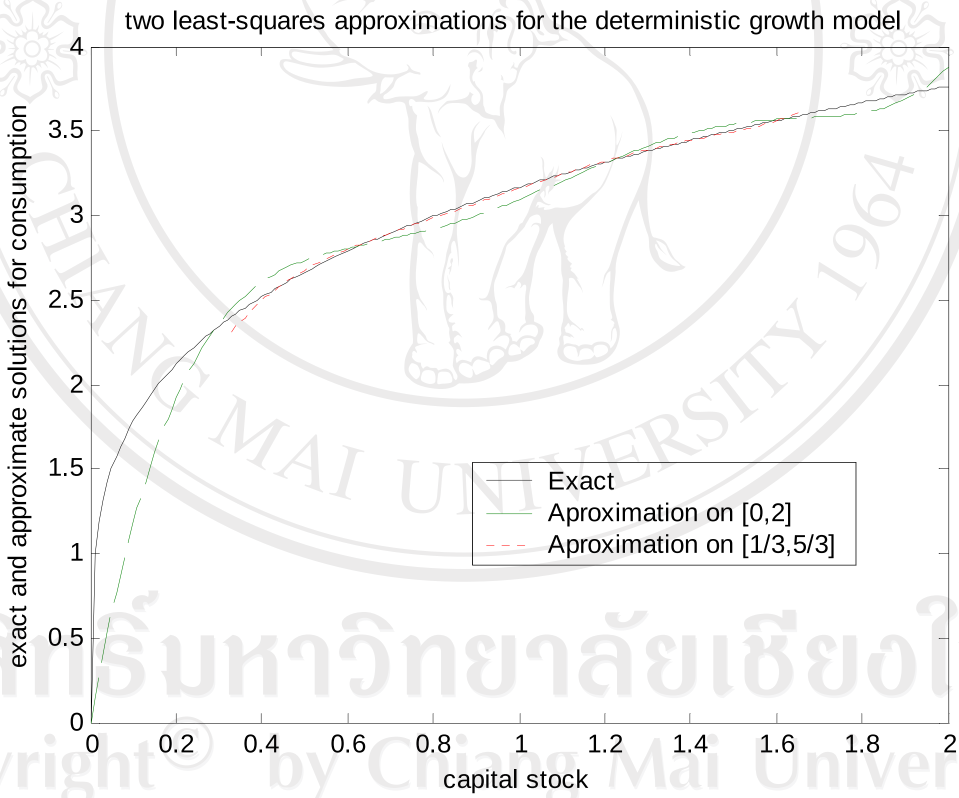
$$\frac{\partial R(k;\theta)}{\partial\theta_l} = -\frac{\beta\alpha\lambda\tilde{k}^{\alpha-1}k^l}{c^n(\tilde{k};\theta)}\left\{1 + \frac{(\alpha-1)c^n(k;\theta)}{\tilde{k}} - \frac{c^n(k;\theta)}{c^n(\tilde{k};\theta)}(\tilde{k}^l - k^l\sum_{i=1}^{n} i\theta_i\tilde{k}^{i-1})\right\}$$

l = 1,2,…,n และ $\tilde{k} = \lambda k^\alpha + \sum_j \theta_j k^j$

จากรูป (4.1) ได้ทำการแสดงคำตอบโดยประมาณ c^n สำหรับ n = 5 ร่วมกับคำตอบที่แท้จริง

อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่แท้จริงเป็นอนันต์ที่ k=0 และ จะมีค่าน้อยเมื่อค่าของ k มีค่าสูง จึงต้องเพิ่มพหุนามของสมการให้สำเร็จที่การสะสมทุน (capital stock) ทั้งหมด ดังนั้นจึงได้ทำการแสดงคำตอบบนแกนของ การสะสมทุน (capital stock) ที่อยู่ในช่วง $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$ สำหรับคำตอบโดยการประมาณค่าทั้งสองได้ทำการสมมุติให้ n = 5 โดยที่คำตอบโดยประมาณบนช่วง $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$ ได้คำตอบที่ใกล้เคียงกับคำตอบที่แท้จริงที่แท้จริงมาก

รูปที่ 4.1 แสดงการประมาณค่าโดยใช้วิธีการกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square Method) ของ Deterministic Growth Model



2) วิธี Collocation

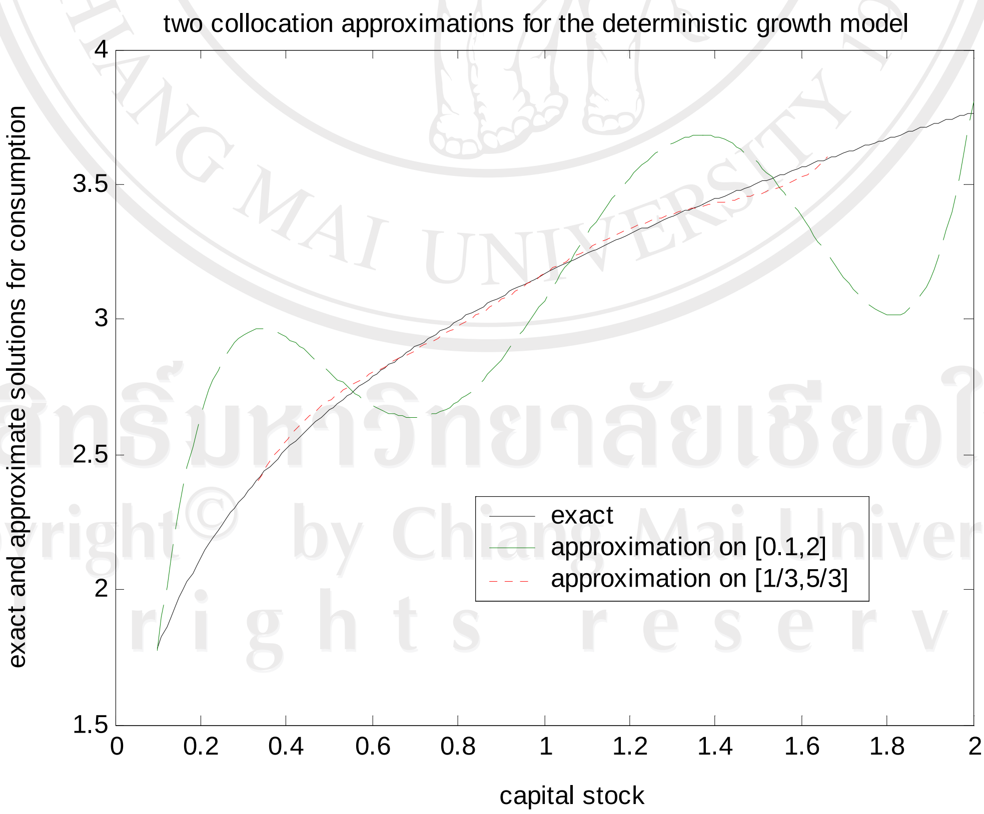
การประยุกต์ของ วิธี Collocation

กำหนด $\phi_i(k)=\delta(k-k_i), k_i, i=1,...,n$ เป็น Collocation points ใน $\left[0,\bar{k}\right]$ ในรูปที่ (4.2) ได้ทำการแสดงคำตอบโดยการประมาณค่า 2 คำตอบ ดังนี้ คือ

- คำตอบโดยการประมาณค่าที่มี collocation points 5 จุด ระหว่าง 0.1 และ 2
- คำตอบโดยการประมาณค่าที่มี collocation points 5 จุด ระหว่าง 1/3 และ 5/3

ปัญหาของการประมาณค่าฟังก์ชันกระทำร่วมกับ gradients ซึ่งได้คำตอบเป็นที่น่าพอใจ โดยได้ทำการหลีกเลี่ยงค่าของการสะสมทุน (capital stocks) ที่มีค่าที่น้อยกว่า 0.1 โดยได้ทำการประมาณค่าบนช่วง [0.1,2] ได้คำตอบไม่เป็นที่น่าพอใจ ดังนั้นจึงต้องเลือกฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) และ collocation points ที่ดีขึ้นเพื่อที่นำวิธีนี้ไปเปรียบเทียบกับวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด (least square method) พบว่าบนช่วง $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$ การประมาณค่าไม่ดีเท่าที่ควรเมื่อเทียบกับวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด (least square method) แต่คำตอบโดยการประมาณมีค่าที่ไม่ต่างจากคำตอบที่แท้จริงมากนักดังนั้นการประมาณค่าในช่วงนี้จึงเป็นที่น่าพอใจ

รูปที่ 4.2 แสดงการประมาณค่าโดยใช้วิธี Collocation ของ Deterministic Growth Model

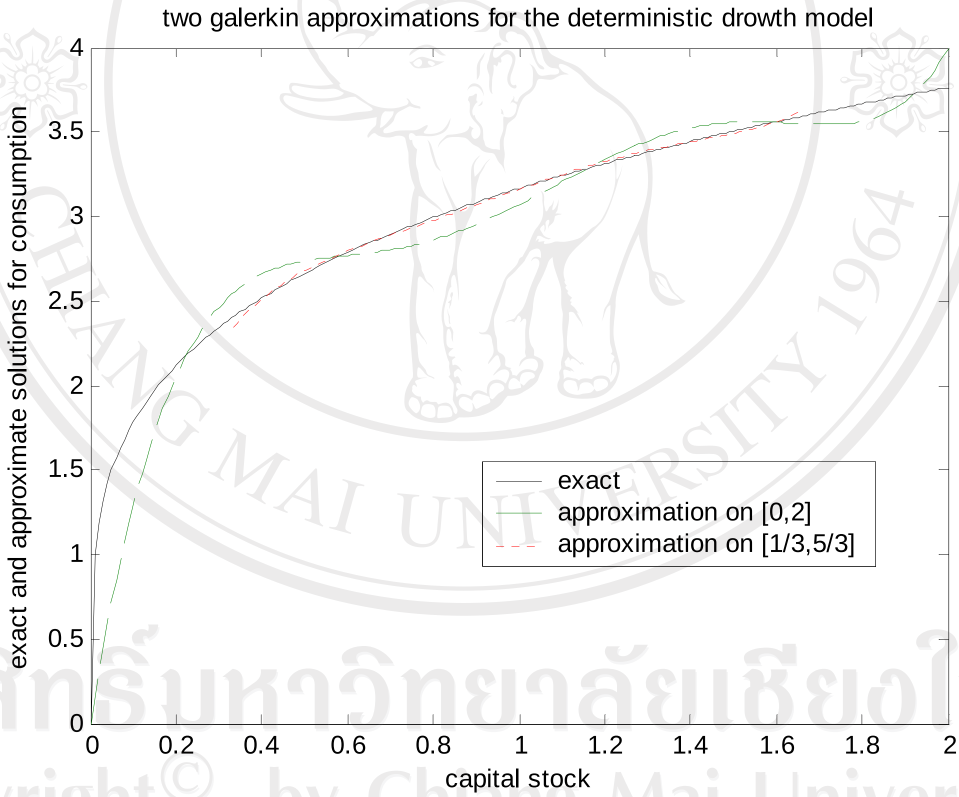


3) วิธี Galerkin

สำหรับการประยุกต์ของวิธี Galerkin

กำหนด $\phi_i(k)=k^i, i=1,...,n$ ในรูปที่ (4.3) ได้แสดงการประมาณคำตอบบนช่วง [0,2] และ $\left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$ ร่วมกับคำตอบที่แท้จริงพบว่าคำตอบที่ได้จะคล้ายกับคำตอบของวิธีการกำลังสองน้อยที่สุด (least square method)

รูปที่ 4.3 แสดงการประมาณค่าโดยใช้วิธี Galerkin ของ Deterministic Growth Model



4.1.4 แบบจำลองโดยการประยุกต์วิธี weighted residual โดยใช้พหุนาม Chebyshev เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน

เนื่องจากต้องการรวมกันของพหุนามที่มากขึ้นร่วมกับกรณีของ $k^i, i=1,...,n$ ทำให้กลายเป็นมีพหุนาม n ตัวจึงต้องใช้ระดับของพหุนามเอกฐาน (orthogonal polynomails) แสดงโดยสมการการบริโภค

$$c^n(k;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \psi_i(k) \tag{4.27}$$

ที่ $\psi_i(k) = p_{i-1}(2(k-\underline{k})/(\bar{k}-\underline{k}))$, $\underline{k}$ คือ ขอบเขตล่างของการสะสมทุน (capital stocks) , $\bar{k}$ คือ ขอบเขตบนของการสะสมทุน (capital stocks) และ $p_i(x)$ คือพหุนาม Chebyshev ตัวที่ i^{th} อธิบายโดยสมการ (4.27)

4.1.5 การกำหนดฟังก์ชัน, ค่าพารามิเตอร์และการหาสภาวะคงที่ของสมการ

กำหนดค่าตามการศึกษาของ McGrattan (1996) ดังนี้

$u(c) = c^{1-\tau}/(1-\tau)$ และ $f(k) = \lambda k^{\alpha} + (1-\delta)k$

โดยที่ τ คือ ความยืดหยุ่นของการทดแทนกัน (elasticity of intertemporal substitution)

δ คือ อัตราการเสื่อมราคาของทุน (depreciation rate)

$\tau = 5, \alpha = 0.25, \delta = 0.025, \beta = 0.99$ และ $\lambda = (1-\beta(1-\delta))/(\alpha\beta)$

กำหนดให้ c^n อยู่ในรูปสมการที่ (4.22) ด้วย n = 10

จากสมการ (4.8) จะได้

$$\frac{\beta(c_{t+1})^{-\tau}(\lambda\alpha k^{\alpha-1} + (1-\delta))}{(c_t)^{-\tau}} = 1 \tag{4.28}$$

จากสมการ (4.28) คำตอบสำหรับสมการการบริโภคในกรณีนี้คือ

$$\beta(c_{t+1})^{-\tau}(\lambda\alpha k^{\alpha-1} + (1-\delta)) = (c_t)^{-\tau} \tag{4.29}$$

$$\beta(c(k_{t+1}))^{-\tau}(\lambda\alpha k^{\alpha-1} + (1-\delta)) = (c(k_t))^{-\tau} \tag{4.30}$$

โดยในการหาสภาวะคงที่ของสมาการต่างๆข้างต้นโดยที่จะไม่นำเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องกับตัวแปรต่างๆในสมการดังนี้

$$\frac{\beta(\tilde{c})^{-\tau}(\lambda\alpha\tilde{k}^{\alpha-1} + (1-\delta))}{(\tilde{c})^{-\tau}} = 1 \tag{4.31}$$

$$\beta\lambda\alpha\tilde{k}^{\alpha-1} + \beta(1-\delta) = 1 \tag{4.32}$$

$$\left(\frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta\lambda\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \tilde{k} \tag{4.33}$$

สำหรับสภาวะคงที่ (steady state) ของการสะสมทุน ($\tilde{k}$)

$\tilde{k}$ = 1.002 ดุลยภาพของการสะสมทุนจะประมาณเท่ากับ 1 หน่วย

4.1.6 การแก้แบบจำลองโดยการประยุกต์วิธี weighted residual โดยใช้พหุนาม Chebyshev เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน

ในการแก้แบบจำลองโดยการประยุกต์วิธี weighted residual โดยใช้พหุนาม Chebyshev เป็นฟังก์ชันพื้นฐานนั้นจะเริ่มขบวนการโดยการใช้โปรแกรม MAT-LAB ในการแก้แบบจำลองโดยโปรแกรมจะทำการอ่านค่าตัวพารามิเตอร์ต่างๆหลังจากนั้นได้ทำการอินทิเกรทฟังก์ชันเรสซิดวล ($\int R(k;\theta)\psi dk$) จากการกำหนดข้างต้นซึ่งผลการประมาณค่าจะแสดงเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการบริโภคกับการสะสมทุนในรูปที่ (4.4) ได้แสดงคำตอบโดยการประมาณที่ $\underline{k}=0.03, \overline{k}=2$ และ $\underline{k}=0.1, \overline{k}=1.9$ ร่วมกับคำตอบที่แท้จริง จากรูปที่ 4.4 จะเห็นได้ว่าการใช้การรวมกันของสมาการพหุนามที่มากขึ้นนั้นจำเป็นสำหรับการประมาณค่าที่ถูกต้องบนช่วง [0.03,2] เนื่องจากได้ทดสอบทำการค่าของฟังก์ชันที่มีขอบเขตที่กว้างและฟังก์ชันที่มีขอบเขตที่แคบลงโดยได้ใช้ฟังชันพื้นฐาน (basis function) เดียวกัน เมื่อกำหนดให้โดเมนอยู่ในช่วง [0.1.1.9] นั้นแสดงได้ถึงการประมาณค่าที่ดีขึ้นซึ่งการประมาณค่านั้นใกล้เคียงกับคำตอบมากในขอบเขตที่จำกัดของโดเมนที่จำกัดซึ่งฟังก์ชันไม่มี gradients ที่กว้าง

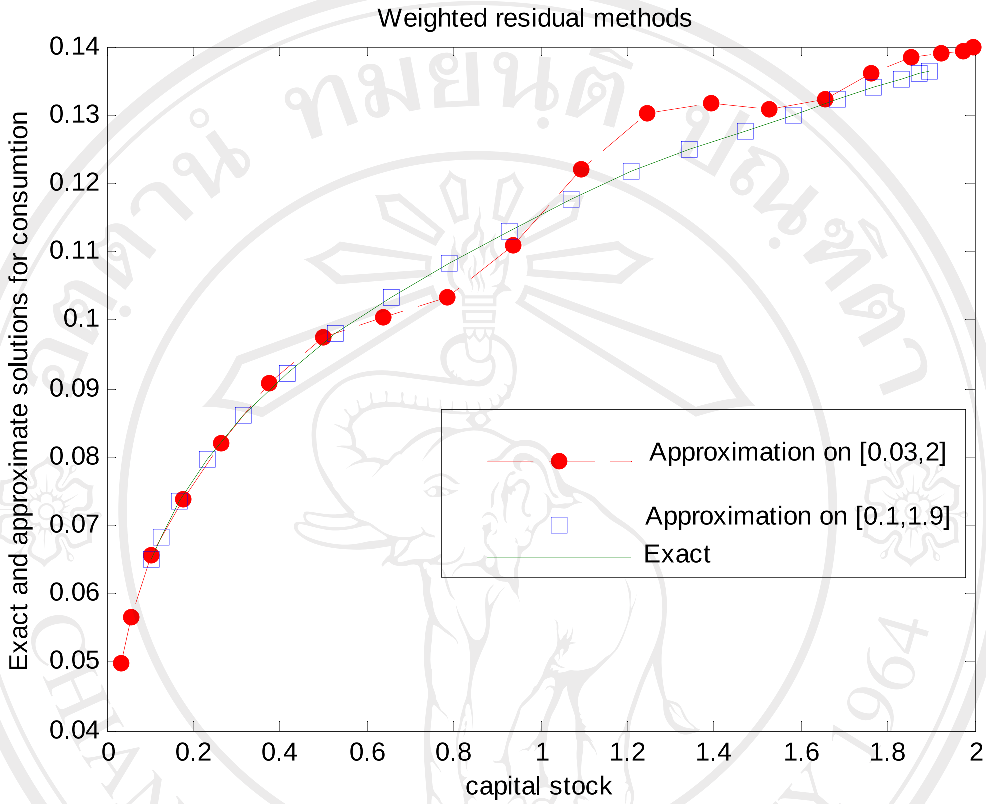
4.1.7 การแก้แบบจำลองโดยการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ร่วมกับฟังก์ชันเชิงเส้น piecewise เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน

ดังนั้นจึงได้ทดลองระเบียบวิธี Galerkin ร่วมกับฟังก์ชันเชิงเส้น piecewise เป็นฟังก์ชันพื้นฐานโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการประมาณค่า

การกำหนดฟังก์ชัน, ค่าพารามิเตอร์และการหาสภาวะคงที่ของสมการเนื่องจากกำหนดให้ $u(\cdot)$, $f(\cdot)$ และพารามิเตอร์ต่างๆเหมือนกับการแก้แบบจำลองโดยการประยุกต์วิธี weighted residual โดยใช้พหุนาม Chebyshev เป็นฟังก์ชันพื้นฐานจึงมีสภาวะคงที่ของสมการโดยให้ $x_1 = 0$, x_{11} =2 และ $x_i = x_{i-1} + 0.005\exp(0.574(i-2))$ โดยที่พื้นที่นี้มี 10 เอลิเมนต์ โดยที่ความยาวเพิ่มขึ้นแบบเอกซ์โปรเนนเชียล ดังนั้นจะมีจุดอยู่หลายจุดที่อยู่ใกล้กับจุดกำเนิดโดยที่ฟังก์ชันมี gradients ที่กว้าง (ในกรณีนี้เป็นอนันต์) ในการคำนวณปฏิยานุพันธ์ของตัวถ่วงน้ำหนัก (weighted integral) ได้ใช้กฎ Legendre quadrature ที่ 2 จุด quadrature สมมุติให้ ค่าถ่วงน้ำหนัก (weights) และ abscissae ตามสมการที่(4.25)

โดยที่ $\omega_l = l_e/2, l = 1,2$ และ $k_1 = k_e + 0.211 l_e, k_2 = k_e + 0.789 l_e$ โดยที่ k_e คือจุดสุดท้ายจุดแรกของเอลิเมนต์

รูปที่ 4.4 แสดงการประมาณค่าโดยใช้วิธีGalerkin โดยใช้ Chebyshev เป็น basis functions ของ Deterministic Growth Model

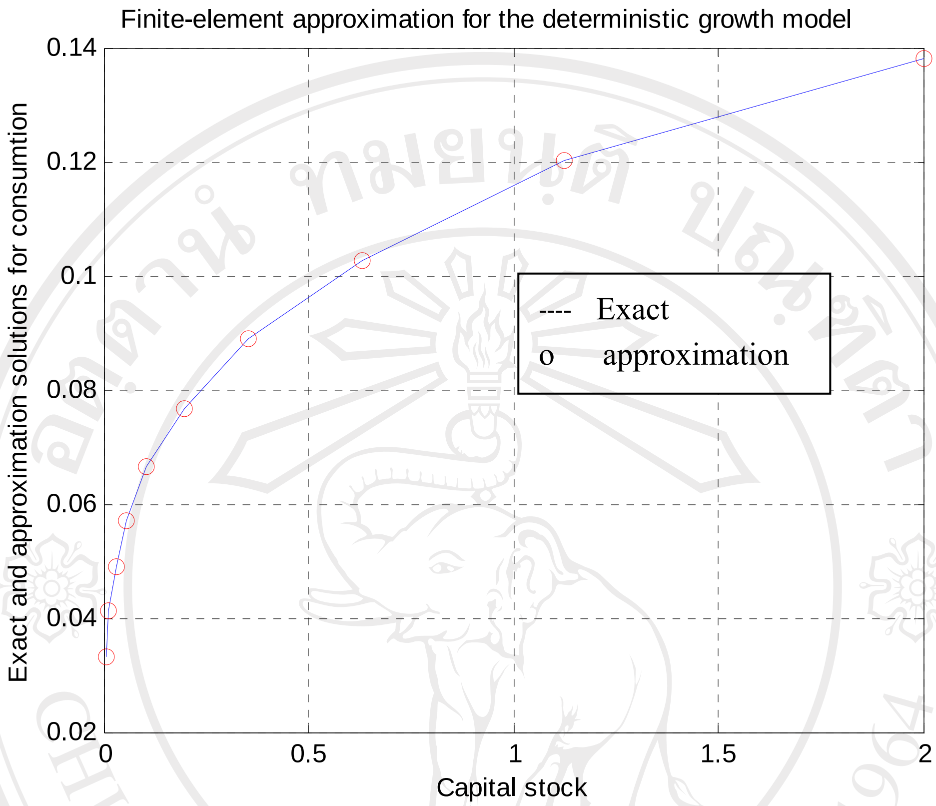


4.1.8 การแก้แบบจำลองโดยการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้ร่วมกับฟังก์ชันเชิงเส้น piecewise เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน

ในการแก้แบบจำลองโดยการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ร่วมกับฟังก์ชันเชิงเส้น piecewise เป็นฟังก์ชันพื้นฐานนั้นจะเริ่มขบวนการโดยการใช้โปรแกรม MAT-LAB ในการแก้แบบจำลองโดยโปรแกรมจะทำการแบ่งเอลิเมนต์ และทำการประมาณค่าในแต่ละเอลิเมนต์ จากการกำหนดข้างต้นซึ่งผลการประมาณค่าจะแสดงเป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการบริโภคกับการสะสมทุน

ในรูปที่ 4.5 ได้แสดงการประมาณค่าโดยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์รวมกับคำตอบที่แท้จริง เนื่องจากวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ เป็นกระบวนการ piecewise ของวิธี weighted residual จึงสามารถที่จะมีความถูกต้องมากในการประมาณค่าในช่วงโดเมน [0,2]

รูปที่ 4.5 แสดงการประมาณค่าโดยใช้วิธี วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ของ Deterministic Growth Model



4.2 แบบจำลองการเจริญเติบโต Stochastic

จากแบบจำลองคือแบบจำลองการเจริญเติบโต Deterministic ต้องการทำการคำนวณฟังก์ชันตัวแปรการตัดสินใจ (decision function) สำหรับแบบจำลองการเจริญเติบ Stochastic นั้นในแต่ละตัวแปรการตัดสินใจ (decision) อธิบายโดยการสะสมทุน (capital stock) และความแปรปรวนของผลกระทบภายนอก (stochastic shock) ในแบบจำลองการเจริญเติบโต Stochastic สมมุติให้การผลิต ณ เวลา t สามารถคำนวณได้จากการบริโภค ณ เวลาปัจจุบัน (c_t) หรือการลงทุน ณ เวลาปัจจุบัน (i_t) สมมุติตัวแปรการตัดสินใจ (decision) ของการบริโภคหรือการออม ให้อยู่ในค่าที่เหมาะสมโดยที่ความพึงพอใจ ของครัวเรือนเป็นค่าที่สูงสุดโดย ความพึงพอใจของครัวเรือนกำหนดโดย

$$W = E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \middle| k_{-1}\right], \qquad 0 < \beta < 1 \tag{4.34}$$

โดยที่ k_t = การสะสมทุน (capital stock) ณ เวลาที่ t

k_{-1} = เป็นค่าที่ทราบค่า

ภายใต้สมการข้อจำกัด

$$c_t + k_t - (1-\delta)k_{t-1} = \lambda_t k_{t-1}^{\alpha}, \qquad 0<\alpha<1, 0\le\delta\le 1 \tag{4.35}$$

โดยที่ค่า $c_t, k_t \geq$ o สำหรับทุกๆ $t \geq 0$ และสมการข้อจำกัดของกระบวนการความแปรปรวนของเทคโนโลยี (technology shock)

$$\ln\lambda_t = \rho\ln\lambda_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad -1<\rho<1 \tag{4.36}$$

ตัวแปรสุ่มมีการกระจายแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 เนื่องจาก ε มีการกระจายแบบปกติจึงไม่ต้องมีเงื่อนไขในการสนับสนุน ส่วนความแปรปรวนของเทคโนโลยี (technology shock) มีค่าระหว่าง 0 กับ อนันต์ ในการคำนวณไม่สามารถที่จะบอกขอบเขตของค่าอนันต์ได้ดังนั้นจึงกำหนดค่าขอบเขตบนที่มีค่ากว้างด้วยความน่าจะเป็นของกลุ่มตัวอย่างจะทำให้ค่านั้นมีขนาดที่เล็กลงหรือทำการล่งขอมูลของตัวแปร และการทำงานกับเงื่อนไขขอบเขต

โดยให้ $z = \tanh(\ln(\lambda))$ ดังนั้น

$$z_t = \tanh(\ln(\lambda_t)) \;:\; \lambda_t = e^{\rho\ln\lambda_{t-1}+\varepsilon_t}$$

$$\lambda_t = \lambda_{t-1}^{\rho} \times e^{\varepsilon_t}$$

จาก $z_t = \tanh(\ln(\lambda_t))$

$$z_t = \tanh(\ln(\lambda_{t-1}^{\rho} \times e^{\varepsilon_t}))$$

$$z_t = \tanh(\rho\ln\lambda_{t-1} + \varepsilon_t)$$

และจาก $\ln\lambda_{t-1} = \tanh^{-1}(z_{t-1})$

ค่า z_t อธิบายบน [-1,1] ดังนั้นสามารถเขียนสมาการ (4.36) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} z_t &= \tanh(\rho\tanh^{-1}(z_{t-1}) + \sqrt{2}\sigma\upsilon_t) \\ \upsilon_t &= \varepsilon_t \big/ \sqrt{2}\sigma \end{aligned} \tag{4.37}$$

เนื่องจากความแปรปรวน Stochastic เป็นค่าที่มีความต่อเนื่องจึงต้องหาคำตอบของปัญหา 2 มิติ (2-dimention) แสดงโดยคำตอบโดยการประมาณดังนี้

$$c^n(k,z;\theta) = \sum_{i=1}^{n}\theta_i\psi_i(k,z) \tag{4.38}$$

การกำหนดค่าฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) คือ สมาชิกทั้งหมดจากการคูณของเอลิเมนต์ $1,k,k^2,k^3,\ldots,k^{nk}\}$ กับ $\{1,z,z^2,z^3,\ldots,z^{nz}\}$ สามารถใช้สมาชิกทั้งหมดจากการคูณของเอลิเมนต์

ของพหุนามเอกฐาน (orthogonal polynomial) ในกรณีอื่นจำนวนของตัวแปรไม่ทราบค่ามีการเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วโดยเฉพาะถ้ามีจำนวนพจน์ที่มากของพหุนามการประมาณค่าสมการการบริโภคจึงต้องการทั้งค่าที่สูงและต่ำของการสะสมทุน (capital stock)

วิธีที่สามารถหาคำตอบของปัญหาได้ง่ายคือการใช้เซตของพหุนามที่สมบูรณ์ที่ดีกว่าสมาชิกทั้งหมดจากการคูณของเทอมในรูป $\{k^i\}_{i=0}^{n_k}$ และ $\{z^i\}_{i=0}^{n_z}$ (ตัวอย่าง base{1,k,z,k^2,kz,z^2} ดีกว่า {1,k,z,kz,k^2,z^2,k^2z,kz^2,k^2z^2}) การใช้เซตของพหุนามที่สมบูรณ์ทำให้มีการประมาณค่าฟังก์ชันที่มีดีกรีสูงแต่จำกัดจำนวนของตัวแปรไม่ทราบค่า สำหรับวิธีอื่นที่สามารถหาคำตอบของปัญหาได้ง่ายคือการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ระบบสมการจะหาคำตอบเพื่อตัวแปรตัวสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า θ โดยทั่วไประบบของสมการนั้นจะมีลักษณะให้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นที่มีค่าสัมประสิทธิ์ส่วนใหญ่ของเมทริกซ์เป็น 0 (sparse) แต่ปัญหาก็คือไม่ต้องการที่จะมีการบันทึกในระเบียบวิธีเสปกตรัมปกติ (typically spectral) ได้ประยุกต์กระบวนวิธีเพื่อหาคำตอบของระบบของสมการนั้น

4.2.1 การประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในแบบจำลองการเจริญเติบโต Stochastic

ขั้นตอนแรกคือการหาสมการ residual โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ(4.34) การหาจุดสูงสุดของสมาการโดยหาเงื่อนไขอันดับแรก (first order condition) เราจะทำการหาอรรถประโยชน์สูงสุดของครัวเรือนภายใต้สมการข้อจำกัดโดยหาเงื่อนไขอันดับแรกเทียบกับ c_t ,k_t และ z_t เพื่อหาจุดสูงสุด

จากแบบจำลองสามารถสร้างฟังก์ชัน Lagrangean ได้ดังนี้

$$L = [\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u(c_t)) | k_{-1}] + \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t [\lambda_t k_{t-1}^{\alpha} + (1-\delta) k_{t-1} - c_t - k_t] \tag{4.39}$$

$$L = [\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u(c_t)) | k_{-1}] + \sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t [\exp(\tanh^{-1} z_t) k_{t-1}^{\alpha} + (1-\delta) k_{t-1} - c_t - k_t] \tag{4.40}$$

เงื่อนไขอันดับที่หนึ่งเทียบกับ c_t

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \gamma_t = 0 \tag{4.41}$$

$$\gamma_t = \beta^t u'(c_t) \tag{4.42}$$

เงื่อนไขอันดับที่หนึ่งเทียบกับ k_t

$$\frac{\partial L}{\partial k_t} = -\gamma_t + \gamma_{t+1} (\exp(\tanh^{-1} z_{t+1}) \alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)) = 0 \tag{4.43}$$

$$\gamma_{t+1}(\exp(\tanh^{-1} z_{t+1})\alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)) = \gamma_t \tag{4.44}$$

จากสมการ (4.42) ให้ช่วงเวลาผ่านไป1ช่วงเวลาจะได้

$$\gamma_{t+1} = \beta^{t+1} u'(c_{t+1}) \tag{4.45}$$

แทนค่าสมการที่ (4.42) และ (4.46)ในสมการ (4.44) ได้

$$\beta^{t+1} u'(c_{t+1})(\exp(\tanh^{-1} z_{t+1})\alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)) = \beta^t u'(c_t) \tag{4.46}$$

$$\beta u'(c_{t+1})(\exp(\tanh^{-1} z_{t+1})\alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)) = u'(c_t) \tag{4.47}$$

$$\beta u'(c_{t+1})(\exp(\frac{1}{2}\ln\frac{1+z_{t+1}}{1-z_{t+1}})\alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)) = u'(c_t) \tag{4.48}$$

$$\beta u'(c_{t+1})(\sqrt{\frac{1+z_{t+1}}{1-z_{t+1}}}\alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)) = u'(c_t) \tag{4.49}$$

สมการฟังก์ชัน (functional equation) กำหนดโดย

$$f(c)(k) = \beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}(\sqrt{\frac{1+z_{t+1}}{1-z_{t+1}}}\alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)) = 1 \tag{4.50}$$

$$f(c)(k) = \beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}(\sqrt{\frac{1+z_{t+1}}{1-z_{t+1}}}\alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)) - 1 = 0 \tag{4.51}$$

4.2.2 การกำหนดฟังก์ชัน, ค่าพารามิเตอร์ และการหาสภาวะคงที่ของสมการ

กำหนดค่าตามการศึกษาของ McGrattan (1996) ดังนี้

$$u(c) = c^{1-\tau}/(1-\tau) \text{ และ } f(k) = \lambda k^{\alpha} + (1-\delta)k \tag{4.52}$$

โดยที่ τ คือ ความยืดหยุ่นของการทดแทนกัน (elasticity of intertemporal substitution)

δ คือ อัตราการเสื่อมราคาของทุน (depreciation rate)

ให้ $\tau = 1$, $\delta = 0$, $\beta = 0.95$, $\alpha = 0.33$, $\rho = 0.95$ และ $\sigma = 0.1$

กำหนดค่า z = [-0.391, -0.123, 0.12 , 0.391]

k = [0, 0.010, 0.036, 0.102, 0.273, 0.714, 1.85]

จำนวนจุด quadrature ในแต่ละเอลิเมนท์เท่ากับ 9 นั่นคือมีสามจุดของการอิทิเกรชัน (integration) ที่เทียบกับการสะสมทุน (capital stock) และสามจุดที่เทียบกับความแปรปรวนใน

เทคโนโลยี (technology shock) สำหรับการอินทิเกรชัน (integration) บน υ และได้กำหนดให้จำนวนของจุด quadrature , $m_{\upsilon} = 10$

โดยในการหาสภาวะคงที่ของสมาการต่างๆข้างต้นโดยที่จะไม่นำเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องกับตัวแปรต่างๆในสมการดังนี้

$$\beta u'(\tilde{c})(\tilde{\lambda}\alpha\tilde{k}^{\alpha-1} + (1-\delta)) = u'(\tilde{c}) \tag{4.53}$$

$$\beta(\tilde{\lambda}\alpha\tilde{k}^{\alpha-1} + (1-\delta)) = 1 \tag{4.54}$$

$$\tilde{\lambda}\alpha\tilde{k}^{\alpha-1} = \frac{1}{\beta} - (1-\delta) \tag{4.55}$$

$$\tilde{\lambda}\tilde{k}^{\alpha-1} = \frac{1}{\beta\alpha} - \frac{(1-\delta)}{\alpha} \tag{4.56}$$

$$\tilde{k}^{\alpha-1} = \frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha\tilde{\lambda}} \tag{4.57}$$

$$\tilde{k} = \left(\frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha\tilde{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{4.58}$$

สำหรับสภาวะคงที่ (steady state) ของการสะสมทุน ($\tilde{k}$)

$\tilde{k}$ = 0.1771 ดุลยภาพของการสะสมทุนจะเท่ากับ 0.1771

การประยุกต์วิธี weighted residual ต้องหาค่าปฏิยานุพันธ์ในรูป

$$R(k,z;\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c^n\left(\tilde{k},\tilde{z};\theta\right)^{-\tau}}{c^n\left(k,z;\theta\right)^{-\tau}} \left(\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}\sqrt{\frac{1+\tilde{z}}{1-z}} + 1 - \delta\right) e^{-\upsilon^2} d\upsilon - 1 = 0$$

$$\tilde{k} = k^{\alpha}\sqrt{(1+z)/(1-z)} + (1-\delta)k - c^n\left(k,z;\theta\right) \tag{4.59}$$

$$\tilde{z} = \tanh(\rho\tanh^{-1}(z) + \sqrt{2}\sigma\upsilon)$$

$c^n(0,z;\theta)=0$, υ มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ ½ และโดเมนสำหรับ state space คือ $\Omega = \left[0,\bar{k}\right] \times \left[-1,1\right]$ ถ้าประยุกต์กฎของ Gauss-Hermite quadrature ในการคำนวณปฏิยานุพันธ์สมการที่ (4.59) จะได้สมการ residual ดังนี้

$$R(k,z;\theta) \cong \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=1}^{m_{\upsilon}} \frac{c^n(\tilde{k},\tilde{z}_l;\theta)^{-\tau}}{c^n(k,z;\theta)^{-\tau}} (\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}\sqrt{\frac{1+\tilde{z}_l}{1-\tilde{z}_l}} + 1 - \delta)\omega_l - 1 \tag{4.60}$$

โดยที่ $\tilde{z}_l = \tanh(\rho \tanh^{-1}(z) + \sqrt{2}\sigma\upsilon_l), \upsilon_l, \omega_l, l = 1,...,m_\upsilon$ เป็น abscissas และ ตัวถ่วงน้ำหนัก สำหรับ m_υ จุดของกฎ quadrature

ขั้นที่สองวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือการแบ่งโดเมนให้มีขนาดที่เล็กลงโดยที่ไม่มีการซ้อนทับกันของแต่ละโดเมนที่ได้ทำการแบ่งเรียกว่าเอลิเมนต์ ในการศึกษาครั้งนี้โดเมนเป็นโดเมนที่มี 2 มิติ (dimension) และ มีมุมตั้งฉาก (rectangular) : $\Omega = \left[0, \bar{k}\right] \times \left[-1,1\right]$ ในแต่ละเอลิเมนต์ก็จะมีสมบัติตั้งฉาก (rectangular) ใน Ω คือ $\Omega = \left[k_i, k_{i+1}\right] \times \left[z_j, z_{j+1}\right]$ โดยที่ k_i คือพิกัดที่ i^{th} สำหรับการสะสมทุน (capital stock) และ z_j คือพิกัดที่ j^{th} เสำหรับความแปรปรวนของเทคโนโลยี (technology shock) โดยได้กำหนดวิธีการประมาณค่าของอิลิเมนต์มุมฉาก (rectangular element) ไว้สองวิธีคือวิธีเชิงเส้นและวิธี quadratic แสดงโดยสมการการบริโภคบนเอลิเมนต์ที่ e ที่เป็นเชิงเส้น

$$c_e^n\left(k,z\right) = a + bk + cz + dkz \tag{4.61}$$

เนื่องจากมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าอยู่ 4 ตัวจึงต้องการเอลิเมนต์ที่มี 4 node ถ้ากำหนดตำแหน่งของ node ให้อยู่ที่มุมของมุมฉากแล้วสามารถอธิบายเอกลักษณ์เรขาคณิตของเอลิเมนต์และให้ค่าคำตอบทั้ง 4 เพื่อลดค่าคงที่ของสมการ (4.61) นั้นคือถ้ากรณีของ 1 มิติสามารถเขียนสมการประมาณค่าของสมการ (4.61)ได้เป็น

$$c_e^n\left(k,z;\theta\right) = \sum_i \theta_i^e \psi_i^e\left(k,z\right), i = 1,...,4 \tag{4.62}$$

โดยที่ฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) คือ $\psi_i^e = 1$ ที่ node ที่ i แล้วเท่ากับ 0 ใน 3 เอลิเมนต์ ที่เหลือ

ก่อนที่จะแสดงสมการฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) เพื่อความสะดวกจะกำหนดการส่งค่า (mapping) ระหว่างพิกัดใหญ่(global) (k,z) กับพิกัดย่อย (local) (ξ,η) อธิบายบนเอลิเมนต์ หลัก เพื่อความสะดวกกำหนดให้เซตของเอลิเมนต์หลักมีเซตของพิกัดคงที่ ขณะที่เซตของพิกัดในแต่ละเอลิเมนต์ใน Ω มีเซตของพิกัดที่ต่างกันโดยสามารถสร้างฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ได้

กำหนดฟังก์ชัน $\xi(k)$ และ $\eta(z)$ ที่ส่งค่าเอลิเมนต์ทั่วไป $[k_i,k_{i+1}]\times[z_j,z_{j+1}]$ กับสี่เหลียม $[-1,1] \times [-1,1]$ โดยที่

$$\xi(k) = \left(2k - k_i - k_{i+1}\right)/\left(k_{i+1} - k_i\right)$$
$$\eta\left(z\right) = \left(2z - z_j - z_{j+1}\right)/\left(z_{j+1} - z_j\right)$$

สมมุติให้ 4 node ของเอลิเมนต์หลักคือ (-1,-1),(1,-1),(1,1),และ (-1,1) เป็นพิกัดย่อย (local) ในการศึกษานี้พื้นฐาน (basis function) ได้ถูกสร้างขึ้นดังนั้น

$$c_e^n\left(\xi,\eta;\theta\right)=\sum_i \theta_i^e \psi_i^e\left(\xi,\eta\right),$$
$$\theta_1^e=c_e^n\left(-1,-1;\theta\right),\theta_2^e=c_e^n\left(1,-1;\theta\right),\theta_3^e=c_e^n\left(1,1;\theta\right),\theta_4^e=c_e^n\left(-1,1;\theta\right)$$

จากข้อจำกัดนี้สมมุติให้

$$c_e^n\left(\xi,\eta;\theta\right)=\frac{1}{4}\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right)\theta_1^e+\frac{1}{4}\left(1+\xi\right)\left(1-\eta\right)\theta_2^e+\frac{1}{4}\left(1+\xi\right)\left(1+\eta\right)\theta_3^e+\frac{1}{4}\left(1-\xi\right)\left(1+\eta\right)\theta_4^e \tag{4.63}$$

เพื่อให้การประมาณค่ามีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นจึงสามารถเพิ่มจำนวนของเอลิเมนต์ขณะที่ยังรักษาฟังก์ชันพื้นฐานที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น (linear basis functions) เดิมหรือการใช้พหุนามที่มีดีกรีสูงขึ้นเช่นฟังก์ชัน quadratic 2 มิติ วิธีที่ง่ายที่สร้างฟังก์ชันนี้คือทำการคูนพหุนาม quadratic ที่มีมิติ 1x1 เซตเอกลักษณ์ของตัวสัมประสิทธ์สำหรับพหุนามต้องการ 9 node และ 9 ฟังก์ชันที่ถูกแทนที่ (interpolation) ในการศึกษานี้การประมาณค่าบนเอลิเมนต์หลัก [-1,1]×[-1,1] คือ

$$\begin{aligned}c_e^n\left(\xi,\eta;\theta\right)&=\frac{1}{4}\xi\left(\xi-1\right)\eta\left(\eta-1\right)\theta_1^e+\frac{1}{4}\xi\left(\xi+1\right)\eta\left(\eta-1\right)\theta_2^e+\frac{1}{4}\xi\left(\xi+1\right)\eta\left(\eta+1\right)\theta_3^e\\&+\frac{1}{4}\xi\left(\xi-1\right)\eta\left(\eta+1\right)\theta_4^e+\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\eta\left(\eta-1\right)\theta_5^e+\frac{1}{2}\xi\left(\xi+1\right)\left(1-\eta^2\right)\theta_6^e\\&+\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\eta\left(\eta+1\right)\theta_7^e+\frac{1}{2}\xi\left(\xi-1\right)\left(1-\eta^2\right)\theta_8^e+\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)\theta_9^e\end{aligned} \tag{4.64}$$

4.2.3 การแก้แบบจำลองโดยการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในแบบจำลองการเจริญเติบโต Stochastic

ในการแก้แบบจำลองโดยการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในแบบจำลองการเจริญเติบโต stochastic นั้นจะเริ่มขบวนการโดยการใช้โปรแกรม MAT-LAB ในการแก้แบบจำลองโดยโปรแกรมเริ่มด้วยการรับค่าพารามิเตอร์และฟังก์ชันการบริโภคที่ทำการแบ่งเอลิเมนต์ และทำการประมาณค่าในแต่ละเอลิเมนต์จากนั้นจะทำการสร้างฟังก์ชันของการสะสมทุนแล้วจึงทำการหาดุลยภาพของการสะสมทุน จากการกำหนดข้างต้นซึ่งผลการประมาณค่าจะแสดงเป็นกราฟ ในรูปที่ (4.6) ได้แสดงแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการบริโภคกับการสะสมทุนที่ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้น piecewise ร่วมกับคำตอบที่แท้จริงซึ่งแสดงโดยจุดสี่เหลี่ยม

รูปที่ 4.6 แสดงการประมาณค่าโดยใช้วิธี วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของ Stochastic Growth Model